

SIGUENOS EN:





LIBROS UNIVERISTARIOS Y SOLUCIONARIOS DE MUCHOS DE ESTOS LIBROS GRATIS EN DESCARGA DIRECTA

VISITANOS PARA DESARGALOS GRATIS.

Mecánica para Ingenieros

ESTÁTICA

Russell C. Hibbeler

SEXTA EDICIÓN

CECSA

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

MECÁNICA PARA INGENIEROS
ESTÁTICA

R. C. HIBBELER

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

MECÁNICA PARA INGENIEROS ESTÁTICA

SEXTA EDICIÓN EN INGLÉS
(TERCERA EDICIÓN EN ESPAÑOL)

R.C. Hibbeler

DÉCIMA TERCERA REIMPRESIÓN
MÉXICO, 2006

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL

http://librosysolucionarios.net

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:



correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.



fax pedidos:
(015) 561 4063 • 561 5231



e-mail:
info@patriacultural.com.mx



home page:
http://www.patriacultural.com.mx

Título original de la obra:
ENGINEERING MECHANICS: STATICS, 6TH. ED.
ISBN 0-02-354685-9
Traducción autorizada de la sexta edición:
Mac Millan Publishing Company, a division of Mac Millan Inc. USA.
Copyright ©1992, By R.C. Hibbeler

Traducción: Andrés Sestier B.
Licenciado en Matemáticas
Profesor titular del Depto. de Matemáticas
UAM, Iztapalapa

Revisión técnica: Ricardo Gánem C.
Ingeniero Físico
M. en I. Texas University, Arlington
Profesor del Depto. de Mecánica del ITSM Campus Edo. de México

Revisión especial de: Ing. Luis Palomino Ramírez e Ing. José Nicolás Ponciano
ITSM Campus Edo. de México

Mecánica para ingenieros: Estática
Derechos reservados respecto a la edición en español:
©1979, 1989, 1993, R.C. Hibbeler
©1993, Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V.
©2000, GRUPO PATRIA CULTURAL, S.A. DE C.V.
bajo el sello de Compañía Editorial Continental
Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, C.P. 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro núm. 43

ISBN 968-26-1233-0 (tercera edición)
(ISBN 968-26-0818-X segunda edición)
(ISBN 968-26-0290-4 primera edición)
(ISBN 968-26-0780-9 colección)

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición: 1979
Segunda edición: 1989
Tercera edición: 1993
Décima segunda reimpresión: 2005
Décima tercera reimpresión: 2006

---

http://librosysolucionarios.net

AL ESTUDIANTE

Con la esperanza de que este trabajo
estimule su interés por la Ingeniería Mecánica
y le proporcione una guía aceptable para su comprensión

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

Prólogo

En este libro nos proponemos hacer una presentación clara y completa para el estudiante de la teoría y las aplicaciones de la ingeniería mecánica. Para lograr este objetivo el autor no ha trabajado solo, muy lejos de ello, pues en gran medida este libro ha tomado forma gracias a los comentarios y sugerencias de más de un centenar de revisores de la profesión docente y numerosos exalumnos del autor que han usado las ediciones precedentes. Mucho es lo que se ha hecho durante la preparación de esta nueva edición. Quienes ya conocían el libro encontrarán que el trabajo artístico se ha realzado notablemente con el fin de que el material adquiera un relieve más realista y se haga más comprensible. En esta edición hay más problemas que en las anteriores, y casi todos son nuevos. El material que contiene el libro sigue el orden de la edición anterior, algunos temas se han ampliado, los ejemplos se han reemplazado, y las explicaciones de numerosos temas se han mejorado con una nueva y cuidadosa reconstrucción de frases seleccionadas. El sello distintivo del libro sigue siendo el mismo, a saber, que donde se hace necesario se recalca la importancia de trazar un diagrama de cuerpo libre y se insiste en la importancia de elegir un sistema conveniente de coordenadas y una convención de signos apropiados para las componentes vectoriales al aplicar las ecuaciones de la mecánica.

Organización y planteamiento. El contenido de cada capítulo está organizado en secciones bien definidas. Los grupos especiales de secciones contienen una explicación de temas específicos, problemas ilustrativos de ejemplo y una serie de problemas de tarea. Los temas dentro de cada sección aparecen en subgrupos definidos con títulos en negritas. El propósito es presentar un método estructurado para introducir cada nueva definición o concepto, y adecuar el libro para referencias posteriores y repaso.

http://librosysolucionarios.net

Al final de numerosas secciones se da un "procedimiento de análisis" que proporciona al estudiante un repaso o resumen del material y un método lógico y ordenado para aplicar la teoría. Como en ediciones previas, los problemas de ejemplo se resuelven usando los lineamientos de este método para dejar clara su aplicación numérica. Pero debe entenderse que una vez que haya dominado los principios pertinentes y adquirido suficiente criterio y confianza, el estudiante podrá desarrollar sus propios métodos para resolver los problemas. En la mayoría de los casos, estimamos que el primer paso de un procedimiento debe ser la elaboración de un diagrama. Haciéndolo así, el estudiante se forma el hábito de tabular los datos necesarios, al tiempo que se concentra en los aspectos físicos del problema y su geometría. Si se supera correctamente esta primera etapa, la aplicación de las ecuaciones pertinentes de la mecánica se vuelve metódica, pues los datos se van tomando en forma directa del diagrama. Este paso tiene particular importancia en la solución de los problemas que implican equilibrio, razón por la que nos referimos con insistencia al trazado de diagramas de cuerpo libre a lo largo del todo el libro.
Dado que las matemáticas proporcionan el medio de una aplicación sistemática de los principios de la mecánica, se espera del estudiante que tenga conocimientos de álgebra, geometría y trigonometría y, para el estudio completo, algo de cálculo. El análisis vectorial se introduce donde puede aplicarse más. En ocasiones, con su ayuda se obtienen deducciones concisas de la teoría, y hace posible la solución simple y sistemática de numerosos problemas complicados en tres dimensiones. A veces, se resuelven los problemas de ejemplo por dos o tres métodos de análisis para que el estudiante desarrolle la habilidad de usar las matemáticas como herramienta y aprenda a encontrar el método más directo y eficaz de resolver un problema.

Problemas. Numerosos problemas del libro describen situaciones realistas que se pueden encontrar en la práctica de la ingeniería. Esperamos que este realismo sirva para estimular el interés del estudiante en la ingeniería mecánica, a la vez que le ayude a desarrollar la capacidad de reducir un problema de este tipo de su descripción física a un modelo o representación simbólica en donde sean aplicables los principios de la mecánica. Como en la precedente, en esta edición se ha hecho un esfuerzo para incluir algunos problemas que se puedan resolver usando un procedimiento numérico realizable en una computadora personal o una calculadora programable de bolsillo. El apéndice B presenta técnicas numéricas apropiadas junto con sus programas de computadora asociados. Lo que se intenta con ello es ampliar la capacidad del estudiante para usar otras formas de análisis sin sacrificar el tiempo requerido para concentrarse en la aplicación

http://librosysolucionarios.net

de los principios de la mecánica. Los problemas de este tipo que se pueden o se deben resolver mediante la utilización de los métodos numéricos se identifican con el símbolo del cuadrado (■), contiguo al número de problema.

El número de problemas que usan las unidades del sistema SI es poco más o menos el mismo que el correspondiente para las unidades FPS. Además, en cada colección de problemas se ha tratado de seguir el orden de dificultad creciente.* Las respuestas de todos, salvo cada cuarto problema, se encuentran al final del libro. Cada problema sin respuesta impresa aparece con un asterisco (*) contiguo al número del problema.

Contenido. El libro se divide en 11 capítulos, en los que los principios introducidos empiezan aplicándose a situaciones simples. Lo más frecuente es que cada principio se aplique primero a una partícula, luego a un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas coplanares y por último, al caso general de los sistemas tridimensionales de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido.

El texto se inicia en el capítulo 1 con una introducción a la mecánica y una exposición de los sistemas de unidades. En el capítulo 2 se introducen la noción de vector y las propiedades de un sistema de fuerzas concurrentes. Esta teoría se aplica en seguida al equilibrio de las partículas en el capítulo 3. El capítulo 4 contiene una exposición de los sistemas concentrados y distribuidos de fuerzas y los métodos que se utilizan para simplificarlos. En el capítulo 5 se desarrollan los principios del equilibrio de cuerpos rígidos para aplicarlos, en el capítulo 6, a problemas específicos que involucran equilibrio de armaduras, bastidores y máquinas, y al análisis de fuerzas internas en vigas y cables, en el capítulo 7. Las aplicaciones a problemas que involucran fuerzas de fricción se tratan en el capítulo 8, y los temas relacionados con el centroide y el centro de gravedad se tratan en el capítulo 9. Si el tiempo lo permite, podrán cubrirse las secciones sobre temas más avanzados que vienen señaladas con una estrella (★). La mayoría de estos temas se incluyen en el capítulo 10 (área y momentos de masa de inercia) y el capítulo 11 (trabajo virtual y energía potencial). Nótese que este material también se relaciona con principios que son básicos en cursos más avanzados.

A juicio del profesor, podrá seguirse otra secuencia de trabajo sin ruptura de la continuidad lógica. Por ejemplo, es posible introducir el concepto de una fuerza y todos los métodos necesarios del análisis vectorial cubriendo primeramente el capítulo 2 y la sección 4.1. Luego, una vez que se haya visto el resto del capítulo 4 (sistemas de fuerzas y momentos), podrán estudiarse los métodos de equilibrio en los capítulos 3 y 5.

* Los problemas de repaso al final de cada capítulo se presentan en orden aleatorio.

http://librosysolucionarios.net

Reconocimientos. He intentado escribir este libro de modo que suscite el interés del instructor y del alumno. Un gran número de personas han ayudado a desarrollarlo a lo largo de muchos años y deseo expresarles mi agradecimiento por sus comentarios y sugerencias que mucho he apreciado. Específicamente, quiero agradecer a quienes contribuyeron a esta edición, esto es, al profesor Jafar Al-Abdulla, University of Wisconsin; profesor Ziad Bayasi, Bradley University; profesor William A. Best, Lafayette College; profesor James Devine, University of South Florida; profesor E.S. Doderer, Trinity University, San Antonio; profesora Brenda Gile, Wichita State University; profesor Zouheir Hashem, University of Texas at Arlington; profesor Henry Haslach, Jr., University of Maryland; Lt. Commander David Shikada, U.S. Naval Academy; profesor Larry Stauffer, University of Idaho, Moscow; profesor Ralph Stephens, University of Iowa; profesor Poojitha Yapa, Clarkson University; y profesor Kingman Yee, Lawrence Technological University. Mi agradecimiento especial a los profesores Edward Hornsey, University of Missouri, Rolla y Will Lidell Jr., Auburn University at Montgomery, y a un exdiscípulo en posgrado, el señor Kai Beng Yap, por la ayuda que me prestaron en la verificación de las respuestas a los problemas.

Muchas gracias también a todos mis estudiantes y a todos los miembros de la profesión docente que se tomaron la molestia y el tiempo de enviarme comentarios y sugerencias. La lista de ellos es demasiado extensa y les ruego que acepten este agradecimiento anónimo. Además, en mucho aprecio la libertad y el apoyo que me ofrecieron mis editores y el personal de MacMillan, especialmente David Johnstone, Gary Ostedt, Dora Rizzuto, Anna Yip y Sandy Moore. Por último, quiero reconocer aquí la ayuda de mi esposa, Conny, durante todo el tiempo de preparación del manuscrito para su publicación.

Russell Charles Hibbeler

http://librosysolucionarios.net

Contenido

1

Principios generales 1

2

Vectores de fuerza 15

http://librosysolucionarios.net

3

Equilibrio de una partícula 77

4

Resultantes de un sistema de fuerzas 107

5

Equilibrio de un cuerpo rígido 185

http://librosysolucionarios.net

6

Análisis estructural 245

7

Fuerzas internas 309

8

Fricción 365

http://librosysolucionarios.net

9

10

11

http://librosysolucionarios.net

Apéndices

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

1 Principios Generales

En este capítulo se presentan numerosos conceptos fundamentales de la mecánica. Se incluye una discusión de los modelos o idealizaciones utilizados para aplicar la teoría, un enunciado de las leyes de Newton del movimiento que son la base del tema y una revisión general de los principios de aplicación del sistema internacional de unidades (SI). Después se explican los procedimientos estándar de los cálculos numéricos. Al final del capítulo se ofrece una guía con lineamientos generales para resolver problemas.

1.1 Mecánica

La *mecánica* puede ser definida como la rama de las ciencias físicas que trata del estado de reposo o movimiento de los cuerpos sujetos a la acción de fuerzas. En términos generales, el tema se subdivide en tres ramas: *mecánica de cuerpos rígidos*, *mecánica de cuerpos deformables*, y *mecánica de fluidos*. Este libro trata solamente de la mecánica de cuerpos rígidos, dado que esta rama es la que se requiere para el diseño y análisis de múltiples tipos de dispositivos estructurales, mecánicos y eléctricos de la ingeniería. Debe agregarse que la mecánica de cuerpos rígidos es parte de la base necesaria en el estudio de la mecánica de cuerpos deformables y la mecánica de fluidos.

La mecánica de cuerpos rígidos se divide en dos áreas: estática y dinámica. La *estática* trata del equilibrio de los cuerpos, es decir, de los que se encuentran en estado de reposo o se mueven con velocidad constante; en tanto que la *dinámica* se ocupa del

http://librosysolucionarios.net

movimiento acelerado de los cuerpos. Aunque la estática puede considerarse como parte de la dinámica en la que la aceleración sea cero, la estática merece tratarse aparte en los estudios de ingeniería, porque muchos objetos se diseñan con la intención de que permanezcan en equilibrio.

Desarrollo histórico. La materia de la estática se desarrolló muy temprano en la historia, pues los principios que involucra podían formularse simplemente a partir de las medidas geométricas y la medición de fuerzas. Por ejemplo, los escritos de Arquímedes (287-212 a.C.) tratan del principio de la palanca. Documentos antiguos registran también estudios sobre la polea, el plano inclinado, y la llave de tuerca, en una época en que las necesidades de la ingeniería se limitaban principalmente a la construcción.

Puesto que los principios de la dinámica dependen de la precisión en la medida del tiempo, esta materia vino a desarrollarse mucho más tarde. Galileo Galilei (1564-1642) fue uno de los grandes pioneros en este campo. Su trabajo consistió en experimentos con péndulos y cuerpos en caída libre. Las contribuciones más significativas a la dinámica, sin embargo, se deben a Isaac Newton (1642-1727), conocido ante todo por su formulación de las tres leyes fundamentales del movimiento y la ley de la gravitación universal. Poco tiempo después de postuladas estas leyes, Euler, D'Alembert, Lagrange y otros desarrollaron importantes técnicas para sus aplicaciones.

1.2 Conceptos fundamentales

Antes de iniciar nuestro estudio de la mecánica de cuerpos rígidos es importante comprender el significado de ciertos conceptos y principios fundamentales .

Cantidades básicas. Las cuatro cantidades que siguen se usan en toda la mecánica de cuerpos rígidos.

Longitud. La *longitud* es necesaria para localizar la posición de un punto en el espacio y por este medio describir el tamaño de un sistema físico. Una vez definida una unidad de longitud patrón, podrán definirse cuantitativamente las distancias y propiedades geométricas de un cuerpo como múltiplos de la longitud unitaria.

Tiempo. El *tiempo* se concibe como una sucesión de eventos. Aunque los principios de la estática son independientes del tiempo, esta cantidad desempeña un papel importante en el estudio de la dinámica.

http://librosysolucionarios.net

Masa. La *masa* es una propiedad de la materia por medio de la cual podemos comparar la acción de un cuerpo con la de otro. Esta propiedad se manifiesta como una atracción gravitacional entre dos cuerpos y proporciona una medida cuantitativa de la resistencia de la materia a un cambio de velocidad.

Fuerza. En general, llamamos *fuerza* a la acción de "empujar" o de "tirar" ejercidas por un cuerpo sobre otro. Esta interacción puede ocurrir cuando existe contacto directo entre los cuerpos, como cuando una persona empuja una pared, o puede ocurrir a través de una distancia cuando los cuerpos se encuentren físicamente separados. Como ejemplos de esto último tenemos las fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas. En todo caso, una fuerza queda caracterizada por su magnitud, dirección y punto de aplicación.

Idealizaciones. En la mecánica se usan modelos o idealizaciones para simplificar la aplicación de la teoría. Algunas de las idealizaciones más importantes se definirán ahora; otras idealizaciones notables, por otra parte, se explicarán en el momento oportuno.

Partícula. Una *partícula* tiene masa pero tamaño despreciable. Por ejemplo, el tamaño de la Tierra es insignificante comparado con el de su órbita y, por tanto, la Tierra puede pensarse como si fuera una partícula al estudiar su movimiento orbital. Cuando un cuerpo es idealizado como partícula, los principios de la mecánica se reducen a una forma simplificada porque entonces la geometría del cuerpo quedará fuera del análisis del problema.

Cuerpo rígido. Un *cuerpo rígido* puede considerarse como la combinación de un gran número de partículas en la que todas las partículas permanecen a distancias fijas entre sí antes y después de aplicar una carga. En consecuencia, las propiedades materiales de un cuerpo cualquiera, que se considere como rígido, no tendrán que tomarse en cuenta al analizar las fuerzas que actúan sobre él. En la mayor parte de los casos, las deformaciones que se dan en las estructuras, máquinas, mecanismos y objetos semejantes son relativamente pequeñas, siendo adecuada la hipótesis de cuerpo rígido para efectos del análisis.

Fuerza concentrada. La *fuerza concentrada* representa el efecto de una carga que se supone que actúa en un punto del cuerpo. Este efecto se puede representar por medio de una fuerza concentrada, siempre y cuando el área de aplicación de la carga sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo.

Las tres leyes del movimiento de Newton. La totalidad de la mecánica de cuerpos rígidos se formula con base en las tres

http://librosysolucionarios.net

leyes del movimiento de Newton, cuya validez se basa a su vez en la observación experimental. Se aplican al movimiento de una partícula medido respecto a un sistema de referencia no acelerado y pueden enunciarse brevemente como sigue:

Primera ley. Una partícula inicialmente en reposo o moviéndose en línea recta y a velocidad constante permanecerá en este estado a condición de que la partícula *no* se sujete a una fuerza desequilibrada.

Segunda ley. Una partícula sobre la cual actúa una *fuerza desequilibrada* **F** experimenta una aceleración **a** que tiene la misma dirección que la fuerza y una magnitud directamente proporcional a la fuerza. Si se aplica **F** a la partícula de masa *m*, esta ley puede expresarse matemáticamente como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

Tercera ley. Las fuerzas mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales.

Ley de la gravitación universal de Newton. Poco tiempo después de haber formulado sus tres leyes del movimiento, Newton postuló una ley que rige la atracción gravitacional entre dos partículas cualesquiera. El enunciado matemático es

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.2}$$

donde F = fuerza de gravitación entre las partículas
G = constante de gravitación universal; de acuerdo con la evidencia experimental,
$G = 66.73(10^{-12})\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
m_1, m_2 = masa de cada una de las dos partículas
r = distancia entre las dos partículas

Peso. De acuerdo con la ecuación 1.2, dos partículas o cuerpos cualesquiera tienen una fuerza mutua de atracción (gravitacional) entre sí. En el caso de una partícula localizada sobre o cerca de la superficie de la Tierra; sin embargo, la única fuerza gravitacional con una magnitud de consideración es la fuerza entre la Tierra y la partícula. Consecuentemente, esta fuerza denominada *peso*, será la única fuerza gravitacional que vamos a considerar en nuestro estudio de la mecánica.

A partir de la ecuación 1.2 podemos obtener una expresión aproximada para encontrar el peso W de una partícula con masa $m_1 = m$. Si suponemos que la Tierra es una esfera no en rotación,

* Dicho de otra manera, la fuerza desequilibrada que actúa sobre la partícula es proporcional a la rapidez de cambio del momento lineal respecto al tiempo.

http://librosysolucionarios.net

con densidad constante y masa m_2, entonces si r es la distancia entre el centro de la Tierra y la partícula, tenemos

$$W = G\frac{mm_2}{r^2}$$

Si se escribe $g = Gm_2/r^2$ se obtiene

$$W = mg \tag{1.3}$$

Al comparar con la ecuación 1.1, denominamos g, a la aceleración debida a la gravedad. En vista de que depende de r, se concluye que el peso de un cuerpo *no* es una cantidad absoluta. Más bien, su magnitud está determinada por el lugar de la medición. Para la mayor parte de los cálculos de ingeniería, sin embargo, g se determina a nivel del mar y a una latitud de 45°, que se considera la "situación estándar".

1.3 Unidades de medida

Las cuatro cantidades básicas, longitud, tiempo, masa y fuerza, no son todas independientes entre sí; de hecho se encuentran *relacionadas* por la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. De aquí que las *unidades* empleadas para definir fuerza, masa, longitud y tiempo no se pueden elegir *todas* arbitrariamente. La igualdad $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ conserva su validez sólo si tres de las cuatro unidades, denominadas *unidades básicas*, se *definen arbitrariamente* y se *deriva* la cuarta unidad a partir de la ecuación.

Las unidades SI. El Sistema Internacional de unidades, abreviado SI, originalmente en francés *Système International d'Unités*, es una versión moderna del sistema métrico decimal que ha merecido el reconocimiento universal. Como se muestra en la tabla 1.1, el sistema SI especifica la longitud en metros (m), el tiempo en segundos(s), y la masa en kilogramos (kg). La unidad de fuerza, llamada newton (N), se *deriva* de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Así, 1 newton es igual a la fuerza que se requiere para dar a un kilogramo de masa una aceleración de 1 m/s² ($N = kg \cdot m/s^2$)

Si se desea determinar en newtons el peso de un cuerpo que se encuentre en una "situación estándar" deberá aplicarse la ecuación 1.3. Aquí $g = 9.806\ 65\ m/s^2$, sin embargo, para hacer los cálculos se usará el valor $g = 9.81\ m/s^2$. Así,

$$W = mg \quad (g = 9.81\ m/s^2) \tag{1.4}$$

Por lo tanto, un cuerpo cuya masa sea 1 kg tiene un peso de 9.81 N; un cuerpo de 2 kg pesa 19.62 N , etcétera.

http://librosysolucionarios.net

Unidades USCS. En el sistema de unidades usual de los E.U., en inglés *U.S. Customary system*, más conocido como FPS (de *Foot, Pound, Second*), la longitud se mide en pies (ft), la fuerza en libras (lb) y el tiempo en segundos (s), tabla 1.1. La unidad de masa llamada *slug*, se *deriva* de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Por tanto, 1 slug es igual a la cantidad de materia que experimenta una aceleración de 1 ft/s² al aplicarle una fuerza de 1 lb (slug = $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$).

Para determinar la masa de un cuerpo con un peso medido en libras debe aplicarse la ecuación 1.3. Si las medidas se hacen en una "situación estándar", entonces $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$ será el valor que se use en los cálculos. Por tanto,

$$m = \frac{W}{g} \quad (g = 32.2 \text{ ft/s}^2) \tag{1.5}$$

Y de esta manera, un cuerpo que pesa 32.2 lb tiene una masa de 1 slug; un cuerpo de 64.4 lb; una masa de 2 slug, etc.

Tabla 1.1 Sistemas de unidades

Nombre	*SI*	*FPS*
Longitud	metro (m)	pie (ft)
Tiempo	segundo (s)	segundo (s)
Masa	kilogramo (kg)	slug* $\left(\frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{ft}}\right)$
Fuerza	newton* (N) $\left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}\right)$	libra (lb)

*Unidad derivada.

Conversión de unidades. En algunos casos puede ser necesario convertir de un sistema de unidades a otro. A este respecto, la tabla 1.2 proporciona conversiones directas entre unidades FPS y unidades SI para las cantidades básicas. También, debe recordarse que en el sistema FPS 1 ft = 12 in (pulgadas), 5280 ft = 1 mi (milla), 1000 lb = 1 klb (kilolibra), y 2000 lb = 1 ton.

http://librosysolucionarios.net

Tabla 1.2 Factores de conversión

Cantidad	*Unidad de medida (FPS)*	*Equivale a*	*Unidad de medida (SI)*
Fuerza	lb		4.448 2 N
Masa	slug		14.593 8 kg
Longitud	ft		0.304 8 m

1.4 Sistema Internacional de Unidades (SI)

El sistema SI de unidades se usa ampliamente en este libro porque está destinado a ser el sistema estándar en todo el mundo. Por lo tanto, presentaremos ahora las reglas de su uso y parte de su terminología pertinente a la mecánica.

Prefijos. Cuando una cantidad numérica es muy grande o muy pequeña, las unidades que sirven para definir su magnitud pueden modificarse usando un prefijo. Algunos de los prefijos utilizados en el sistema SI pueden verse en la tabla 1.3. Cada uno representa un múltiplo o submúltiplo de una unidad y, aplicándolos sucesivamente, tienen como efecto mover el punto decimal de una cantidad numérica tres lugares decimales cada vez.* Por ejemplo, 4 000 000 N = 4 000 kN (kilo-newton) = 4MN (mega-newton). o, 0.005 m = 5 mm (milimetro). Nótese que el sistema SI no contiene el múltiplo deca (10) ni el submúltiplo centi (0.01), que utiliza el sistema métrico. Con excepción de algunas medidas de área y de volumen, el uso de estos prefijos ha de evitarse en la ciencia y la ingeniería.

Tabla 1.3 Prefijos

	Forma exponencial	*Prefijo*	*Símbolo SI*
Múltiplo			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
Submúltiplo			
0.001	10^{-3}	mili	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

Reglas de uso. Las siguientes reglas son para utilizar apropiadamente los símbolos SI:

* El kilogramo es la única unidad básica definida con prefijo

http://librosysolucionarios.net

1. Un símbolo *nunca* se escribe con la "s" del plural porque podría confundirse con la unidad de segundo (s).

2. Los símbolos siempre se escriben con minúsculas exceptuando los siguientes: los símbolos para los dos prefijos mayores de la tabla 1.3 , giga y mega se escriben con las mayúsculas G y M, respectivamente; los símbolos en honor de una persona también se escriben con mayúscula, por ejemplo, N.

3. Las cantidades definidas por varias unidades que son múltiplos de otras se separaran por medio de un punto para evitar confusión con la notación que usa prefijo, como en el caso de $N = kg \cdot m/s^2 = kg \cdot m \cdot s^{-2}$. Otro ejemplo es m · s, que significa metro por segundo, en tanto que ms significa mili-segundo.

4. La potencia exponencial representada para una unidad con prefijo afecta la unidad y el prefijo. Por ejemplo, $\mu N^2 = (\mu N)^2 = \mu N \cdot \mu N$. Así también, mm^2 representa $(mm^2) = mm \cdot mm$.

5. Las constantes físicas y los números que tengan varios dígitos a uno y otro lado del punto decimal deberán escribirse con un *espacio* entre cada grupo de tres dígitos en vez de una coma; por ejemplo, 73 569.213 427. Para el caso de sólo cuatro dígitos a uno u otro lado del punto decimal, el espaciamiento es opcional; por ejemplo 8357 o indistintamente 8 357. Además, conviene usar siempre decimales y evitar las fracciones; es decir, debe escribirse 15.25 y *no* $15\frac{1}{4}$.

6. Al efectuar cálculos, se debe representar los números en términos de sus *unidades básicas o derivadas*, convirtiendo todos los prefijos a potencias de 10. El resultado final deberá expresarse usando *un solo prefijo*. También, después del cálculo es preferible tener los valores numéricos entre 0.1 y 1000; de no tenerlos así, deberá utilizarse un prefijo adecuado. Por ejemplo,

$$(50\ kN)(60\ nm) = [50(10^3)\ N]\ [60(10^{-9})m]$$

$$= 3000(10^{-6})\ N \cdot m = 3(10^{-3})N \cdot m = 3mN \cdot m$$

7. No deben utilizarse prefijos compuestos; por ejemplo un Kμs (kilo-micro-segundo) debe expresarse como ms (mili-segundo), dado que $1\ k\mu s = 1(10^3)(10^{-6})\ s = 1(10^{-3})\ s = 1\ ms$.

8. A excepción de la unidad básica kilogramo, debe evitarse en general el uso de un prefijo en el denominador de unidades compuestas. No debe escribirse, por ejemplo, N/mm, sino kN/m; así también, m/mg se escribirá como mm/kg.

http://librosysolucionarios.net

9. Aunque no se expresan en múltiplos de 10, el minuto, la hora, etcétera, seguirán considerándose como múltiplos del segundo. Además, la medida angular en el plano se hace usando radianes (rad) . Sin embargo, en este libro se hará uso frecuente de los grados, donde $180° = \pi$ rad.

1.5 Cálculos numéricos

El trabajo numérico en la práctica de la ingeniería suele realizarse con calculadoras y computadoras portátiles. Sin embargo, es importante que las respuestas de cualquier problema sean dadas con una precisión justificable, a la vez que con un número apropiado de cifras significativas. En esta sección se explican estos temas y se consideran otros aspectos importantes de todos los cálculos en ingeniería.

Homogeneidad dimensional. Los términos de cualquier ecuación utilizada para describir un proceso físico deben ser *dimensionalmente homogéneos*; esto es, cada término debe expresarse en las mismas unidades. Siempre y cuando sea éste el caso, será posible combinar todos los términos de la ecuación al sustituir valores numéricos por las variables. Consideremos, por ejemplo, la ecuación $s = vt + \frac{1}{2}at^2$, donde, en unidades SI, s es la posición en metros, m, t es el tiempo en segundos, s, v es velocidad en m/s, y a es aceleración en m/s². Independientemente de la forma de evaluarla, esta ecuación conserva su homogeneidad dimensional. En la forma que enunciamos cada término, se expresa en metros [m, (m/$\not{s}$)$\not{s}$, (m/$\not{s}^2$)s^2], o, despejando a, $a = 2s/t^2 - 2\,v/t$, vemos que cada uno de los términos se expresan en unidades de m/s² [m/s², m/s², (m/s)/s].
Dado que los problemas en mecánica suponen la solución de ecuaciones dimensionalmente homogéneas, el hecho de que todos los términos de una ecuación estén representados por un conjunto uniforme de unidades puede usarse como verificación parcial de las manipulaciones algebraicas de una ecuación.

Cifras significativas. La precisión de un número queda especificada por el número de cifras significativas que contiene. Una *cifra significativa* es cualquier dígito, incluyendo un cero, siempre y cuando no esté para especificar la localización del punto decimal para el número. Por ejemplo los números 5604 y 34.52, tienen cada uno cuatro cifras significativas. Cuando los números comienzan o terminan en ceros, sin embargo, es difícil decir cuántas cifras significativas hay en el número. Considérese el número 40. ¿Tiene éste una (4) o tal vez dos (40) cifras significativas? Para aclarar esta situación, el número deberá expresarse usando potencias de 10. Hay dos maneras de hacerlo. El formato

http://librosysolucionarios.net

para la *notación científica* especifica un dígito a la izquierda del punto decimal, dejando los demás a la derecha; por ejemplo, 40 expresado a una cifra significativa sería $4(10^1)$. Usando la *notación de ingeniería* que aquí es preferible, el exponente aparece en múltiplos de tres para facilitar la conversión de las unidades SI a las que tengan prefijos apropiados. Así, 40 expresado a una cifra significativa sería $0.04(10^3)$. Asimismo, 2500 y 0.00546 expresados a tres cifras significativas serían $2.50(10^3)$ y $5.46(10^{-3})$.

Redondear números. Para los cálculos numéricos, la precisión que se obtenga de la solución de un problema no será en general mejor que la precisión de los datos del problema. Esto es lo que debe esperarse, pero las calculadoras y computadoras de bolsillo incluyen más cifras en la respuesta que el número de cifras significativas utilizadas para los datos. Por esta razón, un resultado calculado habrá siempre de redondearse a un número apropiado de cifras significativas.

Para garantizar la precisión, se aplican las siguientes reglas al redondear un número a n cifras significativas:

1. Si el dígito $n + 1$ es *menor que* 5, el dígito $n + 1$ y los que le siguen serán eliminados. Por ejemplo, 2.326 y 0.451 redondeados a $n = 2$ cifras significativas serían 2.3 y 0.45.

2. Si el $n + 1$ dígito es igual a 5 con ceros a continuación, entonces habrá que redondear el enésimo dígito a un *número par*. Por ejemplo, 1245 y 0.8655 redondeados a $n = 3$ cifras significativas vienen a ser 1240 y 0.866.

3. Si el dígito $n + 1$ es *mayor que* 5 o igual a 5, siguiéndole cualquier dígito ≠ cero, entonces deberá incrementarse el enésimo dígito en 1 y eliminar el $n + 1$ dígito y los que le sigan. Por ejemplo, 0.723 87 y 565.500 3 redondeados a $n = 3$ cifras significativas resultan en 0.724 y 566.

Cálculos. Como regla general, para garantizar la precisión de un resultado final al realizar cálculos con números de precisiones desiguales, conviene retener siempre una cifra significativa extra en los números más precisos que en los menos precisos *antes* de iniciar los cálculos. Después habrá que redondear el resultado final de modo que tenga el mismo número de cifras significativas que el menos preciso de los números. De ser posible, trate de llevar a cabo los cálculos de modo que no se sustraigan entre sí números aproximadamente iguales, porque por un cálculo semejante suele perderse precisión.

Casi todos los problemas de ejemplo de este libro se resuelven en el supuesto de que cualquier dato medido tiene precisión

http://librosysolucionarios.net

a tres cifras significativas.* En consecuencia, los cálculos intermedios se efectuarán con cuatro cifras significativas y las respuestas se presentarán por lo general con *tres* cifras significativas.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de los principios antes expuestos en relación con el uso apropiado y la conversión de unidades.

Ejemplo 1.1

Convierta 2 km/h a m/s.

SOLUCIÓN

Ya que 1 km = 1000 m y 1 h = 3600 s, los factores de conversión se disponen en el orden siguiente, para que puedan cancelarse las unidades:

$$2\text{ km/h} = \frac{2\text{ km}}{\text{h}}\left(\frac{1000\text{ m}}{\text{km}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\right)$$

$$= \frac{200\text{ m}}{3600\text{ s}} = 0.556\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 1.2

Convierta la cantidad de 300 lb · s a las unidades SI apropiadas.

SOLUCIÓN

Si usa la tabla 1.2, 1 lb = 4.448 2 N.

$$300\text{ lb}\cdot\text{s} = 300\text{ lb}\cdot\text{s}\left(\frac{4.448\,2\text{ N}}{\text{lb}}\right)$$

$$= 1334.5\text{ N}\cdot\text{s} = 1.33\text{ kN}\cdot\text{s} \qquad \textit{Resp.}$$

* Desde luego ciertos números, como π, e, o números que se usan en las fórmulas deducidas son exactos y, por tanto, precisos hasta infinidad de cifras significativas

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 1.3

Evalúe cada una de las siguientes cantidades y expreselas con unidades SI con prefijos apropiados: (a) (50 mN)(6 GN), (b) (400 mm)$(0.6\ \text{MN})^2$, (c) 45 MN^3/900 Gg.

SOLUCIÓN

Primero se convierte cada número a las unidades base, se realizan las operaciones indicadas y, finalmente, se elige un prefijo apropiado (vease la regla 6 de la pág. 8).

Parte (a)

$$
\begin{aligned}
(50\ \text{mN})(6\ \text{GN}) &= [50(10^{-3})\ \text{N}][6(10^{9})\ \text{N})\\
&= 300\ (10^{6})\ \text{N}^2\\
&= 300(10^{6})\ \text{N}^2\left(\frac{1\ \text{kN}}{10^3\ \text{N}}\right)\left(\frac{1\ \text{kN}}{10^3\ \text{N}}\right)\\
&= 300\ \text{kN}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}
\end{aligned}
$$

Observe con atención el acuerdo $\text{kN}^2 = (\text{kN})^2 = 10^6\text{N}^2$ (regla 4 de la pág. 8).

parte (b)

$$
\begin{aligned}
(400\ \text{mm})\ (0.6\ \text{MN})^2 &= [400(10^{-3})\ \text{m}]\ [0.6\ (10^{6})\ \text{N}]^2\\
&= [400(10^{-3})\ \text{m}]\ [0.36(10^{12})\ \text{N}^2]\\
&= 144(10^{9})\ \text{m}\cdot\text{N}^2\\
&= 144\ \text{Gm}\cdot\text{N}^2
\end{aligned}
$$

También podemos escribir

$$
\begin{aligned}
144(10^{9})\ \text{m}\cdot\text{N}^2 &= 144(10^{9})\ \text{m}\cdot\text{N}^2\left(\frac{1\ \text{MN}}{10^6\ \text{N}}\right)\left(\frac{1\ \text{MN}}{10^6\ \text{N}}\right)\\
&= 0.144\text{m}\cdot\text{MN}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}
\end{aligned}
$$

Parte (c)

$$
\begin{aligned}
45\ \text{MN}^3/900\ \text{Gg} &= \frac{45(10^6\ \text{N})^3}{900(10^6)\ \text{kg}}\\
&= 0.05(10^{12})\ \text{N}^3/\text{kg}\\
&= 0.05\ (10^{12})\ \text{N}^3\left(\frac{1\ \text{kN}}{10^3\ \text{N}}\right)^3\frac{1}{\text{kg}}\\
&= 0.05(10^{3})\ \text{kN}^3/\text{kg}\\
&= 50\ \text{kN}^3/\text{kg} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}
\end{aligned}
$$

Aquí hemos utilizado las reglas 4 y 8 de la pág. 8.

http://librosysolucionarios.net

1.6 Procedimiento general de análisis

El método más eficaz para aprender los principios de la ingeniería mecánica es el de *resolver problemas*. Para alcanzar el éxito en ello es importante presentar siempre el trabajo en *forma lógica* y *ordenada* como lo sugieren los pasos enumerados a continuación:

1. Lea el problema con atención y trate de correlacionar la situación física que se presenta con la teoría estudiada.

2. Trace los diagramas que sean necesarios y tabule los datos del problema.

3. Aplique los principios pertinentes, por lo general en forma matemática.

4. Resuelva las ecuaciones algebraicamente hasta donde resulte práctico hacerlo así y, entonces, asegurándose de su homogeneidad dimensional, utilice un sistema consistente de unidades y complete la solución numéricamente. La respuesta se presentará con no más cifras significativas que las que corresponden a la precisión de los datos del problema.

5. Estudie la respuesta con sentido común y criterio técnico para determinar si parece razonable.

6. Una vez obtenida la solución, revise el problema. Piense en otras formas de obtener la misma solución.

Al aplicar estos lineamientos generales, haga el trabajo en la forma más limpia posible. La limpieza en la escritura estimula el pensamiento claro y ordenado, y viceversa.

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

1-1. Redondee los números que siguen a tres cifras significativas: (*a*) 3.45555 m, (*b*) 45.556 s. (*c*) 5555 N, (*d*) 4525 kg.

1-2. Si un automóvil viaja a 55 mi/h, determine su velocidad en kilómetros por hora y en metros por segundo.

1-3. Si un automóvil tiene un peso de 3500 lb, determine su masa y exprese el resultado en unidades SI.

* **1-4.** Convierta 63 $ft^2 \cdot s$ a $m^2 \cdot s$.

1-5. Represente cada una de las siguientes combinaciones de unidades en la forma SI correcta utilizando un prefijo adecuado: (*a*) Mg/mm, (*b*) mN/μs, (*c*) μm · Mg.

1-6. Represente cada una de las siguientes combinaciones de unidades en la forma SI correcta usando un prefijo apropiado: (*a*) m/ms (*b*) μkm, (*c*) ks/mg, (*d*) km · μN.

1-7. Represente cada una de las siguientes cantidades en la forma SI correcta usando un prefijo apropiado: (*a*) 0.000431 kg, (*b*) 35.3 (10^3) N, (*c*) 0.00532 km.

* **1-8.** Evalúe cada una de las siguientes cantidades a tres cifras significativas y exprese cada respuesta en unidades SI usando un prefijo apropiado: (*a*) $(212\ mN)^2$, (*b*) $(52\,800\ ms)^2$, (*c*) $[548(10^6)]^{1/2}$ ms.

1-9. Evalúe cada una de las siguientes cantidades a tres cifras significativas y exprese cada respuesta en unidades SI usando un prefijo apropiado: (*a*) 0.631 $Mm/(8.60\ kg)^2$, (*b*) $(35\ mm)^2(48\ kg)^3$.

1-10. Evalúe (204 mm)(0.004 57 kg)/(34.6N) y exprese la respuesta en unidades SI usando un prefijo apropiado.

1-11. Evalúe cada una de las siguientes cantidades y exprese cada respuesta en unidades SI usando un prefijo apropiado: (*a*) (684 μm)/43 ms, (*b*) (28 ms)(0.0458 Mm) (348 mg), (*c*) (2.68 mm)(426 Mg).

* **1-12.** Evalúe cada una de las siguientes cantidades y exprese cada respuesta en unidades SI usando un prefijo apropiado: (*a*) 354 mg(45 km)/(0.035 6 kN), (*b*) (.004 53 Mg)(201 ms), (*c*) 435 MN/23.2 mm.

1-13. Haga las conversiones indicadas y exprese la respuesta usando un prefijo apropiado: (*a*) 175 lb/ft^3 a kN/m^3, (*b*) 6 ft/h a mm/s, (*c*) 835 lb · ft a kN · m.

1-14. El peso específico (peso/volumen) del latón es de 520 lb/ft^3. Determine su densidad (masa/volumen) en unidades SI. Use un prefijo apropiado.

1-15. Determine en kilogramos la masa de un objeto que tiene un peso de (*a*) 20 mN (*b*) 150 kN (*c*) 60 MN. Exprese cada respuesta usando un prefijo apropiado.

* **1-16** Determine su masa personal en kilogramos, su peso en newtons y su estatura en metros, usando la tabla 1.3.

1-17. Un cohete tiene una masa de 250 (10^3) slug sobre la superficie de la Tierra. Especifique (*a*) su masa en unidades SI, y (*b*) su peso en unidades SI. Si el cohete está sobre la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es $g_m = 5.30\ ft/s^2$, determine (*c*) su peso en unidades SI, y (*d*) su masa en unidades SI.

1-18. La densidad (masa/volumen) del aluminio es 5.26 $slug/ft^3$. Determine su densidad en unidades SI. Use un prefijo apropiado.

1-19. Una columna de concreto tiene un diámetro de 350 mm y una longitud de 2 m. Si la densidad (masa/volumen) del concreto es de 2.45 Mg/m^3, determine el peso de la columna en libras.

* **1-20.** Dos partículas tienen una masa de 350 kg y 250 kg, respectivamente. Si están separadas 4 m, determine la fuerza de atracción gravitacional entre ellas.

http://librosysolucionarios.net

2 Vectores de fuerza

En este capítulo se presenta el concepto de una fuerza concentrada y se dan procedimientos para sumar fuerzas, resolverlas en sus componentes y proyectarlas a lo largo de un eje. Dado que la fuerza es una cantidad vectorial, al considerar fuerzas debemos utilizar las reglas del álgebra vectorial. Iniciaremos nuestro estudio definiendo las cantidades escalares y vectoriales, y desarrollaremos luego las reglas básicas del álgebra vectorial.

2.1 Escalares y vectores

La mayor parte de las cantidades físicas de la mecánica pueden expresarse matemáticamente por medio de escalares y vectores.

Escalar. Toda cantidad caracterizada por un número positivo o negativo se llama *escalar*. La masa, el volumen y la longitud son cantidades escalares frecuentes en la estática. En este libro, los escalares se denotan con letras cursivas, como por ejemplo, el escalar A. Las reglas de operación con escalares son idénticas a las del álgebra elemental.

Vector. *Vector* es toda cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido y obedece a la regla de adición, llamada regla del paralelogramo. Esta ley, descrita más adelante, utiliza una forma de construcción que toma en cuenta la magnitud y la dirección del vector. Las cantidades vectoriales comúnmente usadas en la estática son los vectores de posición, de fuerza y momento.

http://librosysolucionarios.net

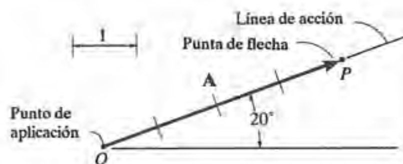


Fig. 2.1

El vector se representa gráficamente por medio de una flecha, que sirve para definir su magnitud, dirección y sentido. La *magnitud* del vector se indica por la longitud de la flecha, la *dirección* por el ángulo entre un eje de referencia y la línea de acción de la flecha, y el *sentido* lo indica la punta de la flecha. Por ejemplo, el vector **A** de la figura 2.1 tiene una magnitud de 4 unidades, una dirección de 20° medidos en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje horizontal, y un sentido hacia arriba y a la derecha. El punto *O* es el punto *inicial* del vector y *P* su *extremo*.



Fig. 2.2

En forma escrita, un vector se representa usualmente por medio de una letra sobre la que se dibuja una flecha, como en $\vec{A}$. La magnitud se denota $|\vec{A}|$ o simplemente A. En este libro los vectores se representarán en "negritas", por ejemplo **A** denota el vector de nombre "A". Su magnitud, que siempre es una cantidad positiva, se representa en cursiva $|A|$ o simplemente A si se sobreentiende que A es un escalar positivo.

2.2 Operaciones vectoriales

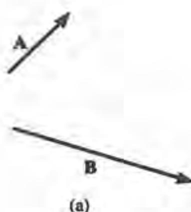


Multiplicación y división por un escalar

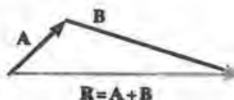
Fig. 2.3

Multiplicación y división de un vector por un escalar. El producto de un vector **A** y un escalar *a*, que da el resultado *a***A**, se define como un vector que tiene una magnitud $|aA|$. El *sentido* de *a***A** es el *mismo* que el de **A** a condición que *a* sea positivo; es en sentido *opuesto* de **A** si *a* es *negativo*. En consecuencia, el negativo de un vector se obtiene al multiplicarlo por el escalar (−1), figura 2.2. La división de un vector por un escalar se puede definir usando las reglas de la multiplicación, puesto que $\mathbf{A}/a = (1/a)\mathbf{A}$, con $a \neq 0$. En la figura 2.3 se muestran ejemplos de estas operaciones.

Adición de vectores. Dos vectores **A** y **B** del mismo tipo, figura 2.4*a* pueden sumarse para obtener el vector "resultante" **R** = **A** + **B**, usando la *ley del paralelogramo*. Para ello, **A** y **B** se ponen con un punto inicial común, figura 2.4*b*. Se trazan las líneas paralelas segmentadas a partir del extremo de cada vector formando los lados adyacentes de un paralelogramo. Como en el dibujo, el vector resultante **R** es la diagonal del paralelogramo, que se extiende del punto inicial común de **A** y de **B** hasta la intersección de las líneas segmentadas.







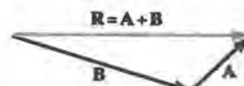


Fig. 2.4 (b) (c) (d)

Adición de vectores

http://librosysolucionarios.net

También pueden sumarse **A** y **B** utilizando una *construcción triangular* que es un caso particular de la regla del paralelogramo; en aquella el vector **B** se suma al vector **A**, haciendo coincidir el punto inicial de **B** con el extremo de **A** como en la figura 2.4*c*. El vector resultante **R** se extiende del punto inicial de **A** al extremo de **B**. El vector **R** podrá obtenerse con una construcción semejante pero sumando **A** a **B** como se aprecia en la figura 2.4*d*. Por comparación se observa que la adición de vectores es conmutativa, o sea que los vectores se pueden sumar en cualquier orden, es decir **R= A + B = B + A.**

Como caso especial, tenemos que si los dos vectores son *colineales*, esto es, que su línea de acción es la misma, entonces la ley del paralelogramo se reduce a una *suma algebraica* o *escalar* **R = A + B,** como se ilustra en la figura 2.5.

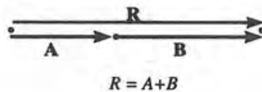


Fig. 2.5

Sustracción vectorial. La *diferencia* resultante entre los vectores **A** y **B** del mismo tipo puede expresarse mediante

$$\mathbf{R'} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Esta suma vectorial se muestra gráficamente en la figura 2.6. La sustracción queda así definida como un caso particular de la adición, de manera que las reglas de la adición se extienden a la sustracción.

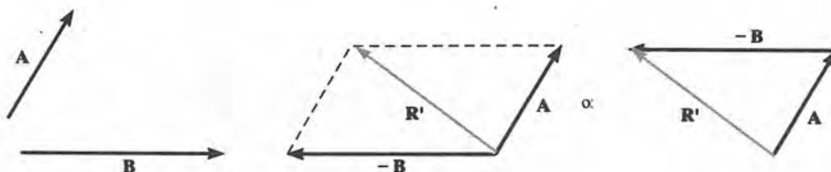


Fig. 2.6

http://librosysolucionarios.net

Resolución de un vector. Un vector puede resolverse o descomponerse en dos "componentes" que tengan líneas de acción dadas, usando la regla del paralelogramo. Por ejemplo, si **R** en la figura 2.7*a* debe resolverse en componentes que actúen a lo largo de las líneas *a* y *b*, se considera el *extremo* de **R** y, desde este punto, se traza una *paralela* a la línea *a* hasta intersecar la línea *b*. Asimismo, desde el extremo de **R** nuevamente se traza una paralela a *b* hasta encontrar la intersección con *a*, como se muestra en la figura 2.7*a*. Las componentes buscadas **A** y **B** son entonces los vectores con punto inicial en el punto inicial de **R** y extremo en las intersecciones obtenidas, como se aprecia en la figura 2.7*b*.

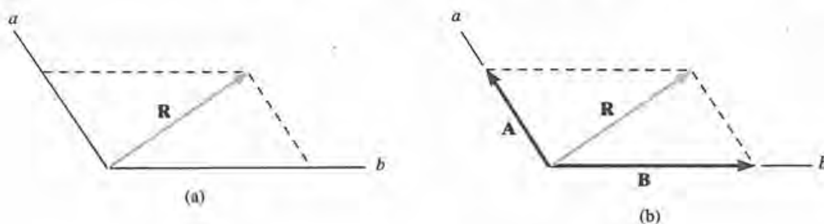


Fig. 2.7

2.3 Adición vectorial de fuerzas

Por evidencia experimental se sabe que una fuerza es una cantidad vectorial puesto que tiene magnitud, dirección y sentido especificados y se suma de acuerdo con la regla del paralelogramo. Dos problemas comunes en la estática consisten en encontrar la fuerza resultante conociendo sus componentes o resolver una fuerza conocida en dos componentes. Como se describió en la sección 2.2, ambos problemas requieren la aplicación de la regla del paralelogramo.

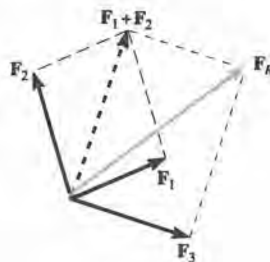


Fig. 2.8

http://librosysolucionarios.net

Si se van a sumar más de dos fuerzas, para obtener la resultante podrá aplicarse la regla del paralelogramo varias veces sucesivamente. Por ejemplo, si tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ tienen el mismo punto de aplicación O como en la figura 2.8, se obtendrá la resultante de dos de las fuerzas, digamos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y, entonces, esta resultante se suma a la tercera fuerza para dar la resultante de las tres fuerzas; es decir, $\mathbf{F}_R = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_3$. El uso de la regla del paralelogramo para sumar más de dos fuerzas, como aquí se muestra, requerirá usualmente cálculos geométricos y trigonométricos bastante extensos para llegar a los valores numéricos de la magnitud y la dirección de la resultante. En lugar de ello, para problemas de este tipo, se usará el "método de las componentes rectangulares", que simplifica notablemente el trabajo y que se explicará en la sección 2.4.

PROCEDIMIENTO DE ANALISIS

Los problemas que resultan de la adición de dos fuerzas y tienen a lo más dos *incógnitas* pueden resolverse usando el procedimiento siguiente:

Ley del paralelogramo. se hace un diagrama de la adición vectorial por la regla del paralelogramo. Si es posible, se determina los ángulos interiores del paralelogramo a partir de la geometría del problema. Recuérdese que el total de la suma de estos ángulos debe ser de 360°. Los ángulos desconocidos, así como las magnitudes de fuerzas conocidas y desconocidas, deberán "etiquetarse" claramente en el diagrama. Dibuje de nuevo una mitad del paralelogramo construido para ilustrar la adición triangular de las componentes.

Trigonometría. Mediante la trigonometría, es posible determinar las incógnitas a partir de los datos del triángulo. Si el triángulo *no* contiene un ángulo de 90°, podrá usarse la ley de los senos y/o de los cosenos para la solución. Estas fórmulas se dan en la figura 2.9 para el triángulo que ahí se muestra.

Los siguientes ejemplos ilustran este método numéricamente.

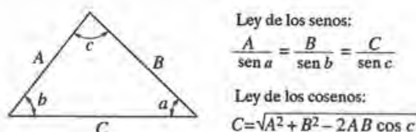
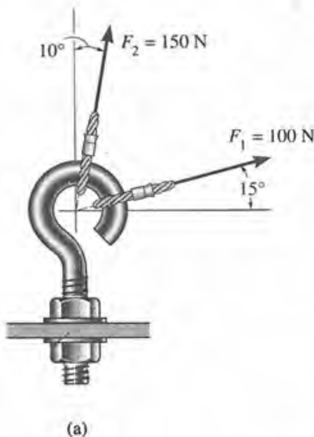


Fig. 2.9

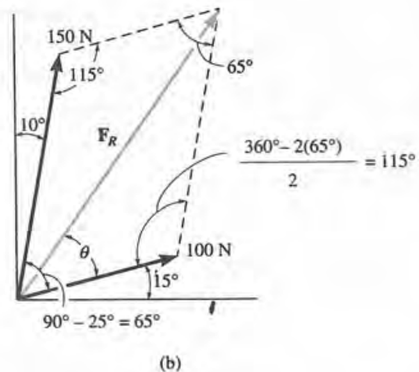
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.1

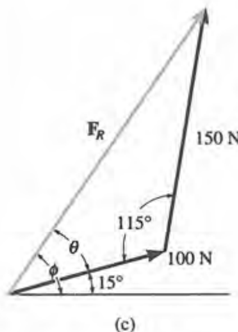
La armella roscada de la figura 2.10*a* está sometida a la acción de dos fuerzas, F_1 y F_2. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.10

SOLUCIÓN

Ley del paralelogramo. En la figura 2.10*b* se muestra la ley del paralelogramo de la adición. Las dos incógnitas son la magnitud de $\mathbf{F}_R$ y el ángulo θ (theta). A partir de la figura 2.10*b* se construye el triángulo vectorial 2.10*c*.

Trigonometría. F_R se determina usando la ley de los cosenos:

$$F_R = \sqrt{(100)^2 + (150)^2 - 2(100)(150)\cos 115^\circ}$$
$$= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6 \text{ N}$$
$$= 213 \text{ N}$$ ***Resp.***

El ángulo θ se determina al aplicar la ley de los senos, usando el valor calculado de F_R.

$$\frac{150}{\text{sen}\,\theta} = \frac{212.6}{\text{sen}\,115^\circ}$$
$$\text{sen}\,\theta = \frac{150}{212.6}(0.9063)$$
$$\theta = 39.8^\circ$$

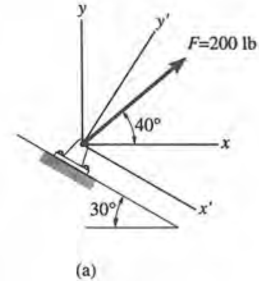
De esta forma, la dirección Φ (fi) de $\mathbf{F}_R$, medida a partir de la horizontal, es

$$\Phi = 39.8^\circ + 15.0^\circ = 54.8^\circ \quad \measuredangle^{\Phi}$$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.2

Resuelva la fuerza de 200 lb que actúa sobre el pasador, figura 2.11*a*, en componentes en (a) las direcciones x, y, y en (b) las direcciones x', y.



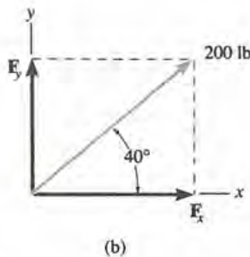
(a)

SOLUCIÓN

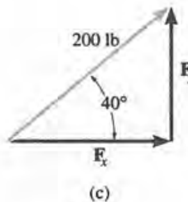
En cada caso se utiliza la regla del paralelogramo para resolver **F** en sus dos componentes y luego se construye el triángulo vectorial para determinar trigonométricamente los resultados numéricos.

Parte (a). La adición vectorial $F = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$ se muestra en la figura 2.11*b*. En particular, nótese que la longitud de las componentes se determina a lo largo de los ejes x, y y, construyendo primeramente las líneas segmentadas paralelas a los ejes de acuerdo con la ley del paralelogramo. A partir del triángulo de vectores, figura 2.11*c*,

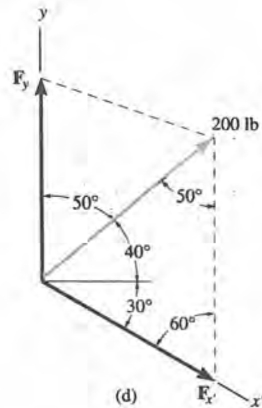
$$F_x = 200 \cos 40° = 153 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$
$$F_y = 200 \operatorname{sen} 40° = 129 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)



(c)



(d)

Fig. 2.11

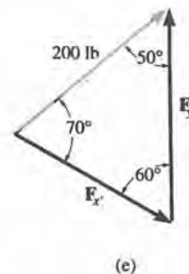
Parte (b). La adición vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{x'} + \mathbf{F}_y$ se muestra en la figura 2.11*d*. Obsérvese con atención cómo se construye el paralelogramo. Aplicando la ley de los senos y usando los datos del triángulo vectorial, la figura 2.11*e*, nos da

$$\frac{F_x'}{\operatorname{sen} 50°} = \frac{200}{\operatorname{sen} 60°}$$

$$F_x' = 200\left(\frac{\operatorname{sen} 50°}{\operatorname{sen} 60°}\right) = 177 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\frac{F_y}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{200}{\operatorname{sen} 60°}$$

$$F_y = 200\left(\frac{\operatorname{sen} 70°}{\operatorname{sen} 60°}\right) = 217 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$



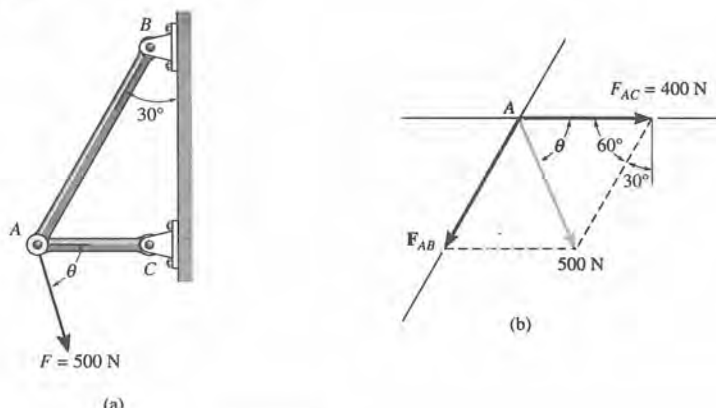
(e)

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.3

La fuerza **F** que actúa sobre la estructura mostrada en la figura 2.12*a* tiene una magnitud de 500 N y debe resolverse en dos componentes que actúan a lo largo de los puntales *AB* y *AC*. Determine el ángulo θ, medido por abajo de la horizontal, de modo que la componente $\mathbf{F}_{AC}$ esté dirigida de *A* a *C* y tenga magnitud de 400 N.

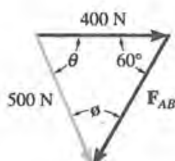
Fig. 2.12



(a) (b)

SOLUCIÓN

Se usa la ley del paralelogramo. La suma de las dos componentes que da la resultante se muestra en la figura 2.12*b*. Nótese con atención cómo se resuelve la resultante en las dos componentes $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$, que tienen líneas de acción especificadas. El triángulo vectorial correspondiente se muestra en la figura 2.12*c*. El ángulo θ se puede determinar usando la ley de los senos:



(c)

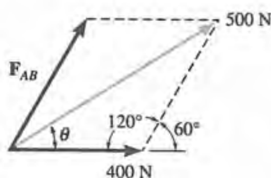
$$\frac{400}{\text{sen}\,\Phi} = \frac{500}{\text{sen}\,60°}$$

$$\text{sen}\,\Phi = \left(\frac{400}{500}\right)\text{sen}\,60°$$

$$\Phi = 43.9°$$

Por tanto,

$$\theta = 180° - 60° - 43.9° = 76.1° \quad \measuredangle^{\theta} \qquad \textit{Resp.}$$



(d)

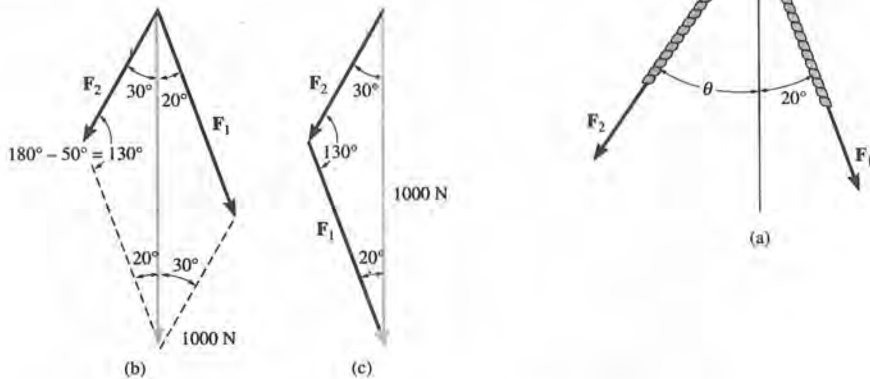
Con este valor de θ, aplique la ley de los cosenos y muestre que $\mathbf{F}_{AB}$ tiene una magnitud de 560 N.

Observe que **F** puede dirigirse también con un ángulo θ *por arriba* de la horizontal como en la figura 2.12*d* y producir todavía la componente requerida $\mathbf{F}_{AC}$. Muestra que en este caso $\theta = 161°$ y $F_{AB} = 161$N

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.4

El anillo que se ve en la figura 2.13*a* está sujeto a dos fuerzas, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Si se requiere que la fuerza resultante tenga una magnitud de 1 kN y sea dirigida verticalmente hacia abajo, determine (a) las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con la condición de que $\theta = 30°$, y (b) las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ si F_2 debe ser mínima.



SOLUCIÓN

Parte (a). Un bosquejo de la adición vectorial de acuerdo con la ley del paralelogramo puede verse en la figura 2.13*b*. A partir del triángulo vectorial construido en la figura 2.13*c*, las magnitudes desconocidas F_1 y F_2 se pueden determinar mediante la ley de los senos.

$$\frac{F_1}{\text{sen } 30°} = \frac{1000}{\text{sen } 130°}$$

$$F_1 = 653 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\frac{F_2}{\text{sen } 20°} = \frac{1000}{\text{sen } 130°}$$

$$F_2 = 446 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b). Si no se especifica θ, entonces por el triángulo vectorial figura 2.13*d*, $\mathbf{F}_2$ puede sumarse a $\mathbf{F}_1$ de varias formas para obtener la fuerza resultante de 1000 N. En particular, la longitud o magnitud mínima de $\mathbf{F}_2$ ocurrirá cuando su línea de acción sea *perpendicular* a $\mathbf{F}_1$. Otra dirección cualquiera, por ejemplo *OA* u *OB*, da un valor más grande de F_2. Luego entonces, cuando $\theta = 90° - 20° = 70°$, $\mathbf{F}_2$ es mínima. A partir del triángulo mostrado en la figura 2.13*e* se ve que

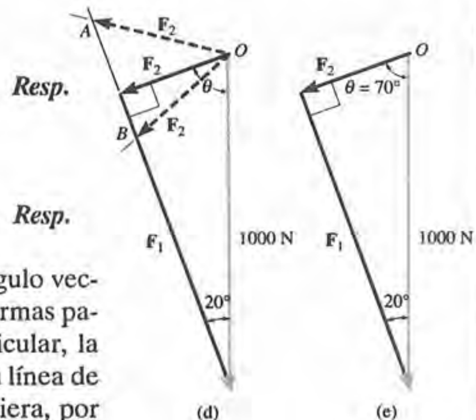


Fig. 2.13

$$F_1 = 1000 \text{ sen } 70° = 940 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

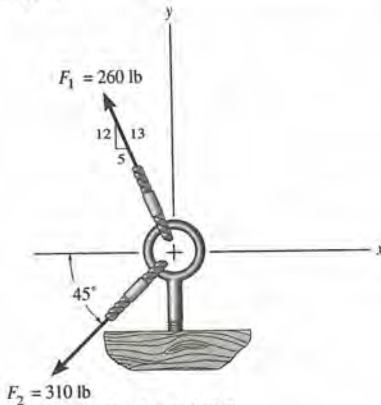
$$F_2 = 1000 \text{ sen } 20° = 342 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

2.1. Determine la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y su orientación θ, medida en el sentido contrario al de los manecillas del reloj a partir de la parte positiva del eje x.

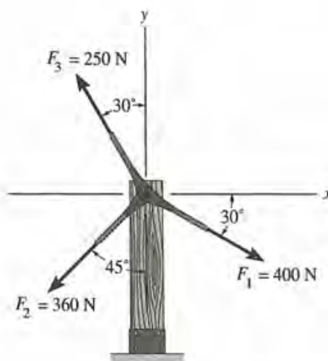
2.2. Determine la magnitud de la fuerza resultante $\overline{\mathbf{F}}_R = \overline{\mathbf{F}}_1 - \overline{\mathbf{F}}_2$ y su orientación θ, medida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje x.



Probs. 2.1/2.2

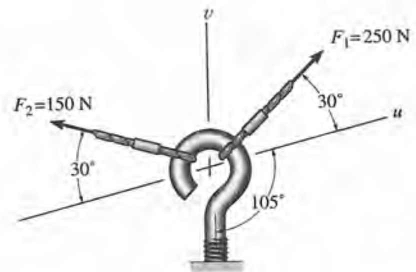
2.3. Determine la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y su orientación θ, medida en el sentido de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje x.

***2.4.** Determine la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R\ F_1 + F_2$ y su orientación θ, medida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje x.



Probs. 2.3/2.4

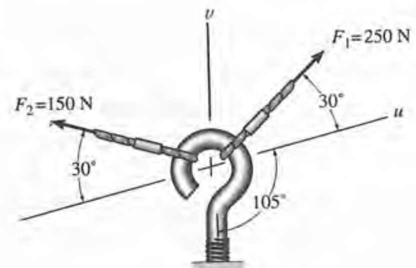
2.5. Determine la magnitud de la fuerza resultante $F_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y su orientación θ, medida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje u.



Prob. 2.5

2.6. Resuelva la fuerza $\mathbf{F}_1$ en componentes que actúan a lo largo de los ejes u y v, y determine las magnitudes de sus componentes.

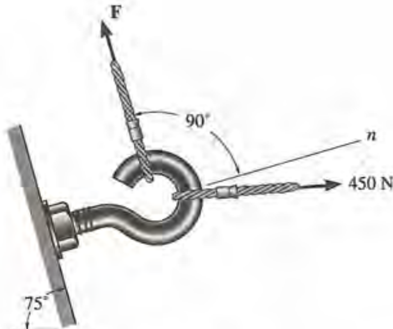
2.7. Resolver la fuerza $\mathbf{F}_2$ en componentes que actúan a lo largo de los ejes u y v, y determine las magnitudes de sus componentes.



Probs. 2.6/2.7

http://librosysolucionarios.net

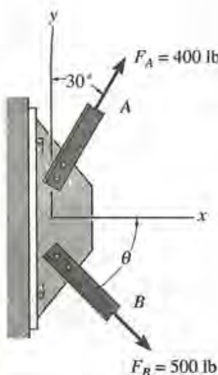
*2.8. Una armella roscada está sujeta a las dos fuerzas que se muestran. **F** se dirige a lo largo del plano inclinado y la fuerza de 450 N es horizontal. Determine la magnitud de **F** de modo que la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ tenga dirección normal al plano, esto es, a lo largo del eje *n*. ¿Qué magnitud tiene $\mathbf{F}_R$?



Probs. 2.8

2.9. Una placa está sujeta a las fuerzas que actúan sobre los elementos *A* y *B*, como se muestra. Si $\theta = 60°$, determine la magnitud de la resultante de estas fuerzas y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj, desde la parte positiva del eje *x*.

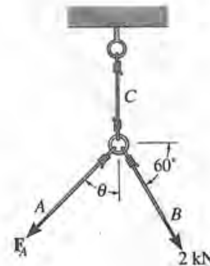
2.10. Determine el ángulo θ en que deba conectarse el elemento *B* a la placa, de modo que el ángulo resultante de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ tenga dirección horizontal hacia la derecha. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante?



Probs. 2.9/2.10

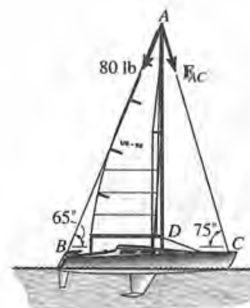
2.11. El cable *B* está sujeto a una fuerza de 2 kN y dirigido a 60° contados desde la horizontal. Determine la fuerza $\mathbf{F_A}$ en el cable *A* cuando $\theta = 45°$ si la fuerza resultante de los dos cables se dirige verticalmente hacia abajo a lo largo del cable *C*. Calcule también la magnitud de la fuerza resultante.

*2.12. El alambre *B* está sujeto a una fuerza de 2 kN y dirigido a 60° desde la horizontal. Si la fuerza resultante de los cables *A* y *B* ha de ser 3 kN, dirigida verticalmente hacia abajo por el cable *C*, determine la fuerza $\mathbf{F}_A$ en el cable *A* y el ángulo correspondiente θ.



Probs. 2.11/2.12

2.13. El mástil de un velero está sujeto a la fuerza de dos cables. Si la fuerza en el cable *AB* es 80 lb, determine la fuerza requerida en el *AC* de modo que la fuerza resultante causada por los dos cables se dirija verticalmente hacia abajo a lo largo del eje *AD* del mástil. Calcule también esta fuerza resultante.

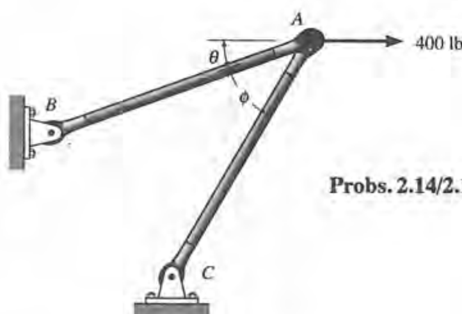


Prob. 2.13

http://librosysolucionarios.net

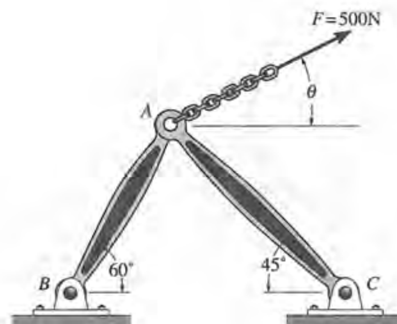
2.14. Determine el ángulo de diseño $\theta (0° \leq \theta \leq 90°)$ para el miembro AB de modo que la fuerza horizontal de 400 lb tenga una componente de 500 lb dirigida de A a C. ¿Cuál es la componente de la fuerza que actúa a lo largo de AB? Considere $\Phi = 40°$.

2.15. Determine el ángulo de diseño $\Phi(0° \leq \Phi \leq 90°)$ entre los miembros AB y AC de manera que la fuerza horizontal de 400 lb tenga una componente de 600 lb que actúa hacia la derecha y arriba con la dirección que va de B a A. También, calcule la magnitud de la componente de fuerza a lo largo de AC. Considere $\theta = 30°$.



Probs. 2.14/2.15

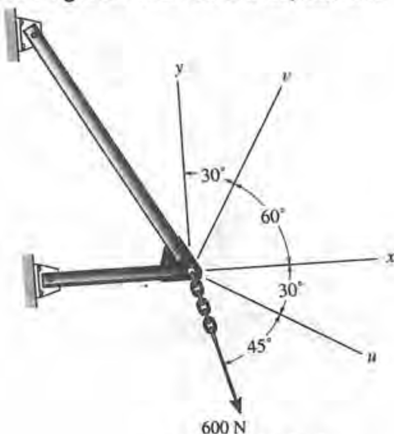
2.18. Determine la orientación θ de la fuerza de 500 N de manera que cuando la fuerza se resuelva en dos componentes que actúan a lo largo de los miembros AB y AC, la componente de la fuerza a lo largo de AC sea de 300 N con dirección de A a C. ¿Cuál es la magnitud de la componente de fuerza que actúa a lo largo de AB?



Prob. 2.18

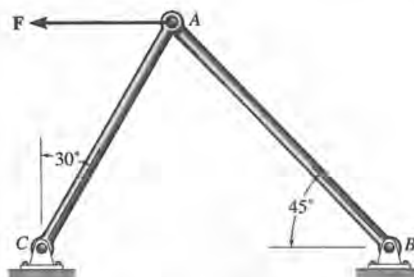
***2.16.** Un cable ejerce una fuerza de 600 N sobre la estructura. Resuelva esta fuerza en componentes que actúan (*a*) a lo largo de los ejes x y y (*b*) a lo largo de los ejes u y v. ¿Qué magnitud tiene cada componente?

2.17. Un cable ejerce una fuerza de 600 N sobre la estructura. Resuelva la fuerza en componentes que actúan a lo largo de (*a*) los ejes x y v y (*b*) los ejes y, u. ¿Qué magnitud tiene cada componente?



Probs. 2.16/2.17

2.19. La fuerza horizontal $F = 500$ N actúa hacia la izquierda en A sobre la estructura de dos miembros. Determine las magnitudes de las dos componentes de **F** dirigidas a lo largo de los ejes de los miembros AB y AC.

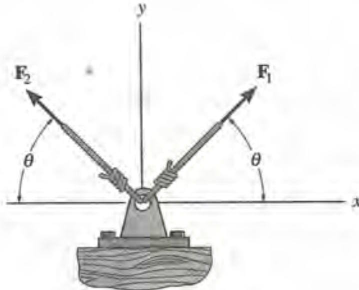


Prob. 2.19

***2.20.** Dos fuerzas tienen la misma magnitud F y producen una fuerza resultante de magnitud F_R cuando el ángulo entre las partes iniciales de las dos fuerzas es 2Φ. Demuestre que la fuerza resultante tiene una magnitud $4F_R$ cuando el ángulo entre las dos fuerzas es 2θ, donde $\theta = \cos^{-1}(4 \cos \Phi)$.

http://librosysolucionarios.net

2.21. Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan sobre una clavija. Si cada fuerza actúa a un ángulo θ con la horizontal y tiene magnitud F, determine la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$. Tabule el valor de $\mathbf{F}_R$ como función de θ.



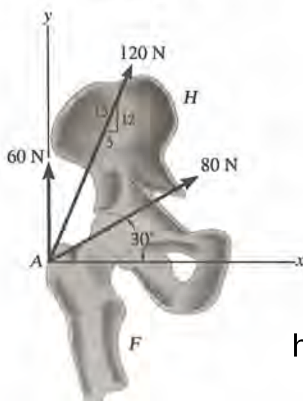
Prob. 2.21

2.22. Dos fuerzas, con magnitudes de 20 y 15 lb, actúan sobre la barra. Si la fuerza resultante tiene magnitud de 30 lb, determine el ángulo θ entre las fuerzas.

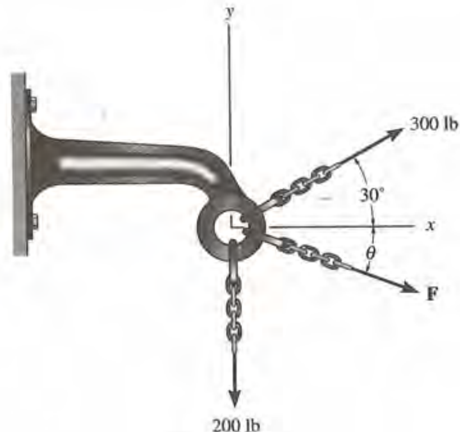


Prob. 2.22

2.23. El hueso de la cadera H (hueso coxal) se conecta con el fémur F en A mediante tres músculos diferentes, que ejercen sobre el fémur las fuerzas que se ven en la figura. Determine la fuerza resultante sobre el fémur y especifique su orientación θ medida en el sentido contrario de las manecillas del reloj a partir de la parte positiva del eje x.



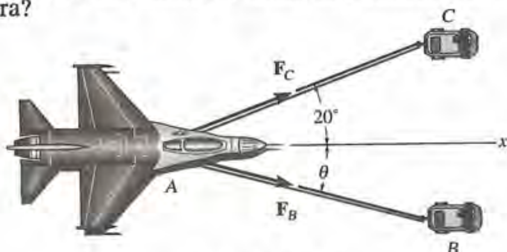
*** 2.24.** Tres cadenas actúan sobre una ménsula y crean una fuerza resultante con magnitud de 500 lb. Si dos de las cadenas están sujetas a fuerzas conocidas, como se muestra, determine la orientación θ de la tercera cadena medida en el sentido de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje x, de modo que la magnitud de la fuerza en esta cadena sea *mínima*. Todas las fuerzas están en el plano x–y. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza **F**? *Sugerencia*: Encuentre primero la resultante de las dos fuerzas conocidas. La fuerza **F** actúa en esta dirección.



Prob. 2.24

2.25. Un avión de retropropulsión es remolcado por dos camiones B y C. Determine las magnitudes de las dos fuerzas de remolque $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$ si la fuerza resultante tiene magnitud de FR = 10 kN y está dirigida a lo largo del eje x. Considere $\theta = 15°$.

2.26. Si la resultante $\mathbf{F}_R$ de las dos fuerzas que actúan sobre el avión debe dirigirse a lo largo del eje x positivo y tener una magnitud de 10 kN, determine el ángulo θ del cable sujeto al camión en B, de modo que la fuerza $\mathbf{F}_B$ en este cable sea un *mínimo*. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza en cada cable cuando esto ocurra?

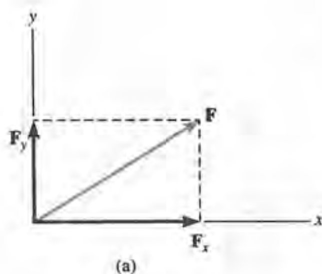


Probs. 2.25/2.26

http://librosysolucionarios.net

2.4 Adición de un sistema de fuerzas coplanares

Cuando deba obtenerse la resultante de más de dos fuerzas es más fácil encontrar las componentes de cada fuerza a lo largo de ejes especificados, sumar algebraicamente estas componentes y, entonces, formar la resultante, en vez de formar la resultante de las fuerzas por aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo como se trató en la sección 2.3. En esta sección resolveremos cada fuerza en sus componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ que se encuentran a lo largo de los ejes *x* y *y* respectivamente, figura 2.14*a*. Aunque los ejes que se muestran aquí son uno vertical y el otro horizontal, en general pueden tener cualquier inclinación siempre y cuando sean mutuamente perpendiculares, figura 2.14*b*. En uno y otro caso se requiere, por la ley del paralelogramo, que:



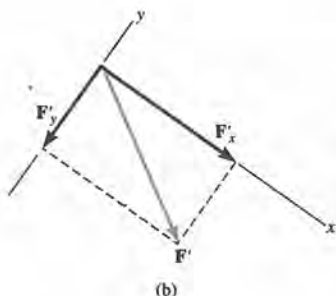
(a)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$$

y

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_x + \mathbf{F}'_y$$

Como se ve en la figura 2.14, el sentido de cada componente se representa de manera *gráfica* por la *punta de la flecha*. Para el trabajo *analítico*, sin embargo, debemos establecer una notación para representar el sentido direccional de las componentes rectangulares de cada vector coplanar. Esto puede hacerse de cualquiera de dos formas.



(b)

Fig. 2.14

Notación escalar. Dado que los ejes *x* y *y* tienen sentido positivo y negativo designados, la magnitud y el sentido de las componentes rectangulares de una fuerza pueden expresarse en términos de *escalares algebraicos*. Por ejemplo, las componentes de **F** en la figura 2.14*a* pueden representarse con escalares positivos F_x y F_y puesto que su sentido direccional es el del eje *x positivo* y del eje *y positivo*, respectivamente. De manera semejante, las componentes de **F′** en la figura 2.14*b* son F_x y $-F_y$. Aquí la componente *y* es negativa puesto que F_y se dirige hacia la parte negativa del eje *y*. Debe recordarse que esta notación escalar se usa solamente para fines de cálculo y no para representaciones gráficas en las figuras. En todo el libro, la *punta de la flecha de un vector* en cualquier figura indica el sentido del vector *gráficamente*; los signos algebraicos no se usan con este propósito. Así, los vectores en las figuras 2.14*a* y 2.14*b* se designan con caracteres en "negritas".* Siempre que se escriban símbolos en *cursiva* cerca de flechas de vectores en las figuras, indicarán la *magnitud* del vector que es *siempre* una cantidad *positiva*.

* Los signos negativos que aparezcan en las figuras donde se usa notación en negritas se usarán exclusivamente en el caso de vectores de la misma magnitud pero de sentidos opuestos como en la figura 2.2.

http://librosysolucionarios.net

Notación vectorial cartesiana. También es posible representar las componentes de una fuerza en términos de los vectores unitarios cartesianos. Haciéndolo así, es más fácil aplicar los métodos del álgebra vectorial y veremos que se obtienen grandes ventajas al resolver problemas en tres dimensiones. En dos dimensiones, los vectores unitarios cartesianos **i** y **j** se usan para designar las direcciones de los ejes x y y, respectivamente, figura 2.15*a*.* Estos vectores tienen una magnitud de uno y su sentido (o punta de la flecha) será descrito analíticamente por un signo más o menos, según apunten a la parte positiva o la negativa de los ejes x o y.

Como se muestra en la figura 2.15*a*, la *magnitud* de cada componente de **F** siempre es una *cantidad positiva* que se representa por los escalares positivos $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$. Por lo tanto, habiendo establecido la notación para representar la magnitud y el sentido de cada componente, podemos expresar **F** en la figura 2.15*a* como un *vector cartesiano*, esto es,

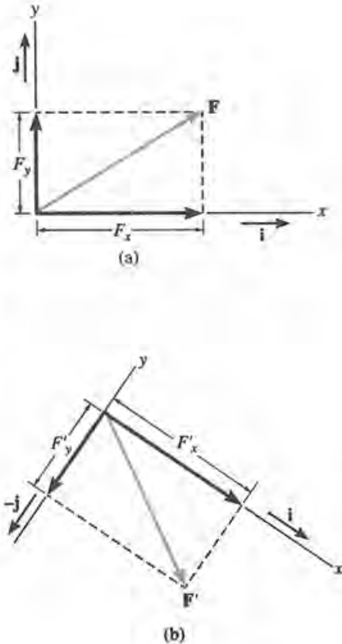


Fig. 2.15

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$

Y de la misma manera, **F'** en la figura 2.15*b* puede expresarse como

$$\mathbf{F}' = F'_x\mathbf{i} + F'_y(-\mathbf{j})$$

o simplemente

$$\mathbf{F}' = F'_x\mathbf{i} - F'_y\mathbf{j}$$

Resultantes de fuerzas coplanares. Cualquiera de los dos métodos recién descritos para representar las componentes rectangulares de una fuerza puede usarse para determinar la resultante de varias *fuerzas coplanares*. Para hacerlo, se resuelve cada fuerza en sus componentes x y, y luego se suman las componentes respectivas usando *álgebra de escalares* puesto que son colineales. La fuerza resultante se forma, entonces, sumando por la ley del paralelogramo, las resultantes a lo largo del eje x y del eje y. Consideremos, por ejemplo, las tres fuerzas de la figura 2.16*a* que tienen componentes x, y como se ve en la figura 2.16*b*. Para resolver este problema usando la *notación vectorial cartesiana*, cada fuerza se representa primero como un vector cartesiano, esto es,

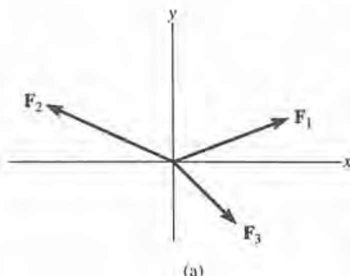
$$\mathbf{F}_1 = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_3 = F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}$$

* En un manuscrito, suelen indicarse los vectores unitarios con un acento circunflejo, como por ejemplo, $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

http://librosysolucionarios.net

La resultante vectorial es, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= F_{1x}\,\mathbf{i} + F_{1y}\,\mathbf{j} - F_{2x}\,\mathbf{i} + F_{2y}\,\mathbf{j} + F_{3x}\,\mathbf{i} - F_{3y}\,\mathbf{j} \\ &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\mathbf{j} \\ &= (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j}\end{aligned}$$



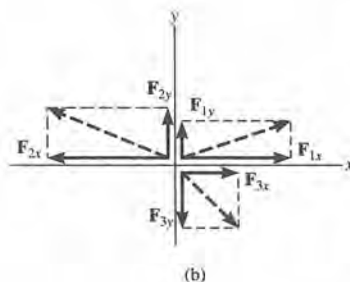
(a)

Si se usa la *notación escalar*, entonces, de la figura 2.16*b*, como x es positiva hacia la derecha y y es positiva hacia arriba, tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$
$$(+\uparrow) \qquad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

Estos resultados son los mismos que las componentes **i** y **j** de $\mathbf{F}_R$ antes determinadas.

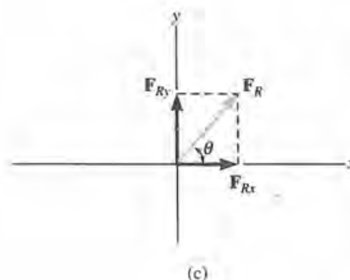
En el caso general, las componentes x y y de la resultante de cualquier número de fuerzas coplanares puede representarse simbólicamente por la suma algebraica de las componentes x, y y de todas las fuerzas , esto es,



(b)

$$F_{Rx} = \Sigma F_x \qquad F_{Ry} = \Sigma F_y \tag{2.1}$$

Al aplicar estas ecuaciones es importante usar el acuerdo sobre los signos establecido para las componentes; es decir, que las componentes que tienen sentido igual al de los ejes positivos de coordenadas se consideran escalares positivos en tanto que si su sentido es el de los ejes negativos se consideran escalares negativos. Respetando este acuerdo los signos de las componentes de la resultante especificarán el sentido de estas componentes. Por ejemplo, un resultado positivo indicará que la componente tiene el sentido direccional de la dirección de coordenadas positivas.



(c)

Una vez que se determinen las componentes de la resultante, se dibujan sobre los ejes x y y en su dirección apropiada y la fuerza resultante se determina por adición vectorial como en la figura 2.16*c*. A partir de este bosquejo, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ se determina con ayuda del teorema de Pitágoras; esto es,

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

También, el ángulo de dirección θ, que especifica la orientación de la fuerza, se determina por trigonometría.

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right|$$

Fig. 2.16

Los conceptos precedentes se ilustran numéricamente a continuación en los ejemplos.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.5

Determine las componentes x y y de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de la figura 2.17*a*. Exprese cada fuerza como un vector cartesiano.

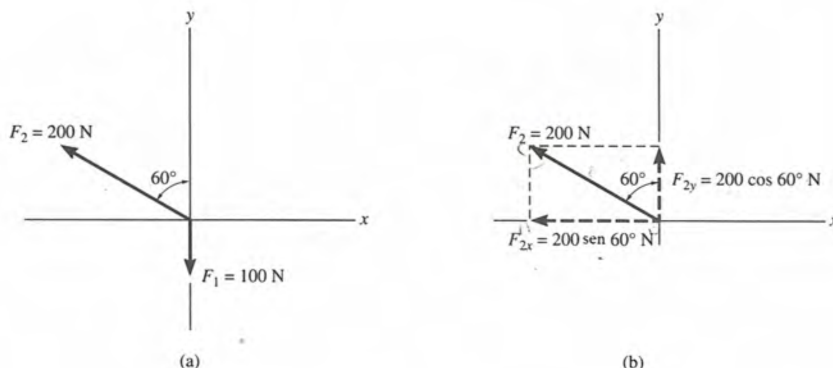


Fig. 2.17

SOLUCIÓN

Notación escalar. Ya que $\mathbf{F}_1$ actúa a lo largo del eje y negativo y la magnitud de $\mathbf{F}_1$ es 100 N, las componentes escritas en forma escalar son

$$F_{1x} = 0, \qquad F_{1y} = -100 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

o, alternativamente,

$$F_{1x} = 0, \qquad F_{1y} = 100 \text{ N} \downarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Por la ley del paralelogramo, $\mathbf{F}_2$ se resuelve en componentes x y y, figura 2.17*b*. La magnitud de cada componente se determina por trigonometría. Ya que $\mathbf{F}_{2x}$ actúa en la dirección $-x$ y $\mathbf{F}_{2y}$ actúa en la dirección $+y$, tenemos,

$$F_{2x} = -200 \text{ sen } 60° \text{ N} = -173 \text{ N} = 173 \text{ N} \leftarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$F_{2y} = 200 \cos 60° \text{ N} = 100 \text{ N} = 100 \text{ N} \uparrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Notación vectorial cartesiana. Habiendo calculado las magnitudes de las componentes de $\mathbf{F}_2$, figura 2.17*b*, podemos expresar cada fuerza como un vector cartesiano.

$$\mathbf{F}_1 = 0\mathbf{i} + 100 \text{ N}(-\mathbf{j})$$
$$= \{-100\mathbf{j}\} \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

y

$$\mathbf{F}_2 = 200 \text{ sen } 60° \text{ N}(-\mathbf{i}) + 200 \cos 60° \text{ N}(\mathbf{j})$$
$$= \{-173\mathbf{i} + 100\mathbf{j}\}\text{N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.6

Determine las componentes x y y de la fuerza **F** de la figura 2.18*a*.

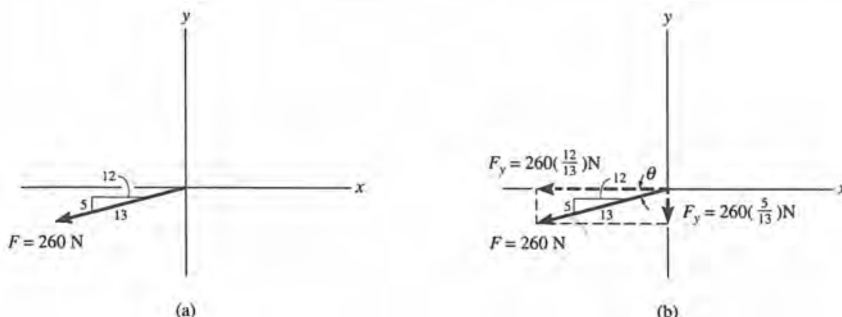


Fig. 2.18

SOLUCIÓN

La fuerza se resuelve en sus componentes x y y como se muestra en la figura 2.18*b*. Aquí se indica la *pendiente* de la línea de acción de la fuerza. A partir de este "triángulo de pendiente" podríamos obtener el ángulo de dirección θ, por ejemplo, $\theta = \tan^{-1}(\frac{5}{12})$, y proceder a obtener las magnitudes de las componentes en la forma que lo hicimos, por ejemplo, para la fuerza $\mathbf{F}_2$ del ejemplo 2.5. Un método más fácil, sin embargo, consiste en usar partes proporcionales de triángulos semejantes , es decir,

$$\frac{F_x}{260} = \frac{12}{13} \qquad F_x = 260\left(\frac{12}{13}\right) = 240 \text{ N}$$

Análogamente,

$$F_y = 260\left(\frac{5}{13}\right) = 100 \text{ N}$$

Nótese que la magnitud de la *componente horizontal*, F_x, se obtuvo multiplicando la magnitud de la fuerza por la razón del *cateto horizontal* a la hipotenusa del triángulo de pendiente; en tanto que la magnitud de la *componente vertical*, F_y, se obtuvo multiplicando la magnitud de la fuerza por la razón del *cateto vertical* a la hipotenusa. Luego, utilizando notación escalar,

$$F_x = -240 \text{ N} = 240 \text{ N} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$
$$F_y = -100 \text{ N} = 100 \text{ N} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

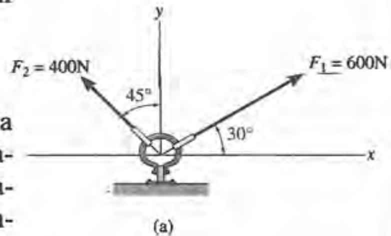
Si se expresa **F** como vector cartesiano

$$\mathbf{F} = \{-240\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\} \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.7

La argolla que se muestra en la figura 2.19*a* está sujeta a dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Determínese la magnitud y la orientación de la fuerza resultante.



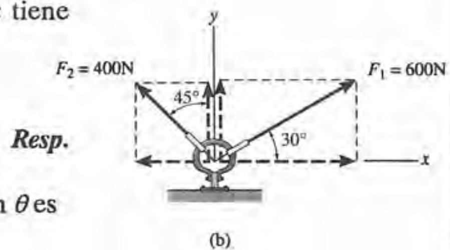
SOLUCIÓN I

Notación escalar. Este problema puede resolverse usando la ley del paralelogramo; sin embargo, vamos aquí a resolver cada fuerza en componentes x y y, figura 2.19*b*, y entonces sumaremos estas componentes algebraicamente. Si se indica el sentido "positivo" de las componentes x y y de fuerza y se usan las ecuaciones 2.1, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} F_{Rx} = \Sigma F_x; \qquad F_{Rx} = 600 \cos 30° - 400 \text{ sen } 45° = 236.8 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow F_{Ry} = \Sigma F_y; \qquad F_{Ry} = 600 \text{ sen } 30° + 400 \cos 45° = 582.8 \text{ N} \uparrow$$

La fuerza resultante que se muestra en la figura 2.19*c* tiene una *magnitud* de



$$F_R = \sqrt{(236.8)^2 + (582.8)^2} = 629\text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

Por adición vectorial, figura 2.19*c*, el ángulo de dirección θ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{582.8}{236.8}\right) = 67.9° \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

Notación vectorial cartesiana. De la figura 2.19*b*, cada fuerza se expresa como vector cartesiano y esto nos da

$$\mathbf{F}_1 = 600 \cos 30°\mathbf{i} + 600 \text{ sen } 30°\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -400 \text{ sen } 45°\mathbf{i} + 400 \cos 45°\mathbf{j}$$

Así

$$\mathbf{F}_R = (600 \cos 30° - 400 \text{ sen } 45°)\mathbf{i} + (600 \text{ sen } 30° + 400 \cos 45°)\mathbf{j} = \{236.8\mathbf{i} + 582.8\mathbf{j}\} \text{ N}$$

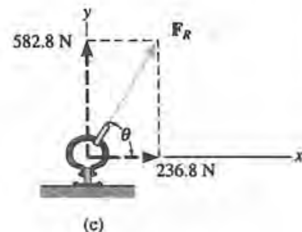


Fig. 2.19

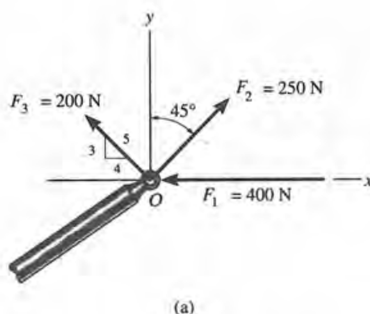
La magnitud y dirección de $\mathbf{F}_R$ se determinan como se mostró antes.

Al comparar los dos métodos de solución, se ve que el uso de la notación escalar es más eficiente porque las componentes escalares se pueden encontrar *directamente* sin tener que empezar expresando cada fuerza como un vector cartesiano antes de sumar las componentes. El análisis vectorial cartesino tiene muchas ventajas, sin embargo, para la solución de problemas en tres dimensiones, como se verá más adelante.

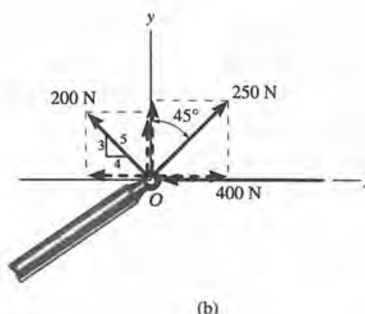
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.8

El extremo O del aguilón de la figura 2.20*a* está sujeto a tres fuerzas concurrentes y coplanares. Determínese la magnitud y orientación de la fuerza resultante.



(a)



(b)

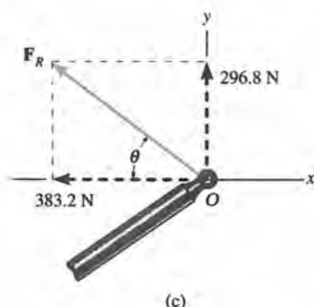
SOLUCIÓN

Cada fuerza se resuelve en sus componentes x y y como se muestra en la figura 2.20*b*. Al sumar las componentes x, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} F_{Rx} = \Sigma F_x; \qquad F_{Ry} = -400 + 250 \text{ sen } 45° - 200\left(\tfrac{4}{5}\right)$$
$$= -383.2 \text{ N} = 383.2 \text{ N} \leftarrow$$

El signo negativo indica que F_{Rx} actúa hacia la izquierda, esto es, en sentido x negativa como indica la flecha pequeña. si se suman las componentes y se tiene

$$+\uparrow F_{Ry} = \Sigma F_y; \qquad F_{Ry} = 250 \cos 45° + 200\left(\tfrac{3}{5}\right)$$
$$= 296.8 \text{ N} \uparrow$$



(c)

Fig. 2.20

La fuerza resultante que se muestra en la figura 2.20*c* tiene una *magnitud* de

$$F_R = \sqrt{(-383.2)^2 + (296.8)^2}$$
$$= 485 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

De la adición vectorial en la figura 2.20*c*, el ángulo de dirección θ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{296.8}{383.2}\right) = 37.8° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

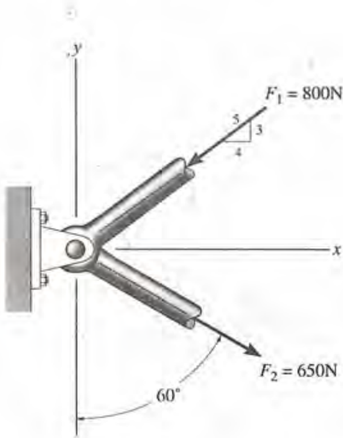
Nos damos cuenta de que la sola fuerza $\mathbf{F}_R$ que se ve en la figura 2.20*c* crea el *mismo efecto* sobre el aguilón que las tres fuerzas en la figura. 2.20*a*.

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

2.27. Exprese $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ como vectores cartesianos.

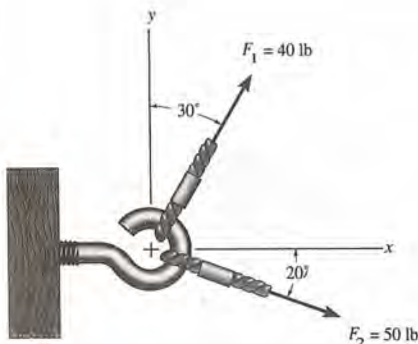
***2.28.** Determine la magnitud de la fuerza resultante y su orientación medida en el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje *x* positivo.



Probs. 2.27/2.28

2.29. Exprese $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ como vectores cartesianos.

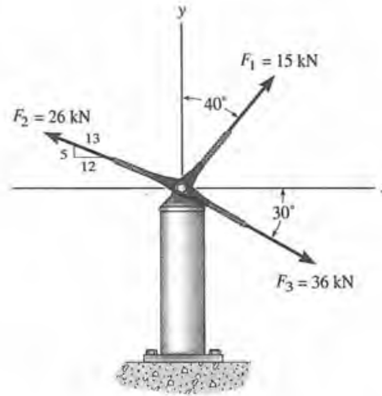
2.30. Determine la magnitud de la fuerza resultante y su orientación medida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje *x* positivo.



Probs. 2.29/2.30

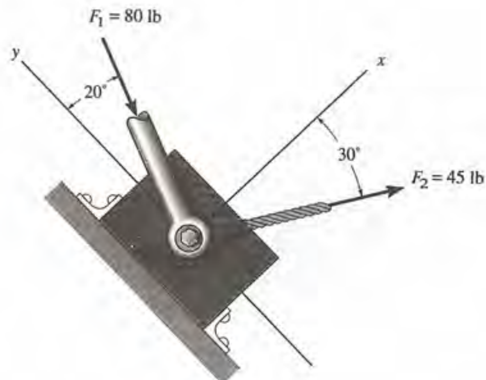
2.31. Exprese $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ como vectores cartesianos.

***2.32.** Determine la magnitud de la fuerza resultante y su orientación medida en el sentido contrario de las menecillas del reloj, desde la parte positiva del eje *x*.



Probs. 2.31/2.32

2.33. Determine las magnitudes de las componentes *x*, y *y* de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.



Prob. 2.33

http://librosysolucionarios.net

2.34. Resuelva el problema 2.3 sumando las componentes x y las componentes y de las fuerzas para obtener la fuerza resultante.

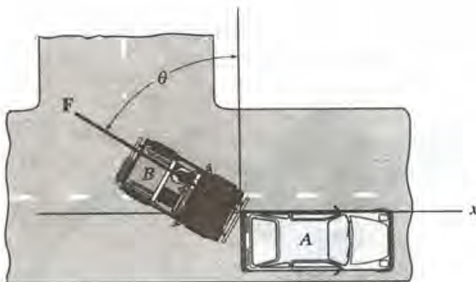
2.35. Resuelva el problema 2.4 sumando las componentes x, y o rectangulares de las fuerzas para obtener la fuerza resultante.

* **2.36.** Resuelva el problema 2.9 sumando las componentes x, y o rectangulares de las fuerzas para obtener la fuerza resultante.

2.37. Resuelva el problema 2.11 sumando las componentes x, y o rectangulares de las fuerzas.

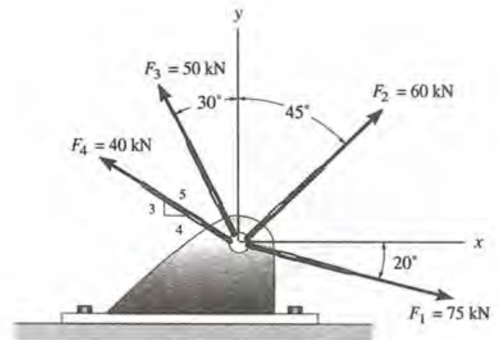
2.38. Resuelva el problema 2.25 sumando las componentes x, y o rectangulares de las fuerzas para obtener la fuerza resultante.

2.39. Se requiere una fuerza de 40 lb para empujar el automóvil A hacia delante. Determine la fuerza F que el jeep B deberá ejercer sobre el automóvil como función del ángulo θ para mantenerlo en movimiento. Grafique el resultado, F como función de θ para $0 \leq \theta \leq 90°$.



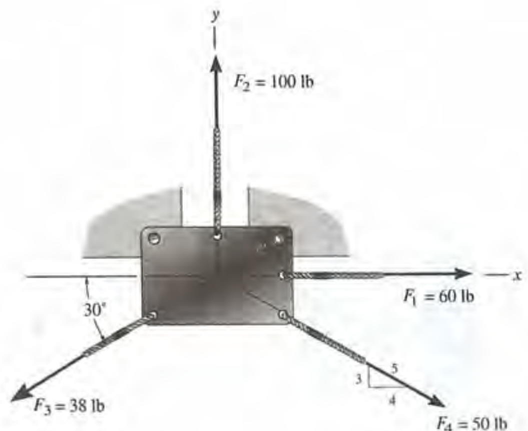
Prob. 2.39

* **2.40.** Exprese cada fuerza que actúa sobre la ménsula en forma vectorial cartesiana. ¿Qué magnitud tiene la fuerza resultante?



Prob. 2.40

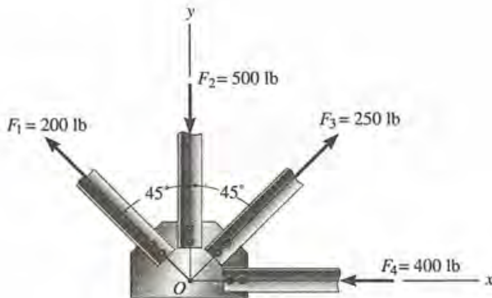
2.41. Cuatro fuerzas concurrentes actúan sobre una placa. Determine la magnitud de la fuerza resultante y su orientación medida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.



Prob. 2.41

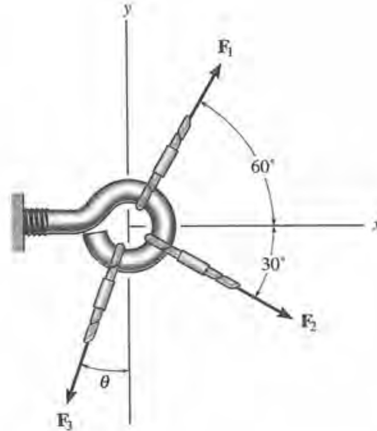
http://librosysolucionarios.net

2.42. Una *placa de unión* está sujeta a cuatro fuerzas que concurren en el punto O. Determine la magnitud de la fuerza resultante y su orientación medida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje x positivo.



Prob. 2.42

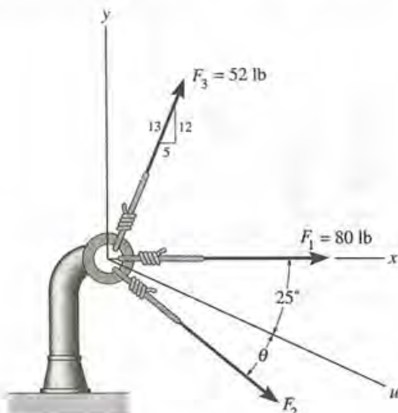
2.45. Las tres fuerzas concurrentes que actúan sobre la armella roscada producen una fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$. Si $F_2 = \frac{2}{3}F_1$ y F_1 debe hacer un ángulo de 90° como se muestra, determine la orientación θ de $\mathbf{F}_3$ y su magnitud expresada en términos de F_1.



Prob. 2.45

2.43. Tres fuerzas actúan sobre una ménsula. Determine la magnitud y orientación θ de $\mathbf{F}_2$, de modo que la fuerza resultante tenga la dirección del eje u positivo y su magnitud sea de 50 lb.

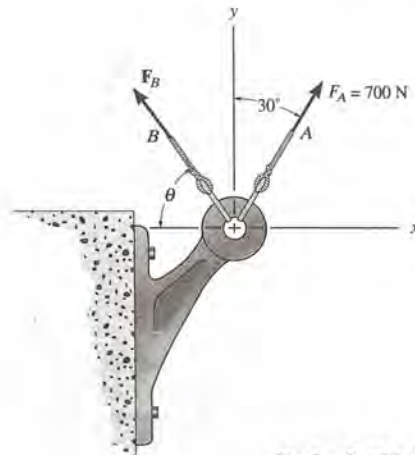
* **2.44.** Si F_2 = 150 lb y θ = 55°, determine la magnitud y orientación, medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje u positivo, de la fuerza resultante de las tres fuerzas que actúan sobre la ménsula.



Probs. 2.43/2.44

2.46. Determine la magnitud y la orientación θ de $\mathbf{F}_B$ de modo que la fuerza resultante vaya dirigida por el eje y positivo y tenga magnitud de 1500 N.

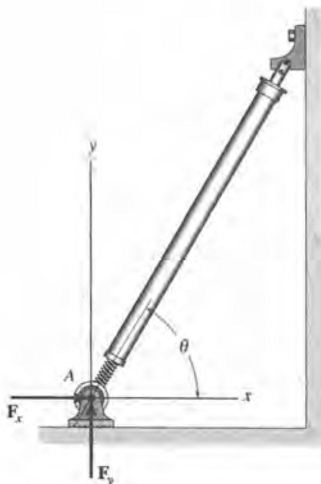
2.47. Determine la magnitud y orientación medida en el sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje y positivo, de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula, si F_B = 600 N y θ = 20°.



Probs. 2.46/2.47

http://librosysolucionarios.net

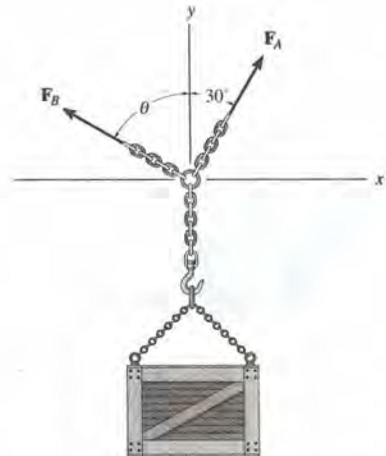
*2.48. El puntal está sosteniendo el muro. Al ocurrir esto, la clavija ejerce una fuerza horizontal F_x y una fuerza vertical F_y en el punto A del puntal. Si la fuerza resultante máxima que puede desarrollarse a lo largo del puntal es 6 kN, y el cociente $F_x/F_y \leq 0.5$, determine el ángulo mínimo θ para colocación del puntal.



Prob. 2.48

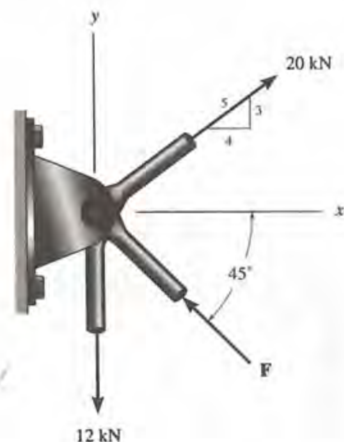
2.49. La caja será elevada por medio de dos cadenas. Determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ que actúan en una y la otra de las cadenas para desarrollar una fuerza resultante de 600 N que actúa a lo largo del eje y positivo. Suponga que $\theta = 45°$.

2.50. La caja se elevará utilizando dos cadenas. Si la fuerza resultante debe ser de 600 N dirigida a lo largo del eje y positivo, determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ que actúan en cada una de las cadenas y el ángulo de orientación θ de $\mathbf{F}_B$, de modo que la magnitud de $\mathbf{F}_B$ sea mínima. $\mathbf{F}_A$ actúa en un ángulo de 30° del eje y, como se muestra.



Probs. 2.49/2.50

2.51. Determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ de modo que la resultante $\mathbf{F}_R$ de las tres fuerzas sea tan pequeña como sea posible.



Prob. 2.51

http://librosysolucionarios.net

2.5 Vectores cartesianos

Las operaciones de álgebra vectorial aplicadas a la solución de problemas en *tres dimensiones* se simplifican mucho si los vectores se expresan primero en forma cartesiana. En esta sección presentamos un método general para hacerlo, y luego, en la sección 2.6 aplicaremos este método para resolver problemas que implican adición de vectores. Posteriormente, se ilustrarán aplicaciones semejantes para los vectores de posición y de momento.

Sistema derecho de coordenadas. En la teoría del álgebra vectorial por desarrollarse se usará un sistema derecho de coordenadas. Un sistema rectangular o cartesiano de coordenadas se dice que es *derecho* siempre y cuando el pulgar de la mano derecha apunte hacia el eje positivo de las z al cerrar la mano alrededor de este eje, girando los dedos de la parte positiva del eje x a la parte positiva del eje y, como en la figura 2.21. Además, según esta regla, el eje z en un problema de dos dimensiones como en la figura 2.20, tendría dirección hacia fuera y perpendicularmente a la página.

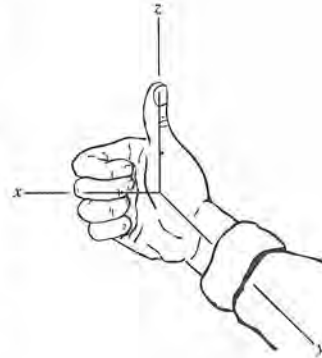


Fig. 2.21

Componentes rectangulares de un vector. Un vector **A** puede tener una, dos o tres componentes rectangulares a lo largo de los ejes x, y, z, según la orientación del vector respecto a estos ejes. Pero, en general, cuando **A** esté dirigido dentro de un octante del marco de referencia x, y, z, figura 2.22, será posible mediante dos aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo, resolver el vector en componentes como $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}_z$ y entonces $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$. Al combinar estas ecuaciones, **A** se representa con la suma vectorial de sus tres componentes rectangulares.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z \quad (2.2)$$

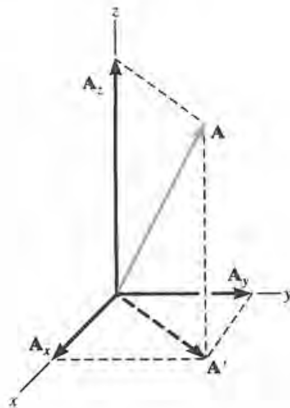


Fig. 2.22

http://librosysolucionarios.net

Vector unitario. En general, un vector unitario es un vector de magnitud 1. Si **A** es un vector con magnitud $A \neq 0$, entonces un vector unitario con la *misma dirección* que **A** se representa por

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \tag{2.3}$$

Si se escribe esta igualdad de nuevo se tiene

$$\mathbf{A} = A\mathbf{u}_A \tag{2.4}$$

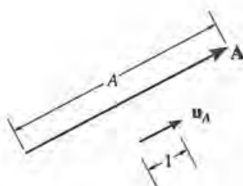


Fig. 2.23

Dado que el vector **A** es de un cierto tipo, por ejemplo un vector de fuerza, se acostumbra usar el conjunto de unidades apropiado para su descripción. La magnitud A tiene estas mismas unidades; por tanto, de la ecuación 2.3 el *vector unitario será adimensional* porque las unidades se cancelan. Por tanto, la ecuación 2.4 indica que el vector **A** puede expresarse en términos de su dirección, sentido y magnitud, por *separado*; esto es, A (escalar positivo) define la magnitud de **A**, y $\mathbf{u}_A$ (un vector sin dimensiones físicas) define la dirección y el sentido de **A**, figura 2.23.

Vectores cartesianos unitarios. En tres dimensiones se usa el conjunto de vectores cartesianos unitarios, **i**, **j**, **k**, para designar las direcciones de los ejes x, y, z, respectivamente. Como se dijo en la sección 2.4, el *sentido* (o la punta de la flecha) de estos vectores se describirá analíticamente con signo más o menos, según apunten a la parte positiva o la parte negativa de los ejes x, y, y z. De acuerdo con esto, la figura 2.24 muestra los vectores unitarios positivos.

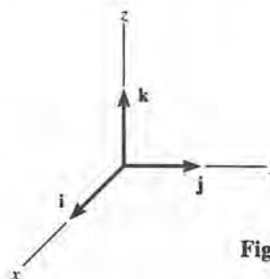


Fig. 2.24

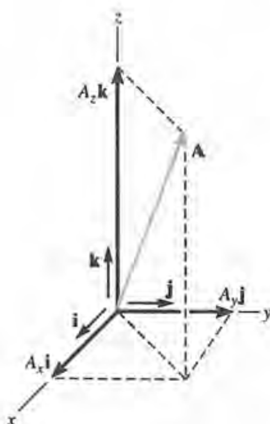


Fig. 2.25

Representación vectorial cartesiana. Si se usa vectores cartesianos unitarios pueden escribirse las tres componentes vectoriales de la ecuación 2.2 en "forma vectorial cartesiana". Dado que las componentes actúan en las direcciones **i**, **j**, y **k**, positivas, figura 2.25, tenemos

http://librosysolucionarios.net

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k} \tag{2.5}$$

Existe una clara ventaja en escribir los vectores en términos de sus componentes cartesianas. Como cada una de estas componentes tiene la misma forma que la ecuación 2.4, la *magnitud*, la *dirección* y el *sentido* de cada *vector componente* están *separadas* y se verá que ello simplificará las operaciones del álgebra vectorial particularmente en tres dimensiones.

Magnitud de un vector cartesiano. Si un vector está expresado en forma cartesiana siempre es posible obtener la magnitud del vector **A**. Como se muestra en la figura 2.26, a partir del triángulo rectángulo sombreado de mayor tamaño, $A = \sqrt{A'^2 + A_z^2}$ y del triángulo más pequeño y sombreado también $A' = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. Si se combinan estas ecuaciones se obtiene

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{2.6}$$

Por tanto, la magnitud de **A** *es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las componentes.*

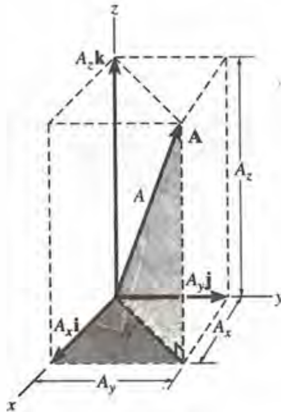


Fig. 2.26

Dirección de un vector cartesiano. La *orientación* del vector **A** se define por los *ángulos directores coordenados* α (alfa), β (beta), y γ (gamma), medidos entre el *segmento inicial* de **A** y los

http://librosysolucionarios.net

ejes *positivos* x, y y z que parten del punto inicial de **A**, figura 2.27. Observamos que sin importar la dirección de **A**, estos ángulos miden entre 0° y 180°. Para determinar α, β y γ, consideremos la proyección de **A** sobre los ejes x, y y z, figura 2.28. Con respecto a los triángulos sombreados de la figura, tenemos

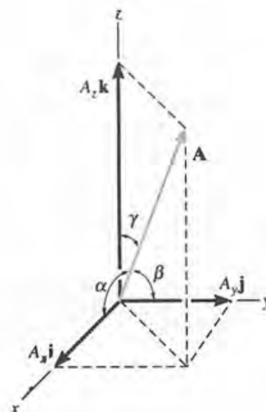


Fig. 2.27

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{2.7}$$

Estos números se conocen como los *cosenos directores* de **A**. Una vez obtenidos, se obtendrán los ángulos directores coordenados α, β, γ por medio de la función coseno inverso.

Una manera simple de obtener los cosenos directores de **A** consiste en formar el vector unitario de dirección igual a la de **A**, ecuación. 2.3. Si **A** se tiene expresado en forma vectorial cartesiana $\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$ (Ec. 2.5), tenemos

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k} \tag{2.8}$$

http://librosysolucionarios.net

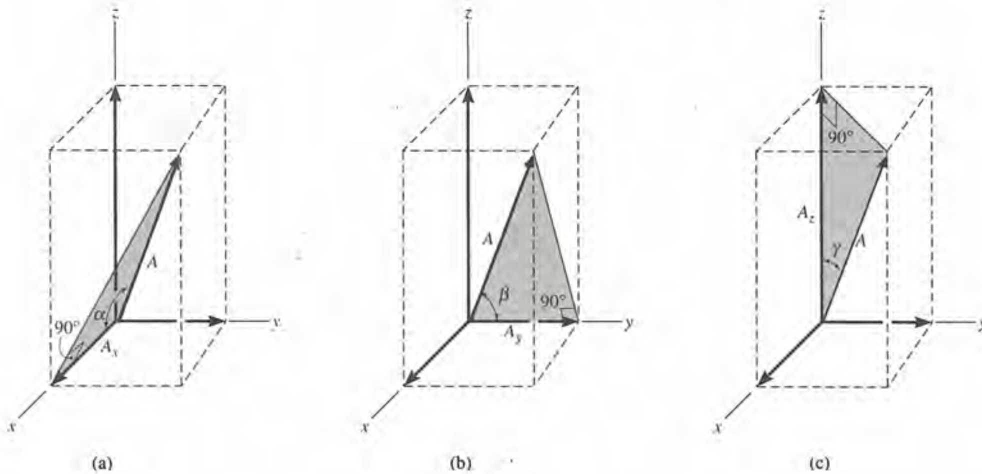


Fig. 2.28

donde $\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$ (Ec. 2.6). Al comparar con las ecuaciones 2.7, se ve que *las componentes* **i**, **j** y **k** *de* $\mathbf{u}_A$ *representan los cosenos directores de* **A**, es decir,

$$\mathbf{u}_A = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k} \tag{2.9}$$

Puesto que la magnitud de un vector es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las magnitudes de sus componentes, y $\mathbf{u}_A$ tiene magnitud de 1, entonces de la ecuación 2.9 podemos formular una relación importante entre los cosenos directores, a saber,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{2.10}$$

Si el vector **A** está en algún octante conocido, esta ecuación permite determinar uno de los ángulos directores coordenados sabiendo el valor de los otros dos. (Véase el ejemplo 2.10.)

Finalmente, si se tienen la magnitud de **A** y sus ángulos directores coordenados, **A** puede expresarse en forma vectorial cartesiana como

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A\mathbf{u}_A \\ &= A\cos\alpha\,\mathbf{i} + A\cos\beta\,\mathbf{j} + A\cos\gamma\,\mathbf{k} \\ &= A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}\end{aligned} \tag{2.11}$$

http://librosysolucionarios.net

2.6 Adición y sustracción de vectores cartesianos

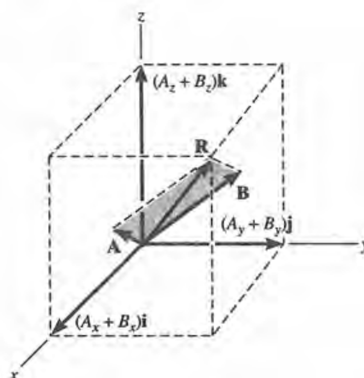


Fig. 2.29

Si expresamos dos o más vectores en términos de sus componentes cartesianas se verán muy simplificadas las operaciones de suma y adición de los mismos. Por ejemplo, consideremos los dos vectores **A** y **B** dirigidos en el octante positivo x, y, z, *positivo en la* figura 2.29. Si $\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k}$, entonces el vector resultante **R**, tiene componentes que representan las sumas escalares de las componentes **i, j** y **k** de **A** y **B** , es decir,

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

La sustracción de vectores, siendo un caso particular de la adición, no requiere más que una sustracción escalar de las componentes **i, j, k**, respectivas de **A** o **B**. Por ejemplo,

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j} + (A_z - B_z)\mathbf{k}$$

Sistemas de fuerzas concurrentes. En particular, el concepto precedente de adición vectorial puede generalizarse y aplicarse a un sistema de varias fuerzas concurrentes. En este caso, la fuerza resultante es el vector suma de todas las fuerzas en el sistema y se puede escribir como

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} \tag{2.12}$$

Aquí, ΣF_x, ΣF_y y ΣF_z representan las sumas algebraicas de las componentes x, y, z, o las componentes **i, j, k**, respectivas de cada fuerza del sistema.

Los ejemplos siguientes ilustran numéricamente los métodos que se usan para aplicar la teoría anterior a la solución de problemas que implican la fuerza como cantidad vectorial.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.9

Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante que actúa sobre el anillo de la figura 2.30*a*.

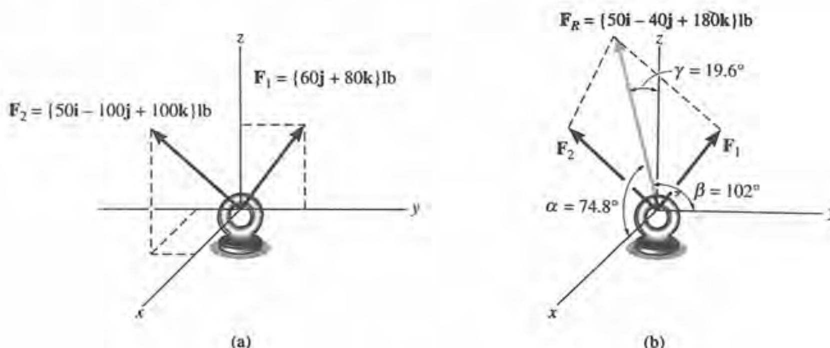


Fig. 2.30

SOLUCIÓN

Dado que cada fuerza está representada en forma vectorial cartesiana, la fuerza resultante , que se muestra en la figura 2.30*b*, es

$$F_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (60\mathbf{j} + 80\mathbf{k}) + (50\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k})$$
$$= \{50\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 180\mathbf{k}\}\text{lb}$$

La magnitud de $\mathbf{F}_R$ se encuentra a partir de la ecuación. 2.6, esto es,

$$F_R = \sqrt{(50)^2 + (-40)^2 + (180)^2}$$
$$= 191.0 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Los ángulos directores coordenados α, β, γ se determinan de las componentes del vector unitario que actúa en la dirección de $\mathbf{F}_R$.

$$\mathbf{u}_{F_R} = \frac{\mathbf{F}_R}{F_R} = \frac{50}{191.0}\mathbf{i} - \frac{40}{191.0}\mathbf{j} + \frac{180}{191.0}\mathbf{k}$$
$$= 0.2617\mathbf{i} - 0.2094\mathbf{j} + 0.9422\mathbf{k}$$

de manera que

$$\cos\alpha = 0.2617 \qquad \alpha = 74.8° \qquad \textit{Resp.}$$
$$\cos\beta = -0.2094 \qquad \beta = 102° \qquad \textit{Resp.}$$
$$\cos\gamma = 0.9422 \qquad \gamma = 19.6° \qquad \textit{Resp.}$$

Estos ángulos se aprecian en la figura 2.30*b*. En particular, debe observarse que $\beta > 90°$ puesto que la $\mathbf{j}$ componente de $\mathbf{u}_{F_R}$ es negativa.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.10

Exprese la fuerza **F** que se muestra en la figura 2.31 como un vector cartesiano.

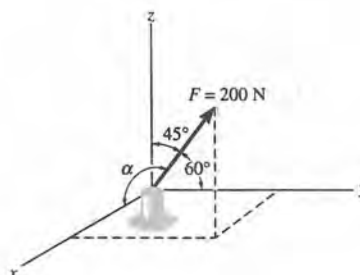


Fig. 2.31

SOLUCIÓN

Puesto que sólo se especifican dos ángulos directores coordenados, el tercero, α, se determina con la ecuación 2.10; esto es,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 60° + \cos^2 45° = 1$$
$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (0.707)^2 - (0.5)^2} = \pm 0.5$$

Por tanto,

$$\alpha = \cos^{-1}(0.5) = 60° \qquad \text{o} \qquad \alpha = \cos^{-1}(-0.5) = 120°$$

Si se examina la figura 2.31, sin embargo, se tiene por necesidad que $\alpha = 60°$, ya que $\mathbf{F}_x$ está en la dirección $+x$.

Si se usa la ecuación 2.11, con $F = 200$ N, tenemos

$$\mathbf{F} = F\cos\alpha\,\mathbf{i} + F\cos\beta\,\mathbf{j} + F\cos\gamma\,\mathbf{k}$$
$$= 200\cos 60°\mathbf{i} + 200\cos 60°\,\mathbf{j} + 200\cos 45°\mathbf{k}$$
$$= \{100.0\mathbf{i} + 100.0\mathbf{j} + 141.4\mathbf{k}\}\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Al aplicar la ecuación 2.6 se comprueba que efectivamente $F = 200$ N.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$= \sqrt{(100.0)^2 + (100.0)^2 + (141.4)^2} = 200\text{ N}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.11

Exprese la fuerza **F** que actúa sobre el gancho de la figura 2.32*a* como vector cartesiano.

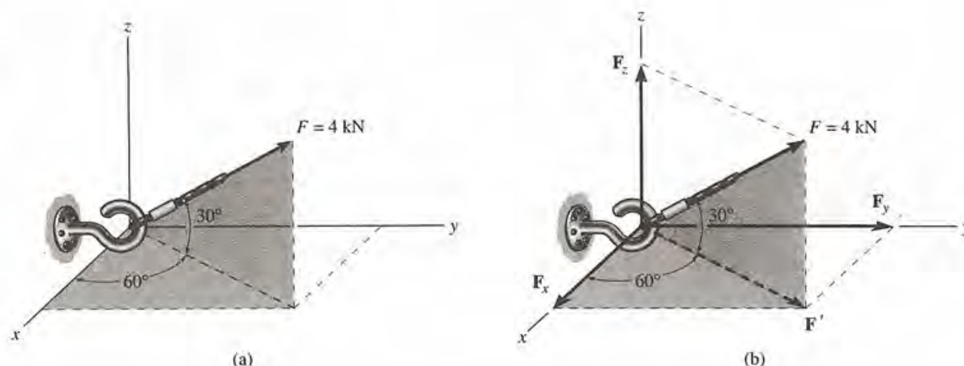


Fig. 2.32

SOLUCIÓN

En este caso, los ángulos de 60° y 30° que definen la dirección de **F** *no* son ángulos directores coordenados. ¿Porqué? Mediante dos aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo, sin embargo, **F** puede resolverse en sus componentes *x*, *y* y *z* como en la figura 2.32*b*. Primero, del triángulo que aparece con menor intensidad en el sombreado.

$$F' = 4 \cos 30° = 3.46 \text{ kN}$$
$$F_z = 4 \text{ sen } 30° = 2.00 \text{ kN}$$

Después , usando **F′** y el triángulo más sombreado,

$$F_x = 3.46 \cos 60° = 1.73 \text{ kN}$$
$$F_y = 3.46 \text{ sen } 60° = 3.00 \text{ kN}$$

Por tanto,

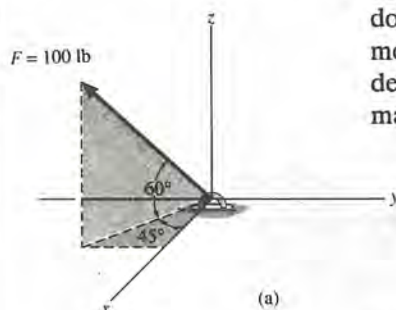
$$\mathbf{F} = \{1.73\mathbf{i} + 3.00\mathbf{j} + 2.00\mathbf{k}\} \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Como ejercicio, demuestre que la magnitud de **F** es de hecho 4 kN y que el ángulo direccional coordenado $\alpha = 64.3°$.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.12

Exprese la fuerza **F** que se ve en la figura 2.33*a* como vector cartesiano.



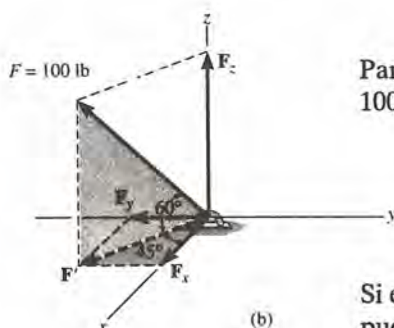
SOLUCIÓN

Como en el ejemplo 2.11, los ángulos de 60° y 45° que definen la dirección de **F** *no* son ángulos directores coordenados. Las dos aplicaciones sucesivas de la regla del paralelogramo requeridas para resolver **F** en las componentes *x*, *y*, *z*, pueden apreciarse en la figura 2.33*b*. Trigonométricamente, las magnitudes de las componentes son

$$F_z = 100 \text{ sen } 60° = 86.6 \text{ lb}$$
$$F' = 100 \cos 60° = 50 \text{ lb}$$
$$F_x = 50 \cos 45° = 35.4 \text{ lb}$$
$$F_y = 50 \text{ sen } 45° = 35.4 \text{ lb}$$

Al constatar que $\mathbf{F}_y$ tiene el sentido definido por $-\mathbf{j}$, se tiene

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$$
$$\mathbf{F} = \{35.4\mathbf{i} - 35.4\mathbf{j} + 86.6\mathbf{k}\} \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$



Para demostrar que la magnitud de este vector es en efecto 100 lb, apliquemos la ecuación 2.6,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$= \sqrt{(35.4)^2 + (-35.4)^2 + (86.6)^2} = 100 \text{ lb}$$

Si es necesario, los ángulos direccionales coordenados de **F** se pueden determinar a partir de las componentes del vector unitario que actúa en el sentido de **F**. Por tanto,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{F_x}{F}\mathbf{i} + \frac{F_y}{F}\mathbf{j} + \frac{F_z}{F}\mathbf{k}$$
$$= \frac{35.4}{100}\mathbf{i} - \frac{35.4}{100}\mathbf{j} + \frac{86.6}{100}\mathbf{k}$$
$$= 0.354\mathbf{i} - 0.354\mathbf{j} + 0.866\mathbf{k}$$

de manera que

$$\alpha = \cos^{-1}(0.345) = 69.3°$$
$$\beta = \cos^{-1}(-0.354) = 111°$$
$$\gamma = \cos^{-1}(0.866) = 30.0°$$

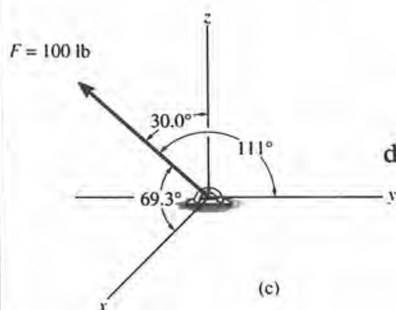


Fig. 2.33

Estos resultados se muestran en la figura 2.33*c*

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.13

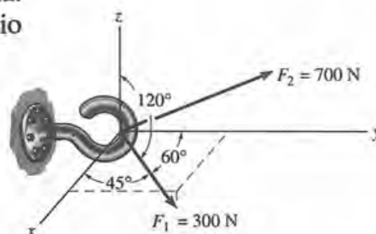
Dos fuerzas actúan sobre el gancho de la figura 2.34*a*. Especifique los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_2$ de modo que la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ actúe a lo largo del eje *y* positivo y tenga la magnitud 800 N.

SOLUCIÓN

Para resolver este problema, la fuerza resultante y sus dos componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ serán expresadas en forma cartesiana. Entonces, como se muestra en la figura 2.34*b*, es necesario que $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

Si se aplica la ecuación 2.11,

$$\mathbf{F}_1 = F_1\mathbf{u}_{F_1} = F_1 \cos \alpha_1\, \mathbf{i} + F_1 \cos \beta_1 \mathbf{j} + F_1 \cos \gamma_1 \mathbf{k}$$
$$= 300 \cos 45°\mathbf{i} + 300 \cos 60°\mathbf{j} + 300 \cos 120°\mathbf{k}$$
$$= \{212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k}\} \text{ N}$$
$$\mathbf{F}_2 = F_2\mathbf{u}_{F_2} = F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k}$$



(a)

De acuerdo con el enunciado del problema, la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ tiene 800 N de magnitud y actúa en el sentido del vector $+\mathbf{j}$. Por tanto,

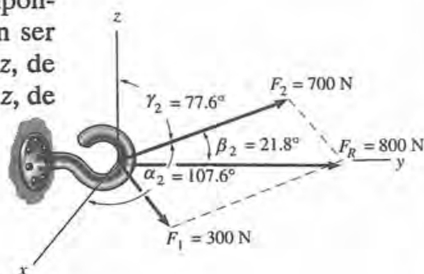
$$\mathbf{F}_R = (800 \text{ N})(+\mathbf{j}) = \{800\mathbf{j}\} \text{ N}$$

Requerimos

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$
$$800\mathbf{j} = 212.1\mathbf{i} + 150\hat{\mathbf{j}} - 150\mathbf{k} + F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k}$$
$$800\mathbf{j} = (212.1 + F_{2x})\mathbf{i} + (150 + F_{2y})\mathbf{j} + (-150 + F_{2z})\mathbf{k}$$

Para satisfacer esta ecuación, las componentes corresponpondientes **i, j,** y **k** de los lados izquierdo y derecho deben ser iguales. Esto equivale a decir que las componentes *x, y, z,* de $\mathbf{F}_R$ sean iguales a las componentes correspondientes *x, y, z,* de $(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$. Por tanto,

$$0 = 212.1 + F_{2_x} \qquad F_{2x} = -212.1 \text{ N}$$
$$800 = 150 + F_{2_y} \qquad F_{2y} = 650 \text{ N}$$
$$0 = -150 + F_{2_z} \qquad F_{2z} = 150 \text{ N}$$



(b)

Puesto que se conocen las magnitudes de $\mathbf{F}_2$ y sus componentes, podemos usar la ecuación 2.11 para determinar α, β, γ.

$$-212.1 = 700\cos \alpha_2; \qquad \alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{-212.1}{700}\right) = 108° \qquad \textit{Resp.}$$

$$650 = 700 \cos \beta_2; \qquad \beta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{650}{700}\right) = 21.8° \qquad \textit{Resp.}$$

$$150 = 700 \cos \gamma_2; \qquad \gamma_2 = \cos^{-1}\left(\frac{150}{700}\right) = 77.6° \qquad \textit{Resp.}$$

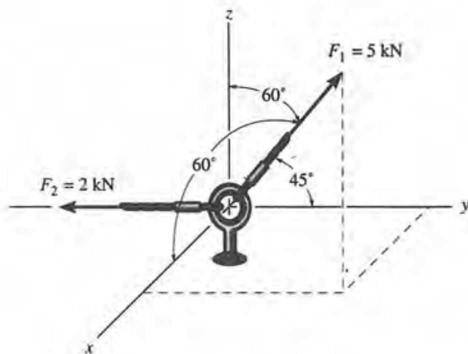
Fig. 2.34

Estos resultados se muestran en la figura 2.34*b*.

http://librosysolucionarios.net

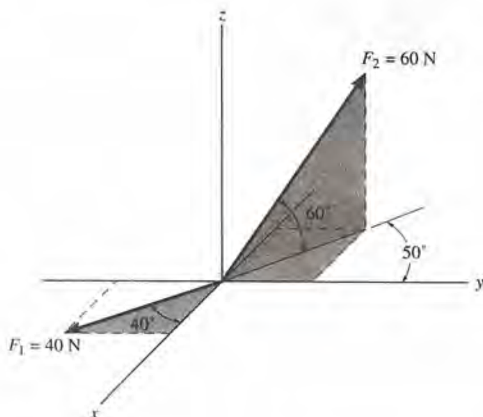
PROBLEMAS

*2.52. Exprese cada fuerza como vector cartesiano y entonces determine la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$. Encuentre la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante y dibuje el vector en el sistema de coordenadas.



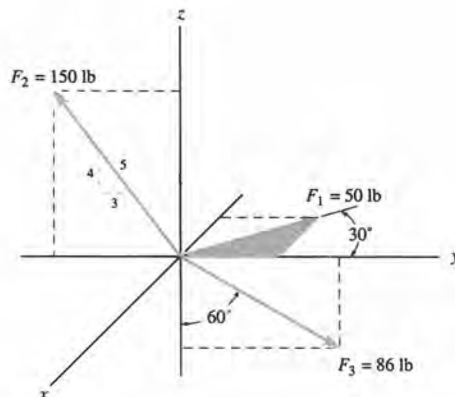
Prob. 2.52

2.53. Determine cada fuerza como un vector cartesiano y entonces determine la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$. Encuentre la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante y dibuje el vector en el sistema de coordenadas.



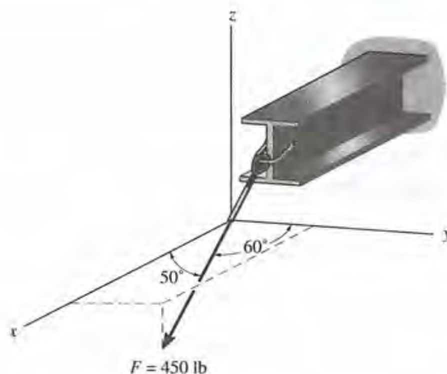
Prob. 2.53

2.54. Exprese cada vector como vector cartesiano y entonces determine la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$. Encuentre la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante y dibuje el vector en el sistema de coordenadas.



Prob. 2.54

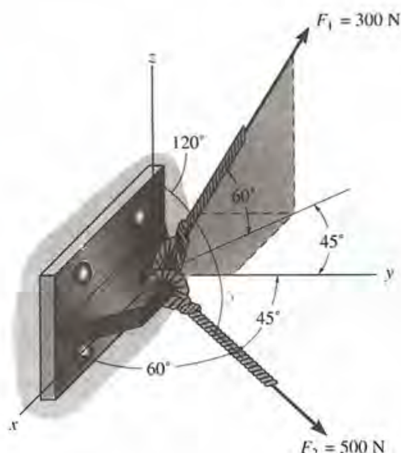
2.55. El cable al final de la viga ejerce una fuerza de 450 lb, como se muestra. Exprese **F** como vector cartesiano.



Prob. 2.55

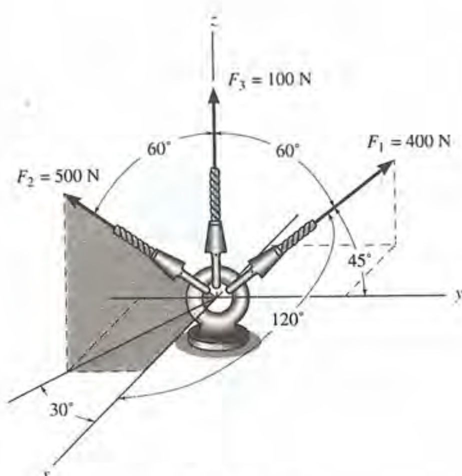
http://librosysolucionarios.net

*2.56. La ménsula está sujeta a las dos fuerzas que se muestran. Exprese cada fuerza en forma vectorial cartesiana y entonces determine la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$. Encuentre la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.



Prob. 2.56

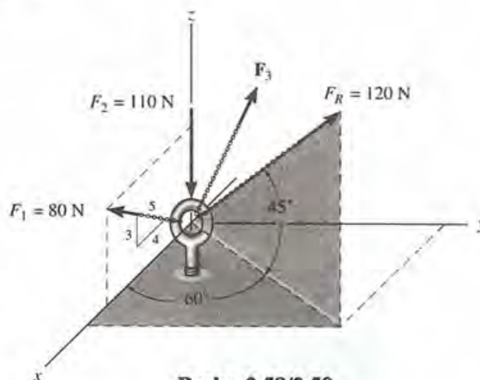
2.57. Se ejercen tres fuerzas sobre el anillo. Determine la magnitud y ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.



Prob. 2.57

2.58. Tres fuerzas actúan sobre la armella roscada. Si la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ tiene magnitud y orientación como se muestra, determine la magnitud y ángulos directores coordenados de la fuerza $\mathbf{F}_3$.

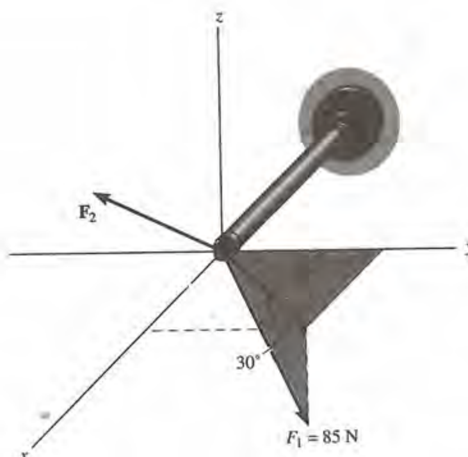
2.59. Determine los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_R$.



Probs. 2.58/2.59

*2.60. Las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan en el extremo del tubo tienen una fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \{120\mathbf{i}\}$ N. Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_2$.

2.61. Determine los ángulos directores coordenados de la fuerza $\mathbf{F}_1$ e indíquelos en la figura.

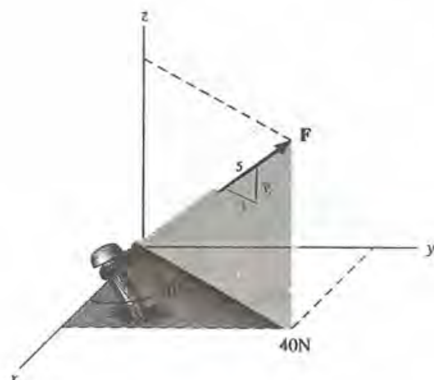


Probs. 2.60/2.61

http://librosysolucionarios.net

2.62. La fuerza **F** que actúa sobre la estaca tiene una componente de 40 N en el plano $x-y$ como se muestra. Exprese **F** como vector cartesiano.

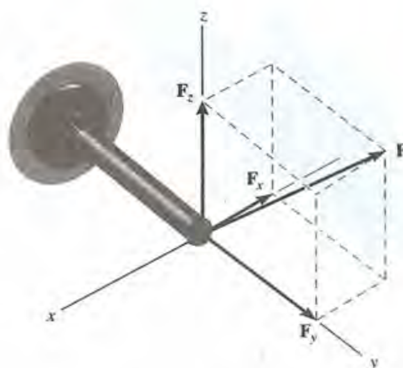
2.63. Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza **F** que actúa sobre la estaca.



Probs. 2.62/2.63

2.66. Un tubo se encuentra sujeto a la fuerza **F** con sus componentes que actúan sobre los ejes x, y, z, como se muestra. Si la magnitud de **F** es 12 kN, $\alpha = 120°$ y $\gamma = 45°$, determine las magnitudes de sus tres componentes.

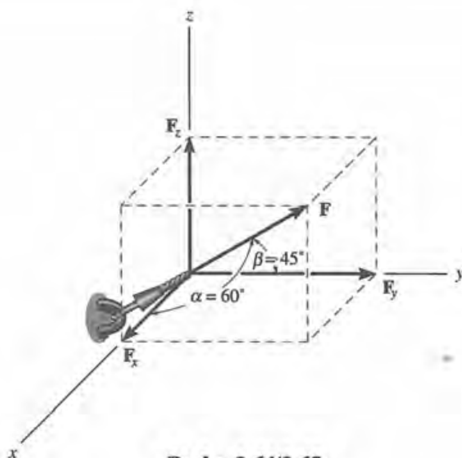
2.67. Sobre el tubo se ejerce la fuerza **F** de componentes $\mathbf{F}_x = 1.5$ kN, y $\mathbf{F}_z = 1.25$ kN. Si $\beta = 75°$ determine la magnitud de **F** y de $\mathbf{F}_y$.



Probs. 2.66/2.67

* 2.64. La fuerza **F** tiene una magnitud de 80 lb y actúa en el octante que se muestra, tal que $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$. Exprese **F** como vector cartesiano.

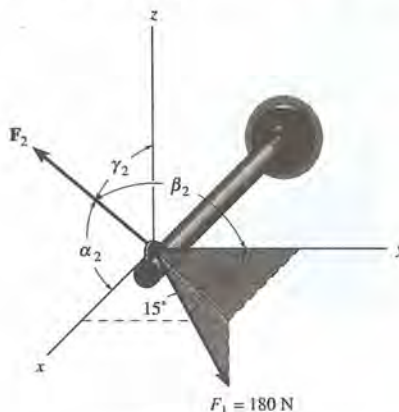
2.65. Si $F_x = 200$ lb, exprese **F** como vector cartesiano.



Probs. 2.64/2.65

* **2.68.** Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_2$, de manera que la resultante de las dos fuerzas actúe a lo largo del eje x positivo con magnitud de 350 N.

2.69. Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_2$, de manera que la resultante de las dos fuerzas sea cero.



Probs. 2.68/2.69

http://librosysolucionarios.net

2.7 Vectores de posición

En esta sección presentaremos el concepto de un vector de posición. En la sección 2.8 se verá que este vector tiene importancia en la formulación de un vector de fuerza cartesiano dirigido entre dos puntos cualesquiera del espacio y, después en el capítulo 4, lo usaremos para encontrar el momento de una fuerza.

Coordenadas x, y, z. En todo el texto usaremos un sistema *derecho* de coordenadas para dar la referencia de localización de los puntos en el espacio. Además, convengamos, como en muchos otros libros técnicos, en que el eje z tiene dirección directamente hacia arriba (la dirección del cenit), de manera que mide la altura de un objeto o la altitud de un punto. Siendo así, los ejes x, y estarán en el plano horizontal, figura 2.35. Los puntos del espacio se localizan con respecto al origen de coordenadas O, mediante sucesivas mediciones a lo largo de los ejes x, y, y z. Por ejemplo en la figura 2.35, las coordenadas del punto A se obtienen empezando en O y midiendo $x_A = +4$ m a lo largo del eje x, $y_A = +2$ m a lo largo del eje y , y $z_A = -6$ m a lo largo del eje z. Así $A(4, 2, -6)$. De manera semejante, midiendo a lo largo de los ejes x, y, z, de O hasta B se obtienen las coordenadas de B, esto es, $B(0, 2, 0)$. También tenemos $C(6, -1, 4)$.

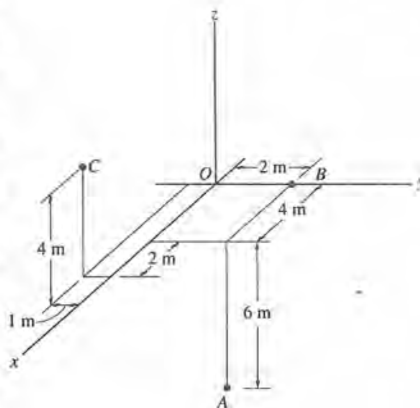


Fig. 2.35

Vector de posición. El *vector de posición* **r** se define como un vector fijo que localiza un punto en el espacio con respecto a otro punto. Por ejemplo, si **r** se extiende del origen de coordenadas, O, al punto $P(x, y, z)$, figura 2.36*a*, entonces **r** se puede expresar en forma vectorial cartesiana como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

En particular, nótese cómo la adición vectorial por "punta de la flecha a punto inicial" de las tres componentes da el vector **r**, figura 2.36*b*. Empezando en el origen, O, se desplaza uno en la dirección $+\mathbf{i}$ una distancia x, luego y en la dirección $+\mathbf{j}$ y, finalmente, una distancia z en la dirección $+\mathbf{k}$ para llegar al punto $p(x, y, z)$.

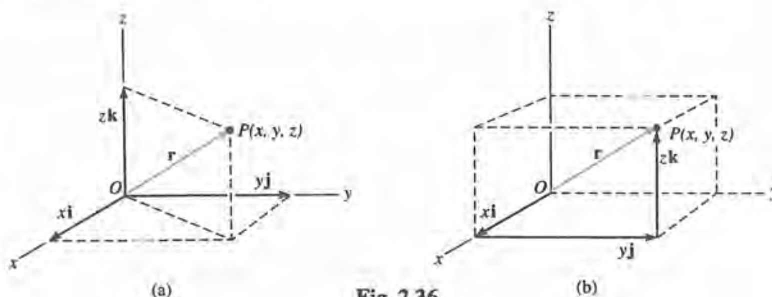


Fig. 2.36

http://librosysolucionarios.net

En el caso más general, el vector de posición puede dirigirse dèl punto A al punto B en el espacio, figura 2.37*a*. Como se hizo notar, este vector también se designa con el símbolo **r**. Convengamos, sin embargo, que *a veces* escribiremos este vector con *dos subíndices* para indicar su punto inicial y su punto final, de modo que **r** también se puede escribir $\mathbf{r}_{AB}$. También debe observarse que $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ en la figura 2.37*a* tiene sólo un subíndice porque su punto inicial es el origen de coordenadas.

De la figura 2.37*a*, a causa de la adición por punta de la flecha a punto inicial, es necesario que

$$\mathbf{r}_A + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B$$

si se resuelve en **r** y se expresa $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ en forma cartesiana dará

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j} + z_B\mathbf{k}) - (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k})$$

o

$$\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k} \qquad (2.13)$$

De modo que las componentes **i**, **j**, **k** *del vector de posición* **r** *pueden formarse tomando las coordenadas del punto inicial del vector,* $A(x_A, y_A, z_A)$, *para restarlas de las coordenadas del extremo final del vector,* $B(x_B, y_B, z_B)$. Nuevamente debe notarse cómo la suma de punta de la flecha a punto inicial de la flecha de estas tres componentes da **r**, esto es, yendo de A a B, figura 2.37*b*, primero se avanza $(x_B - x_A)$ en la dirección $+\mathbf{i}$ y después $(y_B - y_A)$ en la dirección $+\mathbf{j}$, y finalmente $(z_B - z_A)$ en la dirección $+\mathbf{k}$.

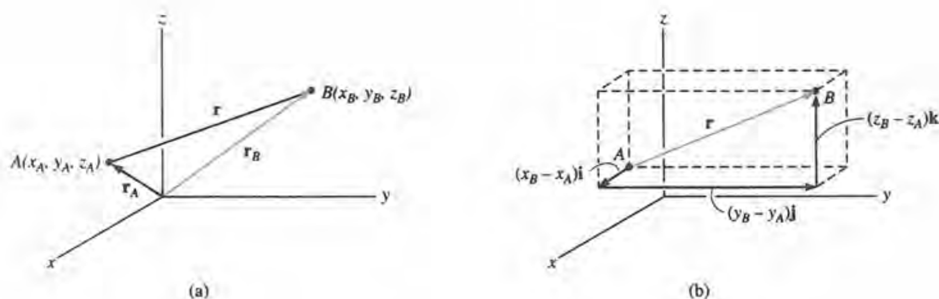
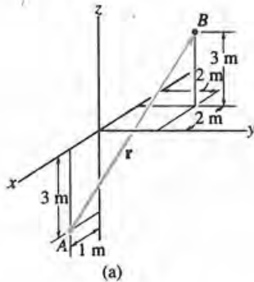


Fig. 2.37

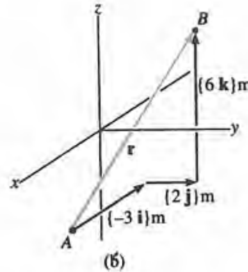
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.14

Determine la magnitud y dirección del vector de posición que se extiende de A a B en la figura 2.38a.



(a)



(b)

SOLUCIÓN

De acuerdo con la ecuación 2.13, las coordenadas del punto inicial $A(1, 0, -3)$ se restan de las coordenadas de la punta $B(-2, 2, 3)$, dando

$$\mathbf{r} = (-2-1)\mathbf{i} + (2-0)\mathbf{j} + [3-(-3)]\mathbf{k}$$
$$= \{-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\} \text{ m}$$

Como se aprecia en la figura 2.38b, las tres componentes de $\mathbf{r}$ pueden obtenerse también de *manera* más *directa*, dándose cuenta de que para desplazarse de A a B, uno se mueve a lo largo del eje x $\{-3\mathbf{i}\}$ m, a lo largo del eje y $\{2\mathbf{j}\}$ m y, finalmente, a lo largo del eje z $\{6\mathbf{k}\}$ m.

La magnitud de $\mathbf{r}$ es por tanto

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = 7\text{m}$$ ***Resp.***

Si se formula un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$, tenemos

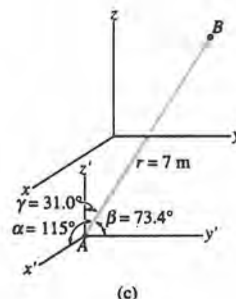
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{-3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Las componentes de este vector unitario proporcionan los ángulos directores coordenados

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{7}\right) = 115°$$ ***Resp.***

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4°$$ ***Resp.***

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = 31.0°$$ ***Resp.***



(c)

Fig. 2.38

Estos ángulos se miden desde la parte *positiva* de *los ejes* de un sistema localizado de coordenadas situado en el punto inicial de $\mathbf{r}$ como se ve en la figura 2.38c.

http://librosysolucionarios.net

2.8 Vector de fuerza dirigido a lo largo de una recta

Con mucha frecuencia, en los problemas tridimensionales de estática, la dirección de una fuerza se especifica por medio de dos puntos que determinan su línea de acción. La figura 2.39 muestra una situación tal donde la fuerza **F** se dirige por la cuerda *AB*. Podemos formular *AB* como vector cartesiano, dándonos cuenta de que tiene la *misma dirección y sentido* que el vector de posición **r** dirigido de *A* a *B* sobre la cuerda. Esta dirección común se puede especificar con el *vector unitario* **u** = *r*/*r*. Así,

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

Aun cuando hemos representado simbólicamente **F** en la figura 2.39, debe observarse que tiene unidades de fuerza y, a diferencia de **r**, o las coordenadas *x*, *y*, *z* que tiene unidades de longitud **F** no puede escalarse a lo largo de los ejes.

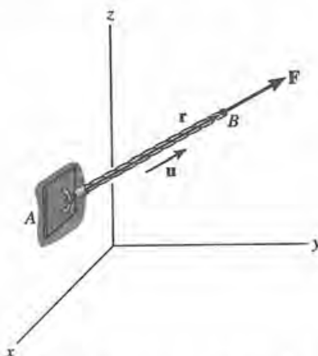


Fig. 2.39

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Cuando **F** se dirige por una recta que se extiende del punto *A* al punto *B*, entonces **F** puede expresarse en forma cartesiana como sigue:

Vector de posición. Determine el vector de posición **r** dirigido de *A* a *B* y calcule su magnitud **r**.

Vector unitario. Determine el vector unitario **u** = **r**/*r* que define la *dirección* y el *sentido* de **r** y de **F**.

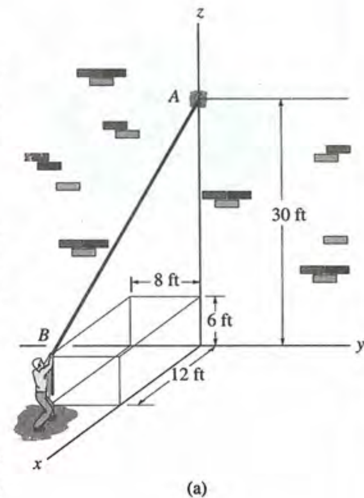
Vector de fuerza. Determine **F** combinando su magnitud **F** y dirección **u**, esto es, **F** = *Fu*.

Este procedimiento se ilustra numéricamente en los siguientes problemas de ejemplo.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.15

El hombre que se ve en la figura 2.40*a* está tirando de la cuerda con una fuerza de 70 lb. Represente esta fuerza que actúa sobre el soporte *A* como un vector cartesiano y determine su sentido.



SOLUCIÓN

La fuerza **F** se muestra en la figura 2.40*b*. El sentido de este vector, **u**, está determidado por el vector de posición **r**, que se extiende de *A* a *B*, Fig. 2.40*b*. Para formular **F** como un vector cartesiano, se utiliza el siguiente procedimiento.

Vector de posición. Las coordenadas de los puntos extremos de la cuerda son *A*(0, 0, 30) y *B*(12, –8, 6). Al obtener el vector de posición por sustracción de las coordenadas *x*, *y*, *z*, de *A* de las correspondientes de *B*, tenemos

$$\mathbf{r} = (12-0)\mathbf{i} + (-8-0)\mathbf{j} + (6-30)\mathbf{k}$$
$$= \{12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}\} \text{ ft}$$

Muestre, en la figura 2.40*a*, cómo se puede escribir **r** *directamente* desplazándose desde *A* {12**i**}ft, luego {–8**j** ft} y finalmente {–24**k**} ft para llegar a ***B***.

La magnitud de **r** que representa la *longitud* de la cuerda *AB* es

$$r = \sqrt{(12)^2 + (-8)^2 + (-24)^2} = 28 \text{ ft}$$

Vector unitario. Al formar el vector unitario que define la dirección y el sentido de **r** y de **F** se obtiene

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k}$$

Vector fuerza. Como **F** tiene una *magnitud* de 70 lb y una *dirección* especificada por **u**, se tiene

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = 70 \text{ lb}\left(\frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k}\right)$$

$$= \{30\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\} \text{ lb}$$ ***Resp.***

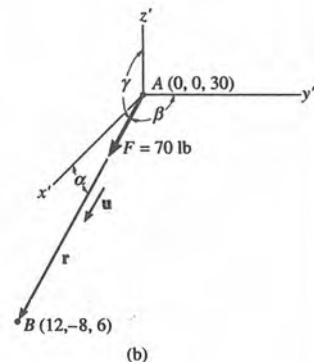


Fig. 2.40

Como se ve en la figura 2.40*b*, los ángulos directores coordenados se miden entre **r** (o **F**) y los *ejes positivos* de un sistema de coordenadas localizado con origen en *A*. De las componentes del vector unitario:

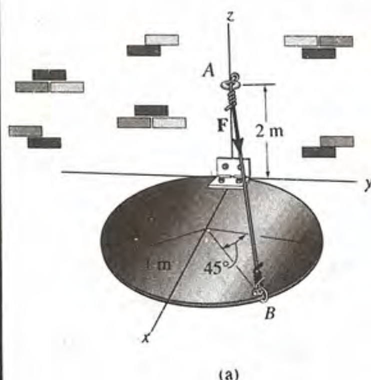
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{12}{28}\right) = 64.6^\circ$$ ***Resp.***

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{28}\right) = 107^\circ$$ ***Resp.***

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-24}{28}\right) = 149^\circ$$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.16



La placa circular que se ve en la figura 2.41*a* se encuentra parcialmente sostenida por el cable *AB*. Si la fuerza del cable sobre el gancho en *A* es $F = 500$ N, exprese **F** como un vector cartesiano

SOLUCIÓN

Como se aprecia en la figura 2.41*b*, **F** tiene la misma dirección y sentido que el vector de posición **r**, que se extiende de *A* a *B*.

Vector de posición. Las coordenadas de los puntos extremos del cable son $A(0, 0, 2)$ y $B(1.707, 0.707, 0)$ como se indica en la figura. Así,

$$\mathbf{r} = (1.707-0)\mathbf{i} + (0.707-0)\mathbf{j} + (0-2)\mathbf{k}$$
$$= \{1.707\mathbf{i} + 0.707\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} \text{ m}$$

Obsérvese que estas componentes pueden calcularse *directamente* realizando un desplazamiento de $\{-2\mathbf{k}\}$ m a partir de *A* por el eje *z*, luego un desplazamiento de $\{1.707\mathbf{i}\}$ a lo largo del eje *x* y, finalmente, $\{0.707\mathbf{m}\}$ a lo largo del eje *y* para llegar a *B*. La magnitud de *r* es

$$r = \sqrt{(1.707)^2 + (0.707)^2 + (-2)^2} = 2.27 \text{ m}$$

Vector unitario. Por lo anterior

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{r} = \frac{1.707}{2.72}\mathbf{i} + \frac{0.707}{2.72}\mathbf{j} - \frac{2}{2.72}\mathbf{k}$$
$$= 0.627\mathbf{i} + 0.260\mathbf{j} - 0.735\mathbf{k}$$

Vector de fuerza. Ya que $\mathbf{F} = 500$ N y **F** tiene la dirección **u**, tenemos

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = 500 \text{ N}(0.627\mathbf{i} + 0.260\mathbf{j} - 0.735\mathbf{k})$$

$$= \{314\mathbf{i} + 130\mathbf{j} - 368\mathbf{k}\} \text{ N}$$

Si se usan estas componentes, se verifica que la magnitud de **F** es, en efecto, de 500 N, esto es

$$F = \sqrt{(314)^2 + (130)^2 + (-368)^2} = 500 \text{ N}$$

Muestre que el ángulo director coordenado $\gamma = 137°$, e indique este ángulo en la figura.

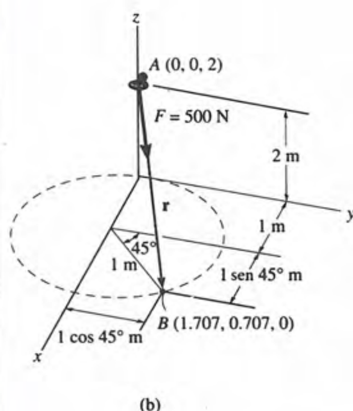


Fig. 2.41

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.17

Los cables ejercen fuerzas $F_{AB} = 100$ N y $F_{AC} = 120$ N sobre el anillo en A como se ve en la figura 2.42*a*. Determine la magnitud de la fuerza resultante que se ejerce en A.

SOLUCIÓN

La fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ se muestra gráficamente en la figura 2.42*b*. Podemos expresar esta fuerza como vector cartesiano si se presentan primero $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ como vectores cartesianos y sumando luego sus componentes. Las direcciones de $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ se especifican formando los vectores unitarios $\mathbf{u}_{AB}$ y $\mathbf{u}_{AC}$ a lo largo de los cables. Estos vectores unitarios se obtienen de los vectores de posición asociados $\mathbf{r}_{AB}$ y $\mathbf{r}_{AC}$. Con referencia a la figura 2.42*b* para $\mathbf{F}_{AB}$ tenemos

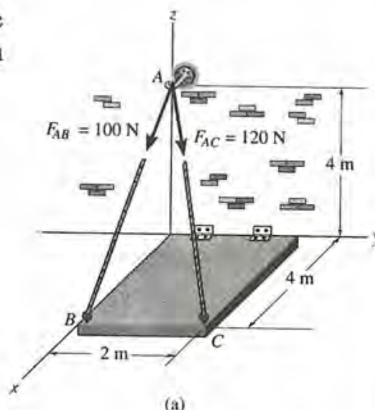
$$\mathbf{r}_{AB} = (4-0)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (0-4)\mathbf{k}$$

$$= \{4\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 5.66 \text{ m}$$

$$\mathbf{F}_{AB} = 100 \text{ N}\left(\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}\right) = 100 \text{ N}\left(\frac{4}{5.66}\mathbf{i} - \frac{4}{5.66}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{F}_{AB} = \{70.7\mathbf{i} - 70.7\mathbf{k}\} \text{ N}$$



Para $\mathbf{F}_{AC}$ tenemos

$$\mathbf{r}_{AC} = (4-0)\mathbf{i} + (2-0)\mathbf{j} + (0-4)\mathbf{k}$$

$$= \{4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$r_{AC} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = 6 \text{ m}$$

$$\mathbf{F}_{AC} = 120 \text{ N}\left(\frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}}\right) = 120 \text{ N}\left(\frac{4}{6}\mathbf{i} + \frac{2}{6}\mathbf{j} - \frac{4}{6}\mathbf{k}\right)$$

$$= \{80\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\} \text{ N}$$

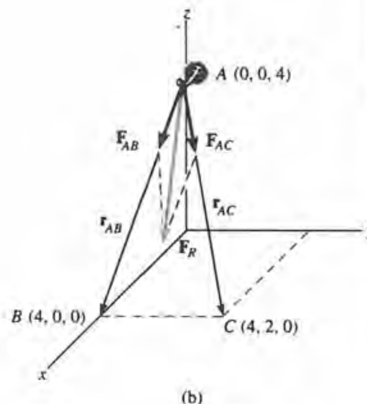


Fig. 2.42

La fuerza resultante es por tanto

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} = (70.7\mathbf{i} - 70.7\mathbf{k}) + (80\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 80\mathbf{k})$$

$$= \{150.7\,\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 150.7\mathbf{k}\} \text{ N}$$

La magnitud de $\mathbf{F}_R$ es así

$$F_R = \sqrt{(150.7)^2 + (40)^2 + (-150.7)^2}$$

$$= 217 \text{ N}$$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

2.70. Un vector de posición se extiende del origen al punto (2 m, 3 m, 6 m). Determine los ángulos directores coordenados α, β, y γ que hace el vector con los ejes x, y y z, respectivamente.

2.71. Represente el vector de posición **r** que parte del punto A(3 m, 5 m, 6 m) al punto B(5 m, –2 m, 1 m) en forma vectorial cartesiana. Calcule sus ángulos directores coordenados y encuentre la distancia entre los puntos A y B.

* **2.72.** Dados los tres vectores de posición

$$\mathbf{r}_1 = \{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{r}_2 = \{4\mathbf{i} - 5\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{r}_3 = \{3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\} \text{ m}$$

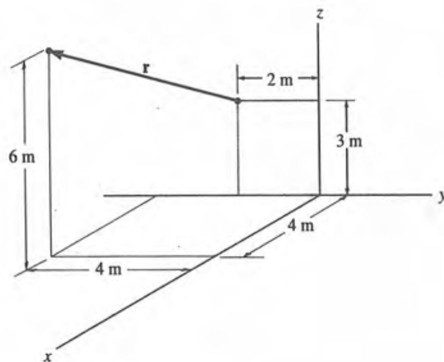
determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{r} = 2\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_3$.

2.73. Dados los tres vectores de posición

$$\mathbf{r}_1 = \{2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{r}_2 = \{3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{r}_3 = \{-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\} \text{ m}$$

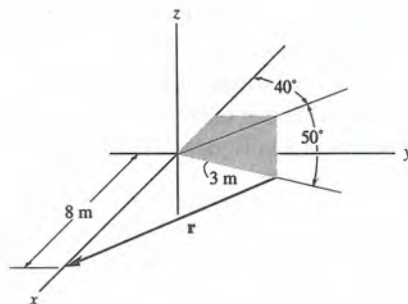
determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_3$

2.74. Exprese el vector de posición **r** en forma vectorial cartesiana; luego determine su magnitud y sus ángulos directores coordenados.



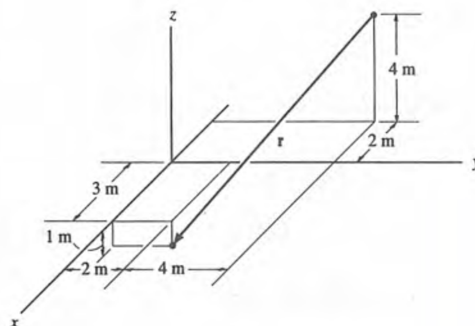
Prob. 2.74

2.75. Exprese el vector de posición **r** en forma vectorial cartesiana; determine luego su magnitud y ángulos directores coordenados.



Prob. 2.75

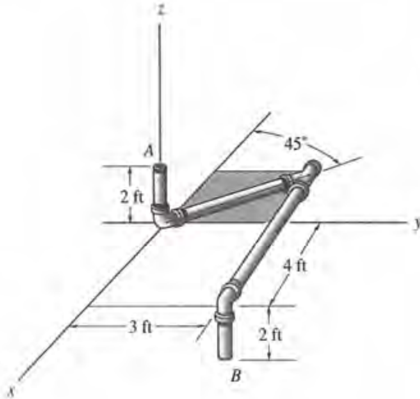
* **2.76.** Exprese el vector de posición **r** en forma vectorial cartesiana y luego determine su magnitud y ángulos directores coordenados.



Prob. 2.76

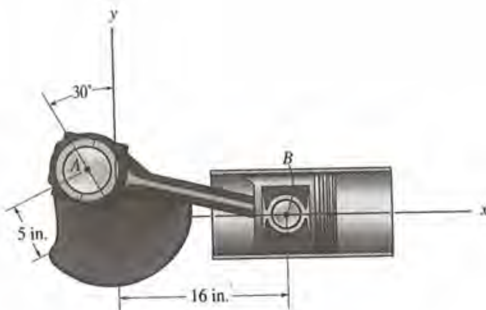
http://librosysolucionarios.net

2.77. Determine la distancia entre los puntos extremos A y B en el tubo. *Sugerencia*: Formule un vector de posición de A a B y luego determine su magnitud.



Prob. 2.77

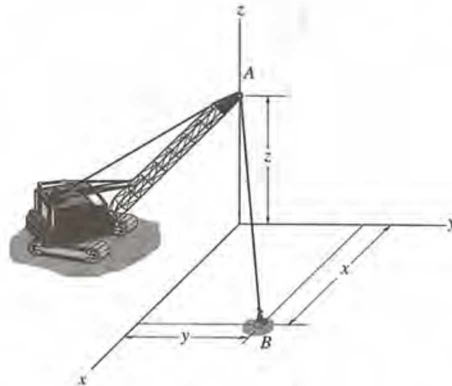
2.78. Determine la longitud de la barra AB formulando primero un vector cartesiano de posición de A a B y determine luego su magnitud.



Prob. 2.78

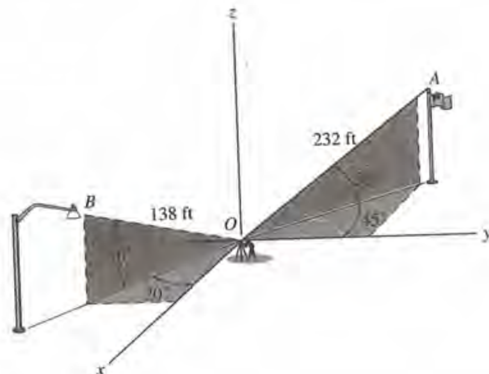
2.79. En el punto A de una pluma se ha sujetado un cable de 80 ft de largo. Si $x = 60$ ft, determine la localización (y, z) en el extremo del cable B. Considere $z = 3y$.

***2.80.** El cable está sujeto a la pluma en A y por el otro extremo en B de coordenadas $x = 80$ ft, $y = 40$ ft. Si $z = 40$ ft, determine la longitud del cable y el ángulo entre el eje positivo de z y el cable.



Probs. 2.79/2.80

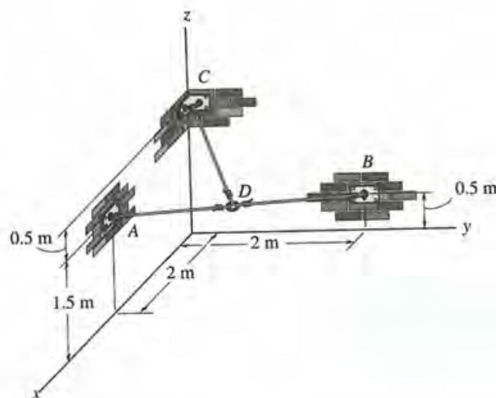
2.81. Las posiciones del punto A en el asta y el punto B de la luz se han medido con relación al medidor electrónico de distancia (EDM) que está en O. Determine la distancia entre A y B. *Sugerencia*: Formule un vector de posición dirigido de A a B , y determine su magnitud.



Prob. 2.81

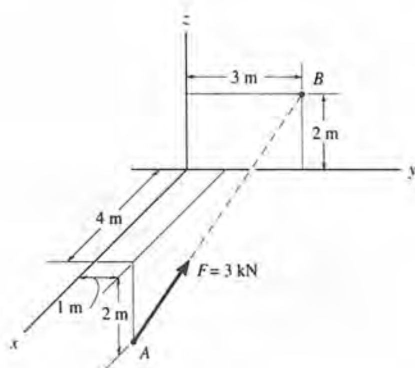
http://librosysolucionarios.net

2.82. Determine las longitudes de los cables *AD*, *BD* y *CD*. El anillo está en *D*, que es el punto medio entre *A* y *B*.



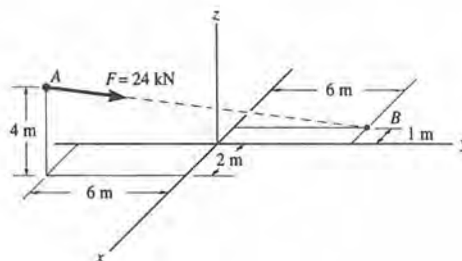
Prob. 2.82

2.83. Exprese la fuerza como un vector cartesiano y entonces determine sus ángulos directores coordenados.



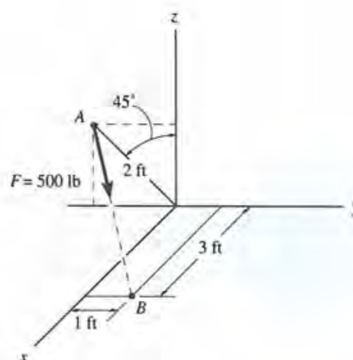
Prob. 2.83

*** 2.84.** Exprese la fuerza como vector cartesiano; determine sus ángulos directores coordenados.



Prob. 2.84

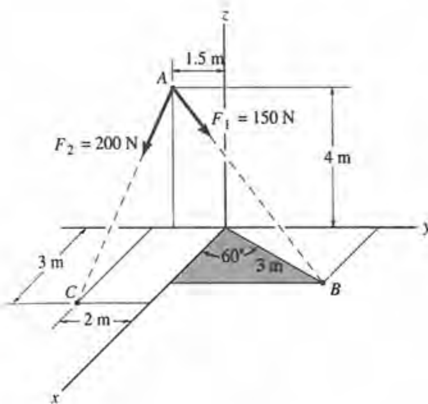
2.85. Exprese la fuerza como vector cartesiano y determine sus ángulos directores coordenados.



Prob. 2.85

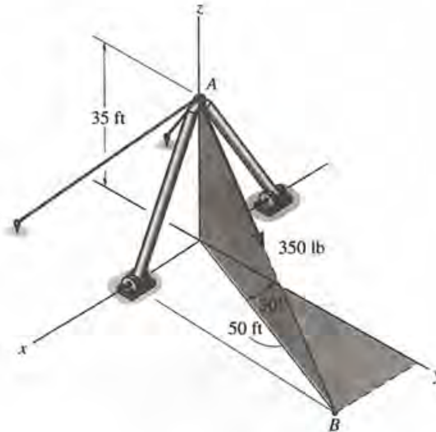
http://librosysolucionarios.net

2.86. Exprese cada una de las dos fuerzas en forma vectorial cartesiana.



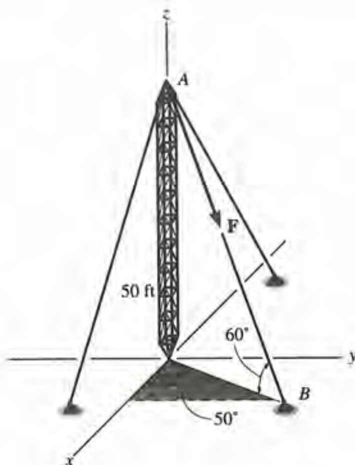
Prob. 2.86

***2.88.** El cable atado al castillete ejerce una fuerza de 350 lb sobre el mismo. Exprese esta fuerza como vector cartesiano.



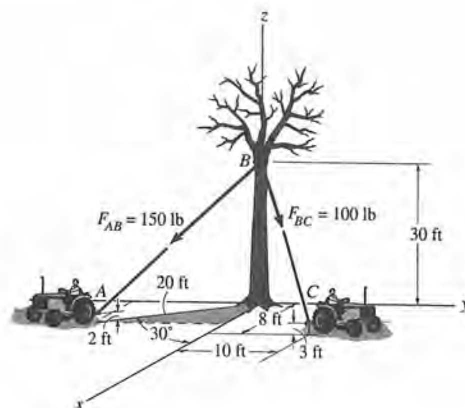
Prob. 2.88

2.87. Se aplica una fuerza **F** en la parte superior de la torre en A. Si actúa en el sentido que se muestra, de modo que su componente vertical tenga una magnitud de 80 lb, exprese **F** como vector cartesiano y determine sus ángulos directores coordenados.



Prob. 2.87

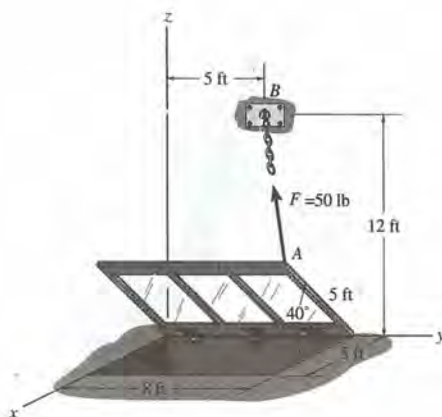
2.89. Dos tractores tiran del árbol con las fuerzas que se indican. Represente cada fuerza como vector cartesiano y determine la magnitud y ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.



Prob. 2.89

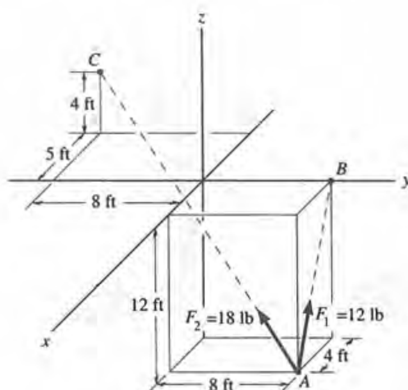
http://librosysolucionarios.net

2.90. La ventana se sostiene abierta con la cadena AB. Determine la longitud de la cadena, y exprese la fuerza de 50 lb que actúa en A a lo largo de la cadena como vector cartesiano y determine sus ángulos directores coordenados.



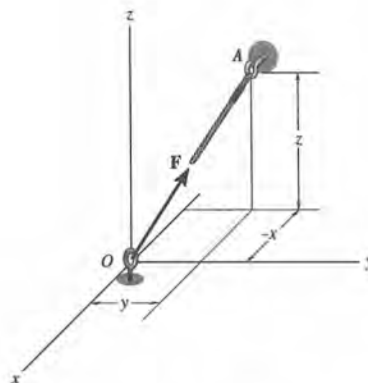
Prob. 2.90

2.91. Exprese cada una de las dos fuerzas en forma vectorial cartesiana y determine la magnitud y ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.



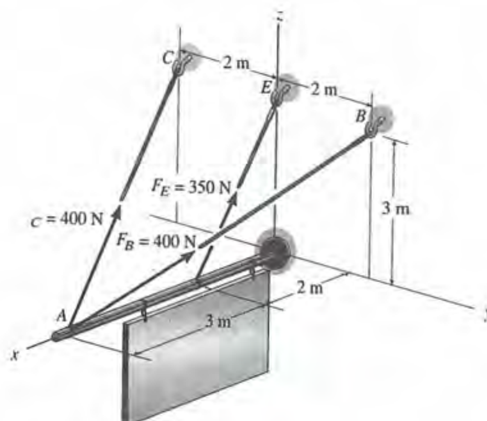
Prob. 2.91

***2.92.** El cable OA ejerce una fuerza en el punto O de $\mathbf{F} = \{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}$lb, dirigida desde O hacia A. Si el cable es de 5 ft de largo, ¿cuáles son las coordenadas $(-x, y, z)$ del punto A?



Prob. 2.92

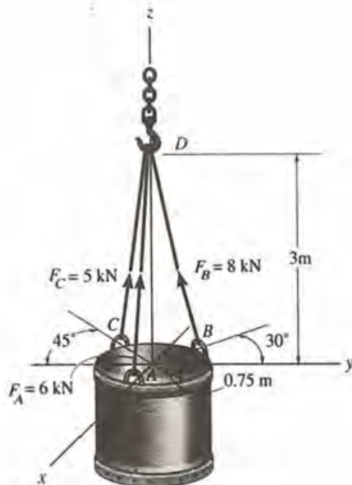
2.93. Los tres cables de soporte ejercen sobre el anuncio las fuerzas que se indican. Represente cada una como vector cartesiano.



Prob. 2.93

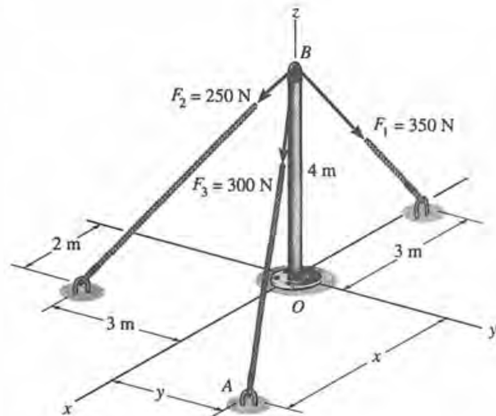
http://librosysolucionarios.net

2.94. El recipiente cilíndrico está sostenido por tres cables que son concurrentes en el punto D. Exprese cada fuerza ejercida por los cables sobre el recipiente como vector cartesiano y determine la magnitud y ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.



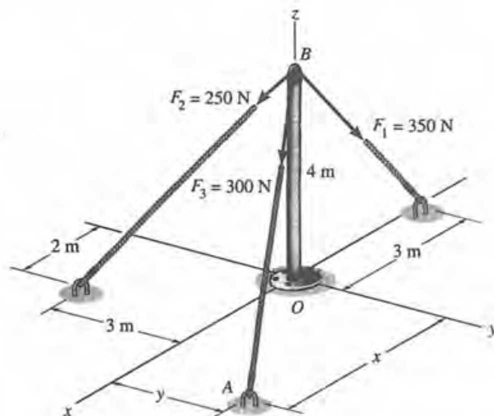
Prob. 2.94

2.95. Un poste se mantiene en posición por medio de tres cables. Si la fuerza que cada cable ejerce sobre el poste es como se ve en la figura, determine la posición (x, y, 0) para fijar el cable BA, de modo que la fuerza resultante ejercida sobre el poste se dirija por su propio eje, de B hacia O. También determine la magnitud de la fuerza resultante.



Prob. 2.95

***2.96.** El poste se mantiene en posición con tres cables. Si la fuerza ejercida por cada cable *actuando* sobre el poste es como se muestra, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados α, β, γ de la fuerza resultante. Suponga que $x = 4$ m, $y = 2$ m.



Prob. 2.96

http://librosysolucionarios.net

2.9 El producto escalar o producto punto

En la estática se presenta el problema de encontrar el ángulo entre dos rectas, o las componentes de una fuerza que sean una paralela y la otra perpendicular a una recta dada. En dos dimensiones, estos problemas se resuelven fácilmente por trigonometría porque la geometría del problema plano es fácil de comprender. Pero en tres dimensiones suele ser difícil tener una visión clara del problema y consecuentemente deberán usarse métodos vectoriales para la solución. El producto punto define un método particular de "multiplicar" dos vectores y se usa para resolver problemas como los mencionados.

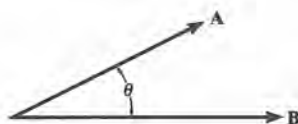


Fig. 2.43

El *producto punto* de los vectores **A** y **B**, lo que se escribe **A** · **B**, y se lee "**A** punto **B**", se define como el producto de las magnitudes de **A**, de **B**, y el coseno del ángulo entre los segmentos representativos de los vectores, figura 2.43. Expresado en forma de ecuación,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \qquad (2.14)$$

donde $0° \leq \theta \leq 180°$. El producto punto suele llamarse *producto escalar* de los vectores porque el resultado es un escalar, no un vector.

Leyes de operación

1. Ley conmutativa:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

2. Multiplicación por un escalar:

$$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})a$$

3. Ley distributiva:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

http://librosysolucionarios.net

Es fácil demostrar las dos primeras leyes utilizando la ecuación 2.14. La demostración de la ley distributiva se deja como ejercicio (véase el Prob. 2.97).

Formulación en términos de vectores cartesianos. La ecuación 2.14 puede usarse para encontrar el producto escalar para el caso de los vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1) \cos 0°$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1) \cos 90° = 0$. Análogamente,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 \end{array}$$

Estos resultados no deberán memorizarse; en lugar de ello, deberá entenderse claramente cómo se obtienen.

Considérese ahora el producto escalar de dos vectores en general, **A** y **B**, expresados en forma vectorial cartesiana. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \cdot (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Realizando las operaciones, el resultado final viene a ser

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{2.15}$$

Por tanto, para determinar el producto escalar de dos vectores cartesianos, se multiplican sus componentes correspondientes x, y, z, y se suman estos productos algebraicamente. Como el resultado es un escalar, deberá tenerse cuidado de *no* escribir ningún vector unitario en el resultado.

Aplicaciones. El producto escalar tiene dos aplicaciones importantes en la mecánica.

1. *El ángulo que se forma entre dos vectores o rectas con un punto en común.* El ángulo θ entre los vectores **A** y **B** en la figura 2.43 puede determinarse de la ecuación 2.14 y escribirse como

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right) \quad 0° \le \theta \le 180°$$

   Aquí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se calcula por medio de la ecuación 2.15. En particular, debe observarse que si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, $\theta = \cos^{-1} 0 = 90°$, de modo que **A** será perpendicular a **B**.

http://librosysolucionarios.net

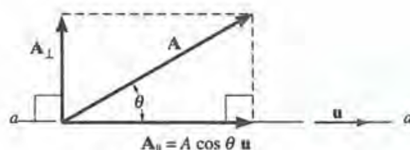


Fig. 2.44

2. *Las componentes paralela y perpendicular de un vector respecto a una recta dada.* La componente del vector **A**, paralela o colineal con la recta *aa*' en la figura 2.44, se define como $\mathbf{A}_\parallel$ donde $A_\parallel = A \cos\theta$. Esta componente suele llamarse la *proyección* de **A** sobre la recta, porque en la construcción se forma un ángulo recto. Si la dirección y sentido de la recta se especifica con el vector unitario **u**, entonces, ya que **u** = 1 podemos determinar $A_\parallel$ directamente del producto escalar (ecuación 2.14); esto es

$$A_\parallel = A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}$$

Así, la proyección escalar de **A** *a lo largo de la recta está determinada a partir del producto escalar de* **A** *y el vector unitario* **u** *que define la dirección y el sentido de la recta.* Debe observarse que si el resultado es positivo, **A** apunta al mismo lado que **u**, y en sentido contrario, si $A_\parallel$ es negativo. La componente $\mathbf{A}_\parallel$ representada como *vector* es, por tanto,

$$\mathbf{A}_\parallel = A\cos\theta\,\mathbf{u} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$$

Nótese que la componente de **A** *perpendicular* a la recta *aa*' puede obtenerse también, figura 2.44. Ya que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\parallel + \mathbf{A}_\perp$, tenemos $\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \mathbf{A}_\parallel$. Dos formas de obtener $\mathbf{A}_\perp$ serían determinar θ del producto escalar, $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}/A)$ y entonces $A_\perp = A \operatorname{sen}\theta$. De manera alternativa, si $A_\parallel$ es conocida, entonces por el teorema de Pitágoras podemos escribir también $A_\perp = \sqrt{A^2 - A_\parallel^2}$

Las dos aplicaciones precedentes se ilustran numéricamente en los problemas de ejemplo que siguen.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2.18

La estructura que se ve en la figura 2.45*a* está sujeta a una fuerza horizontal $\mathbf{F} = \{300\mathbf{j}\}$ N que actúa en la esquina superior. Determine la magnitud de las componentes de esta fuerza, una paralela y la otra perpendicular al elemento *AB*.

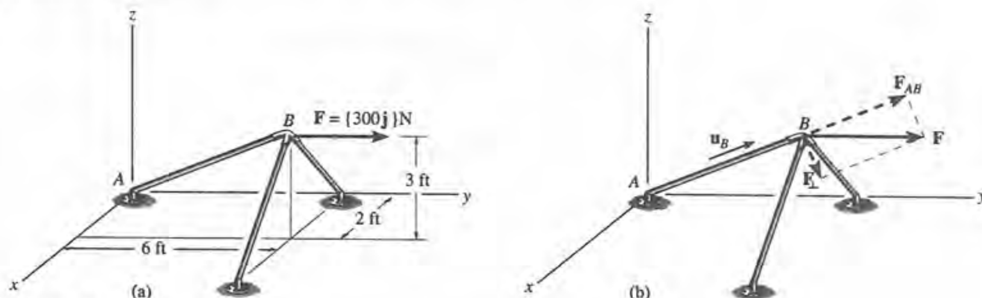


Fig. 2.45

SOLUCIÓN

La magnitud de la componente **F** a lo largo de *AB* es igual al producto escalar de **F** y el vector unitario $\mathbf{u}_B$ que define la dirección de *AB*, figura 2.45*b*. Dado que

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}} = 0.286\mathbf{i} + 0.875\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} F_{AB} &= F\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_B = (300\mathbf{j})\cdot(0.286\mathbf{i} + 0.857 + \mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= (0)(0.286) + (300)(0.875) + (0)(0.429) \\ &= 257.1 \text{ N} \end{aligned}$$

Como el resultado es un escalar positivo , $\mathbf{F}_{AB}$ "apunta" hacia el mismo lado que $\mathbf{u}_B$, figura 2.45*b*.

Si se expresa $\mathbf{F}_{AB}$ en forma vectorial cartesiana, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AB} &= F_{AB}\mathbf{u}_B = 257.1 \text{ N}(0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= \{73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned} \qquad \textit{Resp.}$$

La componente perpendicular, figura 2.45*b* es, por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\perp &= \mathbf{F} - \mathbf{F}_{AB} = 300\mathbf{j} - (73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}) \\ &= \{-73.5\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 110\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

Su magnitud puede determinarse ya sea a partir de este vector, o' del teorema de Pitágoras, figura 2.45*b*:

$$\begin{aligned} F_\perp &= \sqrt{F^2 - F_{AB}^2} \\ &= \sqrt{(300)^2 - (257.1)^2} \\ &= 155 \text{ N} \end{aligned} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

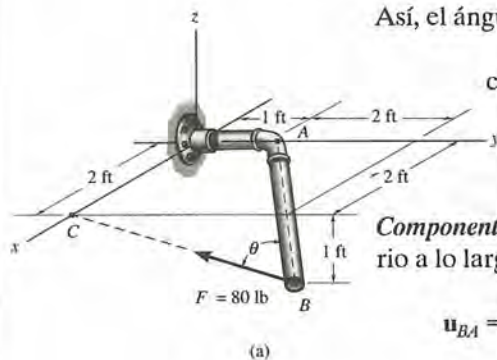
Ejemplo 2.19

El tubo que se ve en la figura 2.46*a* está sujeto a la fuerza $F = 80$ lb en su extremo B. Determine el ángulo θ entre **F** y el segmento tubular BA, y la magnitud de las componentes de **F** que son paralela y perpendicular, respectivamente, a BA.

SOLUCIÓN

Ángulo θ. Se determinan primero los vectores de posición colineales con BA y BC.

$$\mathbf{r}_{BA} = \{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}\text{ ft}$$
$$\mathbf{r}_{BC} = \{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}\text{ ft}$$



(a)

Así, el ángulo θ entre sus segmentos representativos es

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_{BA}\cdot\mathbf{r}_{BC}}{r_{BA}r_{BC}} = \frac{(-2)(0) + (-2)(-3) + (1)(1)}{3\sqrt{10}}$$
$$= 0.7379$$
$$\theta = 42.5^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

Componentes de F. Debemos formular primero el vector unitario a lo largo de BA y la fuerza **F** como vectores cartesianos.

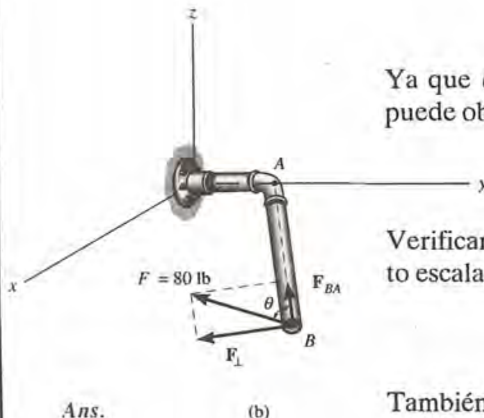
$$\mathbf{u}_{BA} = \frac{\mathbf{r}_{BA}}{r_{BA}} = \frac{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}}{3} = -\frac{2}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}}$$
$$F = 80\text{ lb}\left(\frac{\mathbf{r}_{BC}}{r_{BC}}\right) = 80\left(\frac{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}}{\sqrt{10}}\right) = -75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k}$$

Así,

$$F_{BA} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{BA} = (-75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k})\cdot\left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\right)$$
$$= 0 + 50.60 + 8.43$$
$$= 59.0\text{ lb}$$

Ya que θ se calculó en la figura 2.46*b*, este mismo resultado puede obtenerse directamente por trigonometría .

$$F_{BA} = 80\cos 42.5^\circ = 59.0\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$



Ans. (b)

Fig. 2.46

Verificamos la validez de ambas soluciones usando el producto escalar para ver que

$$F_{BA} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{BA} = F(1)\cos\theta$$

También

$$F_{\perp} = F\,\text{sen}\,\theta$$
$$= 80\text{ sen }42.5^\circ$$
$$= 54.0\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

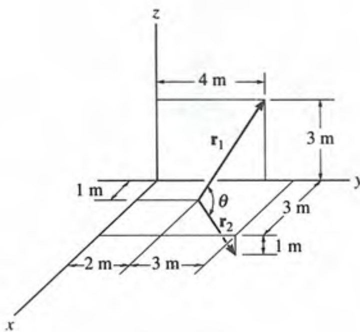
http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

2.97. Para tres vectores **A**, **B** y **D** demuestre que **A** · (**B** + **D**) = (**A** · **B**) + (**A** · **D**).

2.98. Determine el ángulo θ entre los dos vectores de posición.

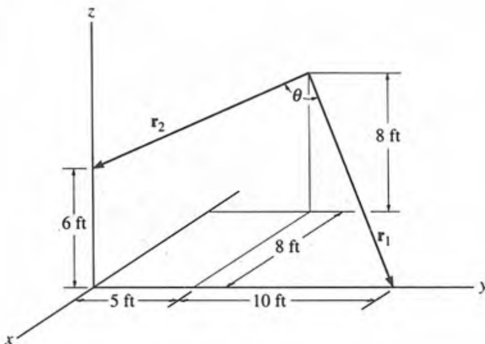
2.99. Determine la proyección del vector $\mathbf{r}_1$ en la dirección de $\mathbf{r}_2$. Exprese el resultado como vector cartesiano.



Probs. 2.98/2.99

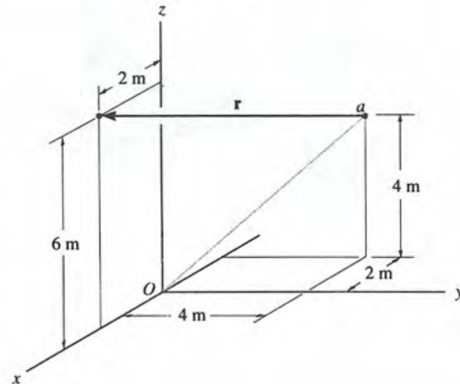
* 2.100. Determine el ángulo θ entre los dos vectores de posición.

2.101. Determine la proyección del vector $\mathbf{r}_1$ en la dirección de $\mathbf{r}_2$. Exprese el resultado como vector cartesiano.



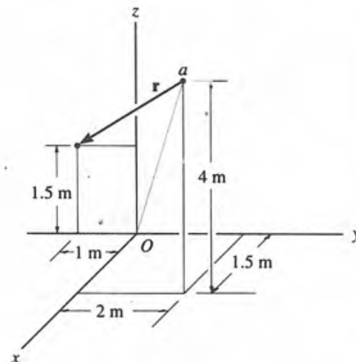
Probs. 2.100/2.101

2.102. Determine la magnitud de la proyección del vector de posición **r** a lo largo del eje *Oa*.



Prob. 2.102

2.103. Determine la magnitud de la proyección del vector de posición **r** a lo largo del eje *Oa*.

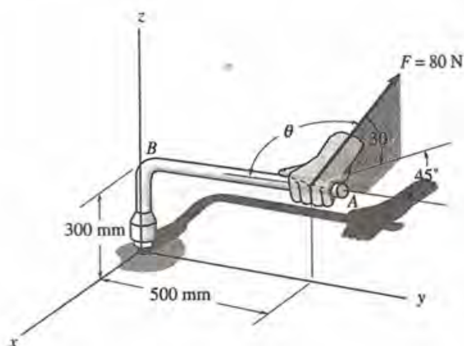


Probs. 2.103

http://librosysolucionarios.net

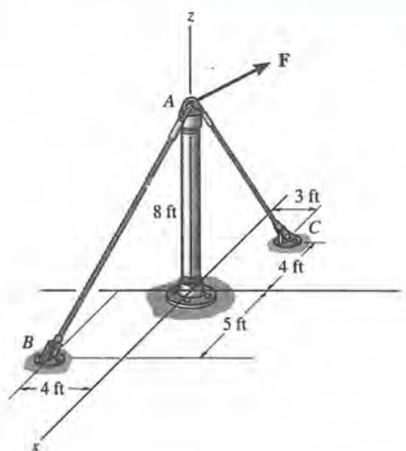
*2.104. Se aplica una fuerza de $F = 80$ N al mango de una llave. Determine el ángulo θ entre el segmento representativo de la fuerza y el mango *AB*.

2.105. Se aplica una fuerza $F = 80$ N al mango de la llave. Determine las magnitudes de las componentes de la fuerza que actúa a lo largo del eje *AB* del mango de la llave y perpendicularmente a dicho eje.



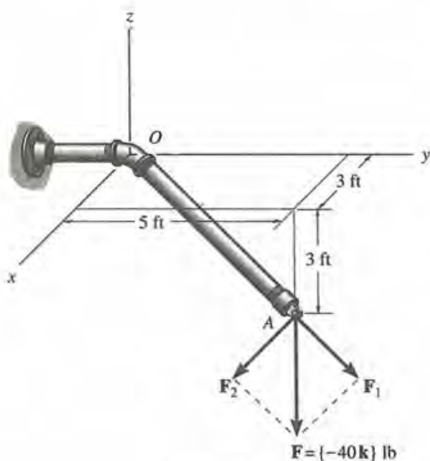
Probs. 2.104/2.105

2.107. Determine las magnitudes de las proyecciones de la fuerza $\mathbf{F} = \{-80\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 20\mathbf{k}\}$ lb en la dirección de los cables *AB* y *AC*.



Prob. 2.107

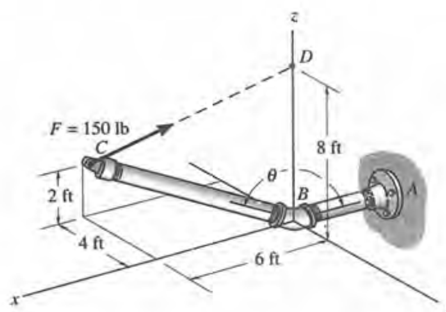
2.106. Una fuerza $\mathbf{F} = \{-40\mathbf{k}\}$ lb = $\{-40\mathbf{k}\}$ lb actúa en el extremo del tubo. Determine las magnitudes de las componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan, una a lo largo del eje del tubo y la otra perpendicularmente.



Prob. 2.106

*2.108. Determine la magnitud de la proyección de la fuerza de 150 lb que actúa a lo largo del eje *BC* del tubo.

2.109. Determine el ángulo θ entre los segmentos tubulares *BA* y *BC*.

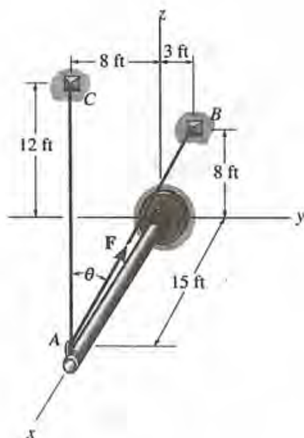


Probs. 2.108/2.109

http://librosysolucionarios.net

2.110. Determine el ángulo θ entre los cables *AB* y *AC*.

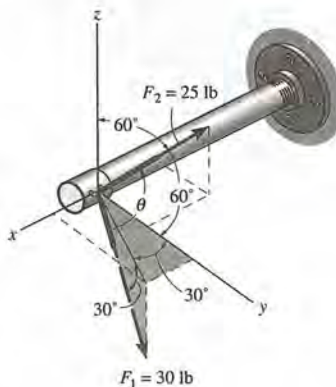
2.111. Si **F** tiene una magnitud de 55 lb , determine la magnitud de su proyección que actúa a lo largo del eje *x* y a lo largo del cable *AC*.



Probs. 2.110/2.111

2.114. Dos cables ejercen fuerzas sobre el tubo. Determine la magnitud de la proyección de $\mathbf{F}_1$ a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}_2$.

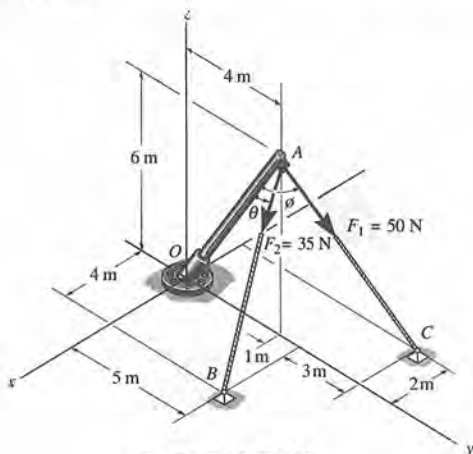
2.115. Determine el ángulo *θ* entre los dos cables sujetos al tubo.



Probs. 2.114/2.115

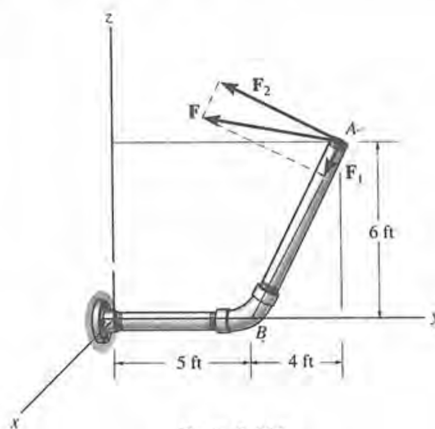
* **2.112.** Determine los ángulos *θ* y *Φ* entre el eje *OA* del poste y cada cable, *AB* y *AC*.

2113. Los dos cables ejercen sobre el poste las fuerzas que se muestran. Determine la magnitud de la proyección de cada fuerza que actúa a lo largo del eje *OA* del poste.



Probs. 2.112/2.113

* **2.116.** La fuerza $\mathbf{F} = \{25\mathbf{i} - 50\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}$ N se ejerce en el extremo de *A* del ensamble tubular. Determine las magnitudes de las componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan a lo largo del eje *AB* y perpendicularmente al mismo.

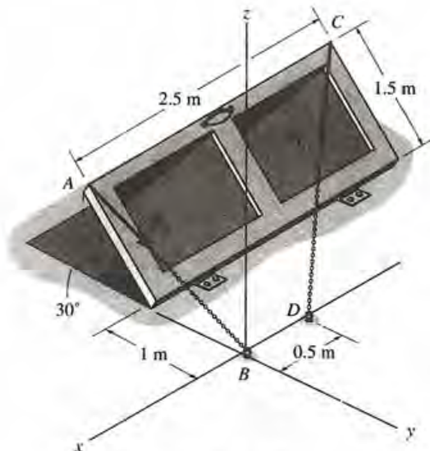


Prob. 2.116

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS DE REPASO

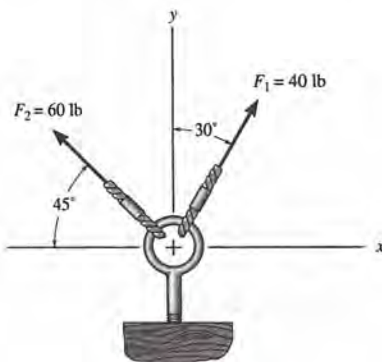
2.117. La puerta se mantiene abierta por medio de dos cadenas. Si las tensiones en AB y CD son $F_A = 300$ N y $F_c = 250$ N respectivamente, exprese cada una de estas fuerzas en forma vectorial cartesiana.



Prob. 2.117

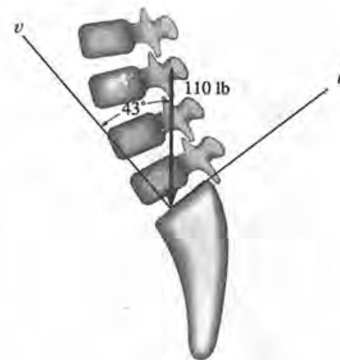
2.118. Exprese cada fuerza que se ejerce sobre la armella roscada como vector cartesiano y determine la magnitud y orientación de la fuerza resultante.

2.119. Utilice la ley del paralelogramo para determinar la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la armella. Determine su orientación, medida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje x positivo.



Prob. 2.118/2.119

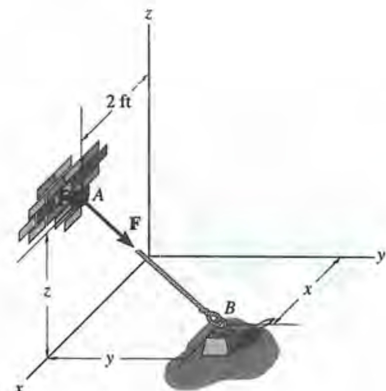
* **2.120.** La columna vertebral ejerce una fuerza vertical de 110 lb sobre la articulación sacrolumbar de una persona que está de pie y erecta. Determine las magnitudes de las componentes de esta fuerza dirigidas perpendicularmente a la superficie del sacro, eje v, y paralelamente, eje u.



Prob. 2.120

2.121. La cuerda AB ejerce una fuerza de $\mathbf{F} = \{12\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k}\}$ lb sobre el gancho. Si la cuerda mide 8 ft de largo, determine la localización x, y del punto de amarre B, y la altura z del gancho.

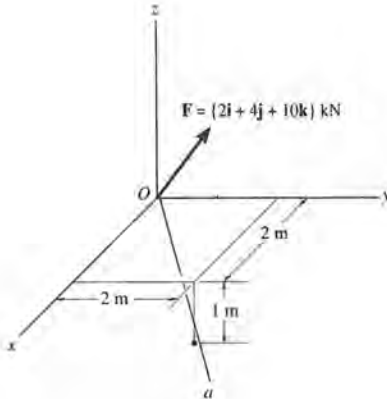
2.122. La cuerda ejerce una fuerza de $\mathbf{F} = 30$ lb sobre el gancho. Si la cuerda mide 8 ft de largo, $z = 4$ ft, y la componente x de la fuerza es $F_x = 25$ lb, determine la localización x, y del punto B donde está sujeta la cuerda al suelo.



Probs. 2.121/2.122

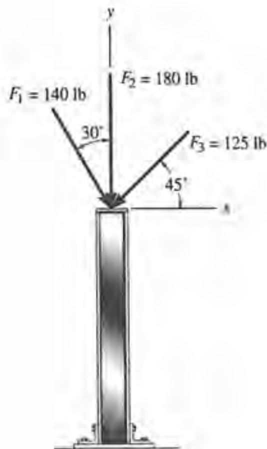
http://librosysolucionarios.net

2.123. Determine la magnitud de la proyección de la fuerza **F** a lo largo del eje *Oa*.



Prob. 2.123

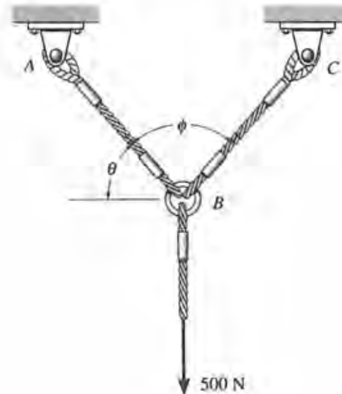
***2.124.** Exprese cada una de las tres fuerzas que actúan sobre la columna en forma vectorial cartesiana y determine la magnitud de la fuerza resultante.
Prob. 2.124



Prob. 2.124

2.125. Determine el ángulo θ ($0° \leq \theta \leq 90°$) para el cable *AB*, de modo que la fuerza vertical de 500 N tenga una componente de 200 N dirigida a lo largo del cable *AB* de *A* a *B*. ¿Cuál es la componente correspondiente para la fuerza que actúa a lo largo del cable *CB*? Considérese $\Phi = 60°$.

2.126. Determine el ángulo Φ ($0° \leq \Phi \leq 90°$) entre los cables *BA* y *BC*, de modo que la fuerza vertical de 500 N tenga una componente de 250 N que actúa a lo largo del cable *CB*, de *C* a *B*. Considérese $\theta = 60°$.



Probs. 2.125/2.126

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

3 Equilibrio de una partícula

En este capítulo se aplicarán los métodos para resolver una fuerza en componentes y expresar una fuerza como un vector cartesiano a la solución de problemas relacionados con el equilibrio de una partícula. Para simplificar la exposición se considerará primeramente el equilibrio de una partícula para un sistema de fuerzas coplanares concurrentes. En la parte final del capítulo se estudiarán problemas de equilibrio relacionados con sistemas de fuerzas concurrentes en tres dimensiones.

3.1 Condición para el equilibrio de una partícula

Una partícula está en *equilibrio* siempre y cuando su estado sea de reposo, si originalmente estaba en reposo, o tenga velocidad constante, si originalmente estaba en movimiento. Lo más usual, sin embargo, es decir que está en "equilibrio" , o más específicamente, en "equilibrio estático" tratándose de un objeto en reposo. Para mantener un estado de equilibrio, es *necesario* satisfacer la primera ley del movimiento de Newton, que afirma que si la *fuerza resultante* que actúa sobre la partícula es *cero*, entonces la partícula está en equilibrio. Esta condición se puede enunciar matemáticamente como

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

http://librosysolucionarios.net

donde $\Sigma\mathbf{F}$ es la *suma vectorial de todas las fuerzas* que actúan sobre la partícula.

No sólo es necesaria la condición de la ecuación 3.1, sino que es también *suficiente*. Esto se sigue de la segunda ley del movimiento de Newton que puede escribirse $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Ya que el sistema de fuerzas satisface la ecuación 3.1, entonces $m\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y, por tanto, la aceleración de la partícula $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; consecuentemente, la partícula se mueve con velocidad constante o permanece en reposo.

3.2 El diagrama de cuerpo libre

Para aplicar la ecuación de equilibrio correctamente se deben tomar en cuenta todas las fuerzas conocidas y desconocidas ($\Sigma\mathbf{F}$) que actúan *sobre* la partícula. La mejor manera de hacerlo es trazar el diagrama de cuerpo libre. Éste es un bosquejo donde la partícula se representa aislada o "libre" de su entorno. En este croquis es necesario mostrar *todas* las fuerzas que actúan sobre la partícula. Una vez trazado este diagrama será fácil aplicar la ecuación 3.1.

Antes de presentar un procedimiento formal para el trazado de un diagrama de cuerpo libre, trataremos acerca de dos tipos de conexiones frecuentemente encontradas en problemas de equilibrio de partículas.

Resortes. Si se usa como soporte un *resorte elástico lineal*, la longitud del resorte cambiará en proporción directa con la fuerza que actúa en el mismo. Una característica que define la "elasticidad" del resorte es la constante del resorte o su rigidez k. Específicamente, la magnitud de la fuerza desarrollada por un resorte elástico lineal cuya constante de resorte es k y se deforma (se alarga o acorta) una distancia s medida a partir de su posición sin carga, es

$$F = ks \tag{3.2}$$

Nótese que s se determina por la diferencia entre la longitud del resorte deformado l y la longitud del resorte no deformado l_o, esto es, $s = l - l_o$. De manera que si s es positiva, $\mathbf{F}$ "tira" el resorte, mientras que si s es una cantidad negativa, $\mathbf{F}$ lo empuja. Por ejemplo, el resorte de la figura 3.1 tiene longitud indeformada $l_o = 0.4$ m y constante de resorte $k = 500$N/m. Para estirarlo de modo que $l = 0.6$ m, se requerirá una fuerza $F = ks = (500 \text{ N/m})(0.6 \text{ m} - 0.4 \text{ m}) = 100$ N. Así también para comprimirlo a una longitud $l = 0.2$ m, se necesi-

http://librosysolucionarios.net

ta una fuerza $F = ks = (500\ \text{N/m})(0.2\text{m} - 0.4\text{m}) = -100\ \text{N}$, figura 3.1.

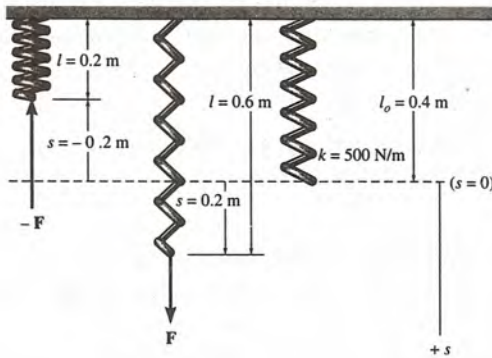


Fig. 3.1

Cables y poleas. En todo el libro, exceptuando la sección 7.4, todos los cables (o cuerdas) se suponen de peso despreciable e inextensibles. Un cable *sólo* puede soportar una tensión o fuerza "tirante" y esta fuerza actúa siempre en la dirección del cable. En el capítulo 5 se mostrará que la fuerza de tensión desarrollada en un *cable continuo* que pasa por una polea sin fricción debe tener magnitud *constante* para mantener el cable en equilibrio. Así, para todo ángulo θ que se muestra en la figura 3.2, el cable está sujeto a una tensión constante T en toda su longitud.

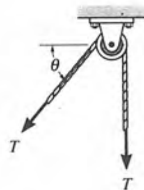


Fig. 3.2

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO PARA TRAZAR UN DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Puesto que debemos tomar en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, la importancia de trazar un diagrama de cuerpo libre antes de aplicar la ecuación de equilibrio a la solución de un problema no puede ser menospreciada. Para construir un diagrama de cuerpo libre son indispensables los tres pasos a continuación.

Paso 1. Imagine la partícula *aislada* o "cortada" de su entorno. Trace o bosqueje su forma.

Paso 2. Indique sobre el croquis *todas* las fuerzas que actúan *sobre la partícula*. Estas fuerzas pueden ser *fuerzas activas*, que tienden a poner la partícula en movimiento, como las causadas por cables atados, el peso, o la interacción magnética o electrostática. También existen las *fuerzas reactivas*, como las causadas por las restricciones o soportes que tienden a impedir el movimiento. Para tomar en cuenta todas estas fuerzas puede ayudar el recorrido de la frontera de la partícula, anotando con cuidado cada fuerza que actúa sobre ella.

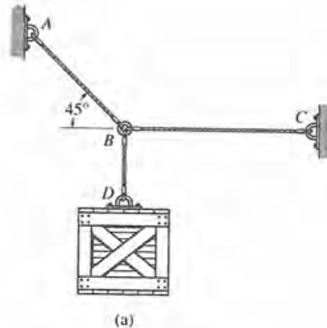
Paso 3. Las fuerzas que son *conocidas* deberán etiquetarse con sus magnitudes y direcciones apropiadas. Se usarán letras para representar las magnitudes y direcciones desconocidas de las fuerzas. En particular, si una fuerza tiene línea de acción conocida pero magnitud desconocida, la "punta de la flecha" que define el sentido de la fuerza *se tomará* arbitrariamente. El sentido correcto aparecerá obvio tras resolver y encontrar la *magnitud* desconocida. Por definición, la *magnitud* de una fuerza es *siempre positiva* de modo que, si la solución da un escalar "negativo", el *signo menos* indica que la punta de la flecha o sentido de la fuerza es opuesto al inicialmente supuesto.

Los dos ejemplos siguientes ilustran la aplicación de los pasos recién expuestos.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3.1

La caja que se ve en la figura 3.3*a* tiene un peso de 20 lb. Trace un diagrama de cuerpo libre de la caja, de la cuerda *BD*, y del anillo situado en *B*.



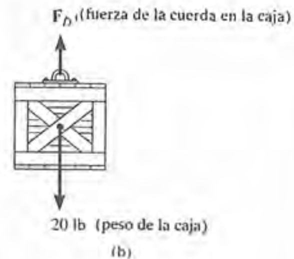
(a)

SOLUCIÓN

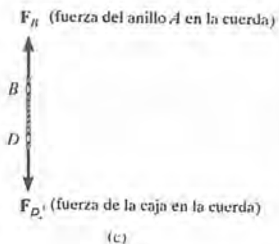
Si imaginamos la caja aislada de su entorno, entonces por inspección vemos que sólo hay dos fuerzas que actúan sobre la misma, a saber, la fuerza de gravitación o peso de 20 lb, y la fuerza de la cuerda *BD*. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3.3*b*.

Si la cuerda *BD* se aisla, entonces hay sólo dos fuerzas que actúan sobre ella, figura 3.3*c*, a saber, la fuerza de la conexión en la parte superior de la caja, $\mathbf{F}_D$, y la fuerza $\mathbf{F}_B$ en *B* causada por el anillo. Como estas fuerzas tienden a *estirar* la cuerda, podemos decir que la cuerda está en *tensión*. (Éste debe ser el caso, pues fuerzas de compresión aplastarían la cuerda.)

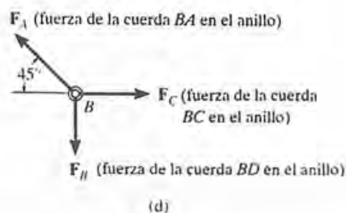
Cuando el anillo en *B* se aísla de su entorno, se ve que actúan tres fuerzas sobre él. Todas estas fuerzas son causadas por las cuerdas atadas al mismo, figura 3.3*d*. Obsérvese que $\mathbf{F}_B$, aquí mostrada, es igual pero opuesta a la que se muestra en la figura 3.3*c*, lo que es consecuencia de la tercera ley de Newton.



(b)



(c)



(d)

Fig. 3.3

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3.2

La esfera de la figura 3.4*a* tiene masa de 6 kg y está soportada como se aprecia en la figura. Trace un diagrama de cuerpo libre de la esfera y la unión en *C*.

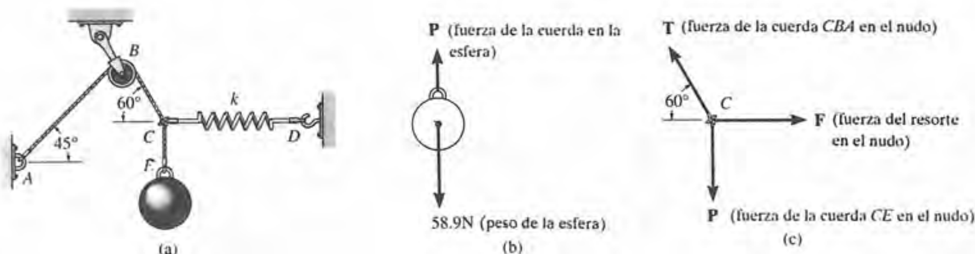


Fig. 3.4

SOLUCIÓN

Hay dos fuerzas que actúan sobre la esfera, a saber, su peso y la fuerza **P** de la cuerda *CE*. La esfera tiene un peso de (6 kg)(9.81 m/s²) = 58.9 N. Su diagrama se muestra en la figura 3.4*b*.

Al examinar vemos que hay tres fuerzas que actúan en el nudo en *C*. Son causadas por las cuerdas *CBA* y *CE*, y el resorte *CD*. Así, el diagrama de cuerpo libre del nudo es como se muestra en la figura 3.4*c*.

3.3 Sistemas de fuerzas coplanares

Muchos problemas de equilibrio de una partícula suponen un sistema de fuerzas coplanares. Si las fuerzas se encuentran en el plano $x-y$, pueden resolverse cada una en sus respectivas componentes **i**, **j** y la ecuación 3.1 se escribe como

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Para que sea satisfecha esta ecuación vectorial deben anularse las componentes x y y pues en caso contrario $\Sigma \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$. Por tanto, se requiere

http://librosysolucionarios.net

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \tag{3.3}$$

Estas ecuaciones escalares de equilibrio afirman que la suma algebraica de las componentes x, como de las componentes y, de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser igual a cero. Como consecuencia, las ecuaciones. 3.3 pueden resolverse para cuando más, dos incógnitas, generalmente representadas como ángulos y magnitudes de fuerzas que se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la partícula.

Notación escalar. Puesto que cada una de las dos ecuaciones de equilibrio requiere la resolución de las componentes vectoriales a lo largo de un eje especificado (x o y) vamos a usar notación escalar para representar las componentes al aplicar estas ecuaciones. Al hacerlo, el sentido de cada componente se toma en cuenta con un *signo algebraico* que corresponde al sentido de la punta de la flecha de la componente, como gráficamente se indica en el diagrama de cuerpo libre. En particular si una componente de fuerza tiene magnitud desconocida, entonces se puede *suponer* el sentido de la punta de la flecha. Dado que la magnitud de una fuerza es *siempre positiva*, entonces si la *solución* da un *escalar negativo*, esto indica que el sentido de la fuerza como aparece en el diagrama de cuerpo libre es opuesto al que se supone.

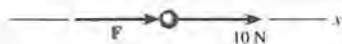


Fig. 3.5

Por ejemplo, considere el diagrama de cuerpo libre de la partícula sujeta a dos fuerzas como se ve en la figura 3.5. Por motivos de exposición, se *supone* que la *fuerza desconocida* **F** actúa hacia la derecha para mantener el equilibrio. Al aplicar la ecuación de equilibrio a lo largo del eje x se obtiene

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad +F + 10\text{ N} = 0$$

http://librosysolucionarios.net

Ambos términos son "positivos" dado que las dos fuerzas actúan en la dirección positiva del eje x como se indica por la flecha situada a un lado de la ecuación. Al resolver esta ecuación, $F = -10$ N. Aquí el *signo negativo* se refiere al hecho de que **F** en la figura 3.5 se muestra opuesta a la dirección real. En otras palabras, **F** debe actuar hacia la izquierda para mantener la partícula en equilibrio. Obsérvese que si el eje x positivo en la figura 3.5 se dirigiese hacia la izquierda, serían negativos ambos términos de la ecuación, pero nuevamente $F = -10$ N, indicando que F tendría que apuntar a la izquierda.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El procedimiento siguiente ofrece un método para resolver problemas de fuerzas coplanares que suponen una partícula en equilibrio:

Diagrama de cuerpo libre. Trace un diagrama de cuerpo libre de la partícula. Como se señaló en la sección 3.2, esto requiere que se escriban o indiquen en el diagrama todas las **magnitudes conocidas y desconocidas de las fuerzas**. El sentido de una fuerza de magnitud desconocida puede ser supuesto.

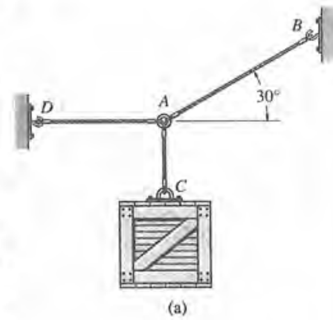
Ecuaciones de equilibrio. Trace los ejes x, y en cualquier dirección que resulte conveniente y aplique las dos ecuaciones de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, y $\Sigma F_y = 0$. Las componentes son positivas si se dirigen en el mismo sentido que los ejes, y negativas en caso contrario. Si hay más de dos incógnitas y el problema comprende un resorte, aplique $F = ks$ (ecuación 3.2) para relacionar la deformación s del resorte con la fuerza del mismo.

El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento de solución numéricamente.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3.3

Determine la tensión en las cuerdas AB y AD para el equilibrio de la caja de 10 kg de la figura 3.6*a*.



SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre de la caja se muestra en la figura 3.6*b*. Aquí el peso de la caja es (10 kg)(9.81 m/s²) = 98.1 N. En consecuencia, la fuerza de la cuerda CA sobre la caja debe también ser igual a 98.1 N para que esté en equilibrio. Por la tercera ley de Newton es igual pero opuesta en sentido al actuar en la cuerda CA, figura 3.6 *c* y, por tanto, la cuerda se mantiene en equilibrio por la fuerza de 98.1 N del anillo. La fuerza en las cuerdas AB y AD podrá obtenerse ahora investigando el equilibrio del anillo en A, porque esta "partícula" está sujeta a la acción de esas dos fuerzas.

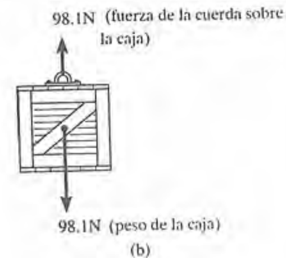
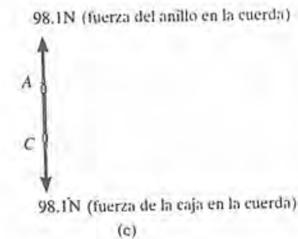


Diagrama de cuerpo libre. Como se aprecia en la figura 3.6*d*, hay tres fuerzas concurrentes que *actúan sobre el anillo*. Las tensiones $\mathbf{T}_B$ y $\mathbf{T}_D$ tienen magnitudes desconocidas pero direcciones conocidas. La cuerda AC ejerce una fuerza hacia abajo en A que es igual a 98.1 N . ¿Por qué?



Ecuaciones de equilibrio. Ya que las ecuaciones de equilibrio requieren sumas de las componentes x y las componentes y de cada fuerza, $\mathbf{T}_B$ debe resolverse en sus componentes correspondientes. Estas componentes, que aparecen en línea punteada en el diagrama de cuerpo libre, tienen magnitudes de T_B cos 30° y T_B sen 30°, respectivamente. Si se aplican las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_B \cos 30° - T_D = 0 \qquad (1)$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T_B \operatorname{sen} 30° - 98.1 = 0 \qquad (2)$$

Al resolver la ecuación (2) en T_B y sustituir en la ecuación (1) para obtener T_D, se tendrá

$$T_B = 196 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$T_D = 170 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

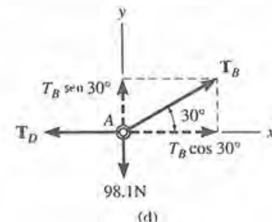
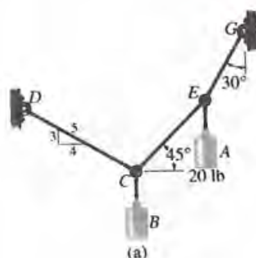


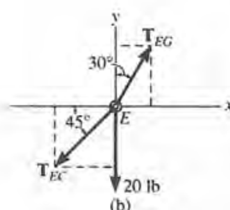
Fig. 3.6

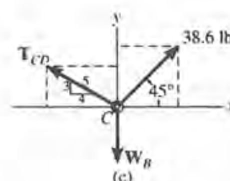
La precisión de estos resultados depende, desde luego, de la precisión de los datos; esto es, de las medidas geométricas y mediciones de cargas. Para el trabajo de ingeniería casi siempre, en un problema de este tipo, bastarían los datos con precisión de tres cifras significativas. También debe notarse que se ha hecho caso omiso de los pesos de las cuerdas, cosa por demás razonable, ya que no serían considerables en comparación con el peso de la caja.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3.4







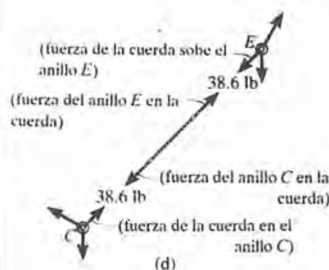


Fig. 3.7

Si el cilindro en A en la figura 3.7*a* tiene un peso de 20 lb, determine el peso del cilindro en B y la fuerza en cada cuerda requerida para mantener el sistema en la posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

Ya que se conoce el peso de A, se determinarán las tensiones desconocidas en las cuerdas EG y EC, investigando el equilibrio del anillo en E. ¿Por qué?

Diagrama de cuerpo libre. Hay tres fuerzas que actúan sobre E, como se ve en la figura 3.7*b*.

Ecuaciones de equilibrio. Al resolver cada fuerza en sus componentes x, y y, mediante trigonometría y aplicando las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_{EG} \text{ sen } 30° - T_{EC} \cos 45° = 0 \qquad (1)$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T_{EG} \cos 30° - T_{EC} \text{ sen } 45° - 20 = 0 \qquad (2)$$

Si se resuelve la ecuación 1 para obtener T_{EG} en términos de T_{EC} y se sustituye el resultado en la ecuación 2, nos permitirá obtener una solución de T_{EC}. Después se obtiene T_{EG} de la ecuación 1. Los resultados son

$$T_{EC} = 38.6 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$T_{EG} = 54.6 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Si se usa el resultado calculado para T_{EC}, puede ahora investigarse el equilibrio del anillo en C para determinar la tensión en CD y el peso de B.

Diagrama de cuerpo libre. Como vemos en la figura 3.7*c*, T_{EC} = 38.6 lb "tira" de C. La razón queda clara al trazar el diagrama de cuerpo libre de la cuerda CE y aplicar el equilibrio y el principio de que la acción es igual pero opuesta a la reacción (tercera ley de Newton), figura 3.7*d*.

Ecuaciones de equilibrio. Si se toma en cuenta que las componentes de $\mathbf{T}_{CD}$ son proporcionales a la pendiente de la cuerda como se define mediante el triángulo 3-4-5, tenemos

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 38.6 \cos 45° - (\tfrac{4}{5})T_{CD} = 0 \qquad (3)$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad (\tfrac{3}{5})T_{CD} + 38.6 \text{ sen } 45° - W_B = 0 \qquad (4)$$

Al Resolver la ecuación 3 y sustituir el resultado en la ecuación 4 se obtiene

$$T_{CD} = 34.1 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$W_B = 47.8 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3.5

Determine la longitud requerida de la cuerda AC en la figura 3.8*a*, de modo que la lámpara de 8 kg esté suspendida en la posición que se muestra. La longitud *indeformada* del resorte AB es l'_{AB} = 0.4 m, y el resorte tiene rigidez de k_{AB} = 300N/m.

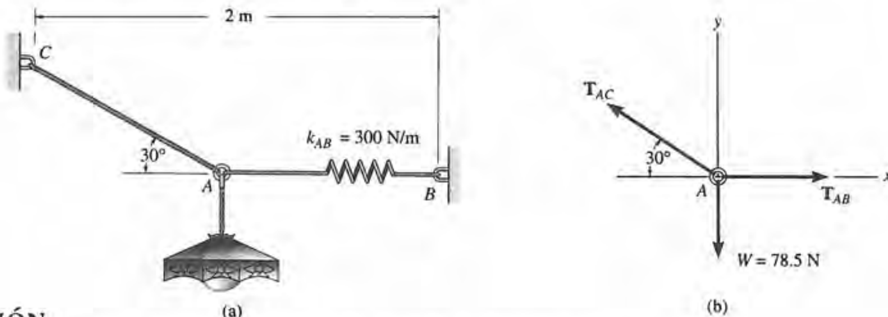


Fig. 3.8

SOLUCIÓN

Si la fuerza en el resorte es conocida, puede hallarse el estiramiento del resorte ($F = ks$). Si se emplea la geometría del problema, es posible calcular la longitud requerida de AC.

Diagrama de cuerpo libre. La lámpara tiene un peso W = 8(9.81) 78.5 N. El diagrama de cuerpo libre del anillo en A se muestra en la figura 3.8*b*.

Ecuaciones de equilibrio

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$ $\quad T_{AB} - T_{AC} \cos 30° = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad T_{AC} \text{ sen } 30° - 78.5 = 0$

Al resolver, obtenemos

$$T_{AC} = 157.0 \text{ N}$$
$$T_{AB} = 136.0 \text{ N}$$

El estiramiento del resorte AB es, por tanto,

$T_{AB} = k_{AB}\, s_{AB};$ $\quad 136.0 \text{ N} = 300 \text{ N/ m}(s_{AB})$

$$s_{AB} = 0.453 \text{ m}$$

de modo que la longitud extendida es

$$l_{AB} = l'_{AB} + s_{AB}$$
$$l_{AB} = 0.4 \text{ m} + 0.453 \text{ m} = 0.853 \text{ m}$$

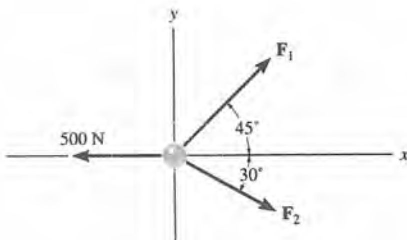
La distancia horizontal de C a B, figura 3.8*a*, requiere

$$2\text{m} = l_{AC} \cos 30° + 0.853 \text{ m}$$
$$l_{AC} = 1.32 \text{ m}$$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

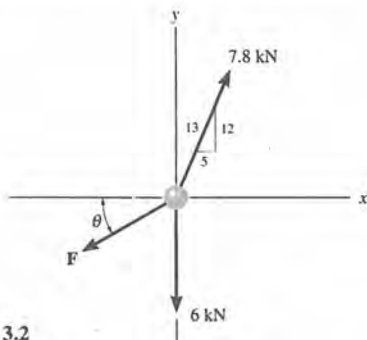
PROBLEMAS

3.1. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de modo que la partícula esté en equilibrio.



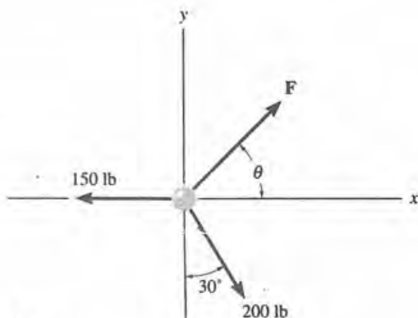
Prob. 3.1

3.2. Determine la magnitud y orientación de θ de manera que la partícula esté en equilibrio.



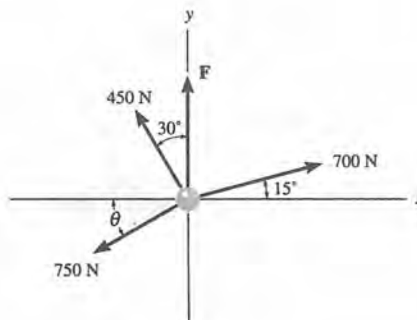
Prob. 3.2

3.3. Determine la magnitud y orientación θ de **F** de modo que la partícula esté en equilibrio.



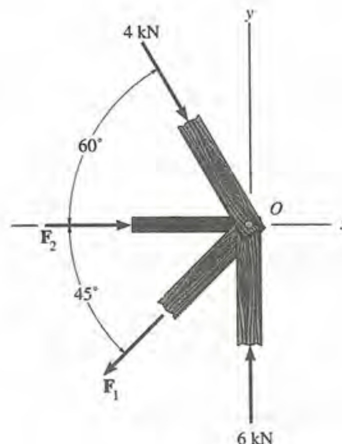
Prob. 3.3

***3.4.** La partícula está sujeta a la acción de cuatro fuerzas coplanares. Determine la magnitud de **F** y la orientación θ de la fuerza de 750 N para que haya equilibrio.



Prob. 3.4

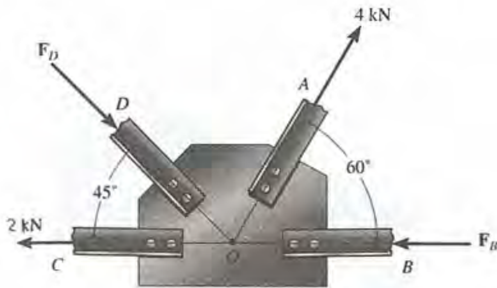
3.5. Los miembros de una armadura están conectados por una clavija en la unión O como se muestra. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ para el equilibrio.



Prob. 3.5

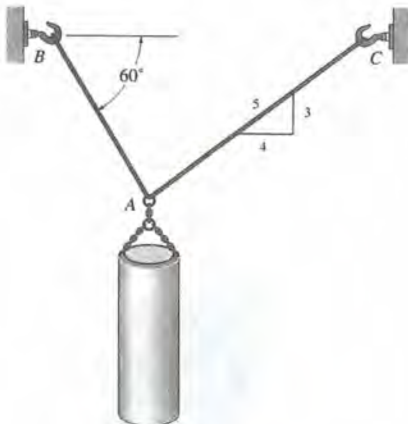
http://librosysolucionarios.net

3.6. La junta de una armadura metálica ligera se forma remachando cuatro escuadras a la placa de la armadura. Si se conoce la fuerza en los miembros A y C, determine las fuerzas F_B y F_D que actúan sobre los miembros B y D para el equilibrio. El sistema de fuerzas concurre en el punto O.



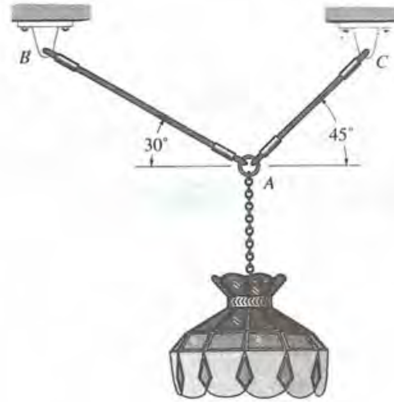
Prob. 3.6

3.7. Determine la carga máxima que puede suspenderse sin exceder una tensión de 780 lb en el cable AB o AC



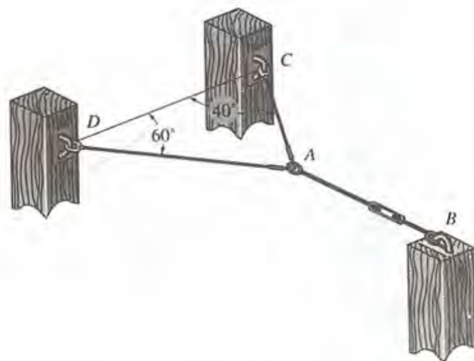
Prob. 3.7

*** 3.8.** Determine la fuerza en los cables AB y AC necesaria para soportar el artefacto luminoso de 15 kg.



Prob. 3.8

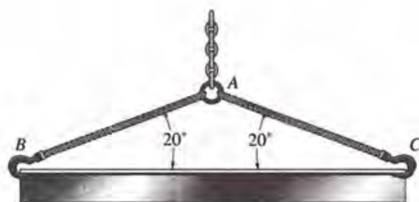
3.9. La acción de los cables consiste en reforzar la armadura estructural. Si el cable AB ejerce una fuerza de F_{AB} = 60 lb sobre el anillo A, determine la fuerza en los cables AC y AD.



Prob. 3.9

http://librosysolucionarios.net

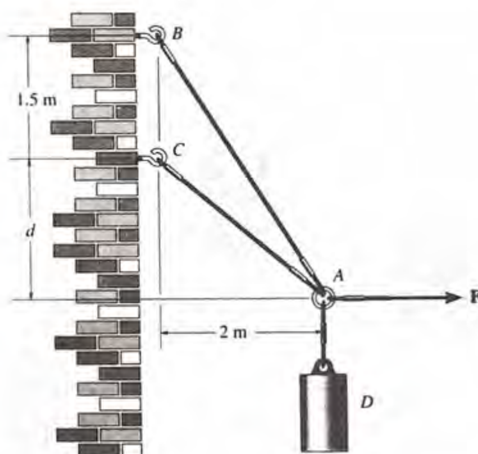
3.10. La eslinga sirve para sostener una viga que pesa 900 lb. Determine la fuerza en los cables *AB* y *AC* para el equilibrio.



Prob. 3.10

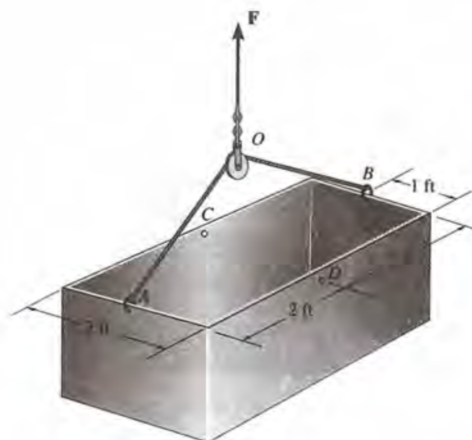
3.11. Determine las fuerzas en los cables *AC* y *AB* que son necesarias para mantener en equilibrio el cilindro de 20 kg. Considere $F = 300$ N y $d = 1$ m.

***3.12.** El cilindro *D* tiene una masa de 20 kg. Si se aplica una fuerza de $F = 100$ N horizontalmente al anillo *A*, determine la máxima dimensión *d* para que la fuerza en el cable *AC* sea cero.



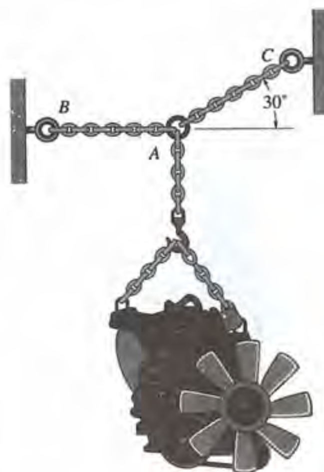
Probs. 3.11/3.12

3.13. Un tanque de 200 lb está suspendido por medio de un cable de 6 ft de longitud sujeto a los lados del tanque y pasa por la pequeña polea situada en *O*. Si el cable puede sujetarse en *A* y *B* o bien en *C* y *D*, determine cuál de las dos posibilidades da una tensión menor en el cable. ¿De cuánto es esta tensión?



Prob. 3.13

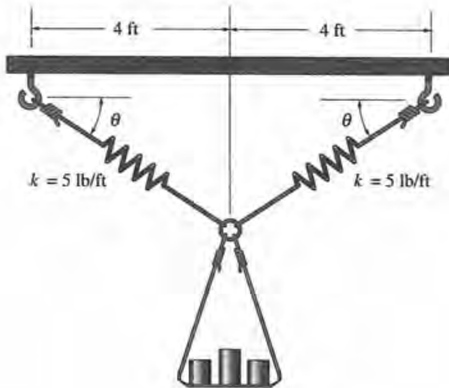
3.14. Determine el peso máximo del motor que puede ser soportado sin exceder una tensión de 450 lb en el cable *AB* y de 480 lb en el cable *AC*.



Prob. 3.14

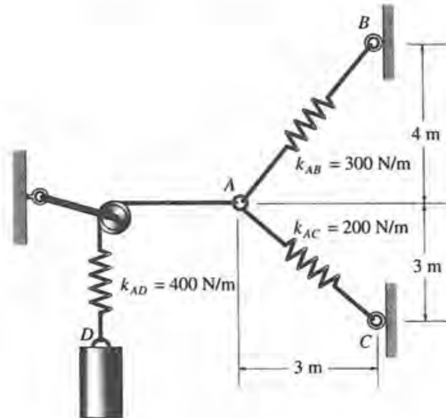
http://librosysolucionarios.net

3.15. El platillo y su contenido puestos en la balanza tienen un peso de 10 lb. Si cada resorte tiene una longitud indeformada de 4 ft y rigidez de $k = 5$ lb/ft, determine el ángulo θ para el equilibrio.



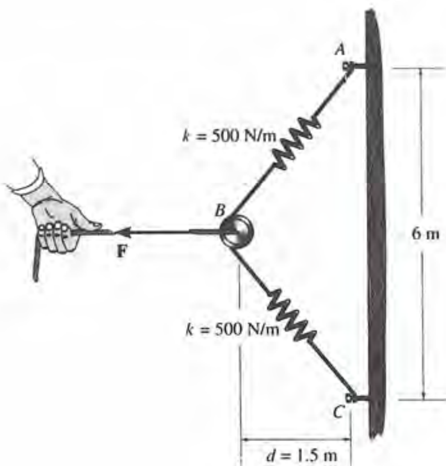
Prob. 3.15

3.17. Determine el alargamiento de cada resorte para el equilibrio del bloque de 20 kg. Los resortes aparecen en sus posiciones de equilibrio.



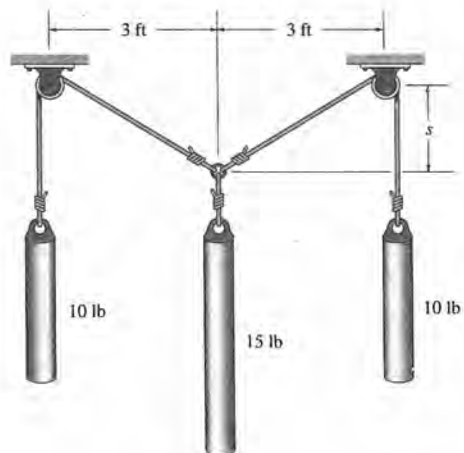
Prob. 3.17

* **3.16.** La cuerda elástica (o resorte) ABC tiene rigidez de 500 N/m y longitud no extendida de 6 m. Determine la fuerza horizontal **F** aplicada a la cuerda, atada a la *pequeña* polea B, de manera que el desplazamiento de la polea a partir de los soportes sea $d = 1.5$m.



Prob. 3.16

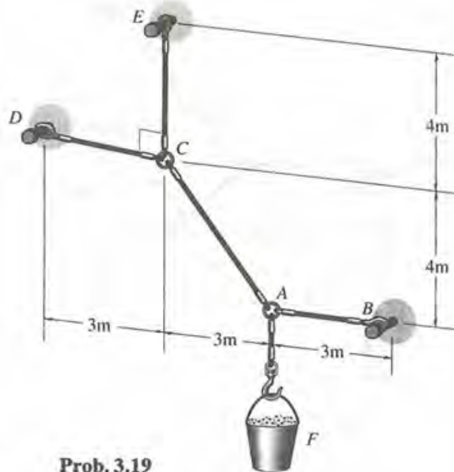
3.18. Se colocan tres cargas en las cuerdas ligeras e inextensibles. Si las cuerdas pasan por poleas pequeñas sin fricción, determine la distancia s para la posición de equilibrio.



Prob. 3.18

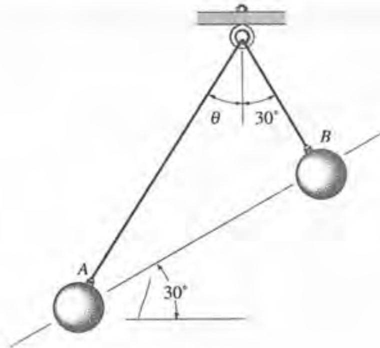
http://librosysolucionarios.net

3.19. Determine la fuerza que se requiere en cada cuerda para el equilibrio de la cubeta que tiene una masa de 60 kg.



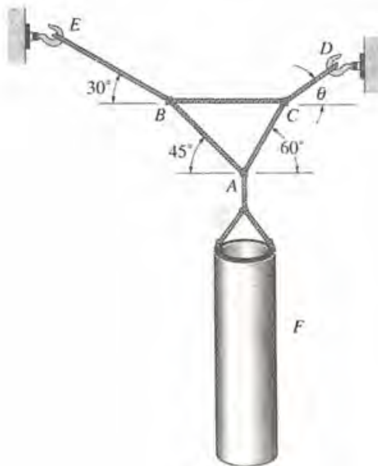
Prob. 3.19

3-21. Las dos esferas A y B tienen peso igual y están electrostáticamente cargadas de manera que la fuerza de repulsión que actúa entre ellas tiene magnitud de 0.006 lb y se dirige por la línea segmentada. Determine el ángulo θ, la tensión en las cuerdas, y el peso W de cada esfera.



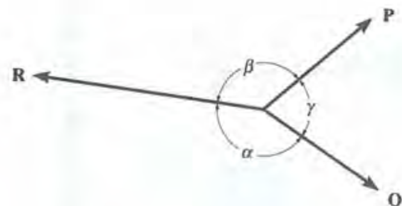
Prob. 3.21

* **3.20.** El tubo tiene un peso de 150 lb y está sostenido por las seis cuerdas atadas, como se muestra. Determine la tensión en cada cuerda y el ángulo θ en DC para el equilibrio. La cuerda BC es horizontal. *Sugerencia*: Analice el equilibrio de los nudos en el orden siguiente: A, B, C, usando los resultados previos.



Prob. 3.20

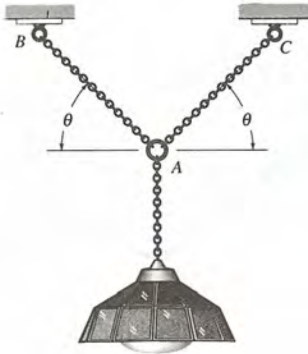
3.22. Demuestre el *teorema de Lami*. Éste afirma que si tres fuerzas concurrentes están en equilibrio, cada una es proporcional al seno del ángulo de las otras dos. Es decir, $P/\text{sen}\ \alpha = Q/\text{sen}\ \beta = R/\text{sen}\ \gamma$.



Prob. 3.22

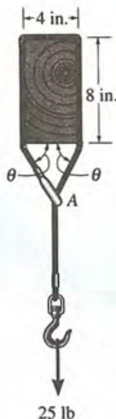
http://librosysolucionarios.net

3.23. Determine la tensión T en las cadenas AB y AC como función del ángulo θ. La lámpara tiene peso W. Marque los resultados como una curva que represente a T (eje vertical) contra θ (eje horizontal) para $0° \leq \theta \leq 90°$.



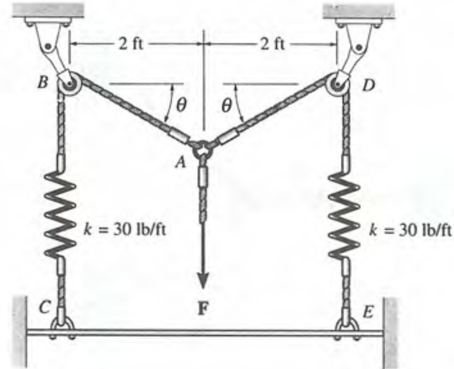
Prob. 3.23

***3.24.** El anillo en A está atado al extremo de la cuerda. Si la cuerda pasa sobre la viga y después por el anillo, determine el ángulo θ de la cuerda si en el otro extremo se encuentra suspendida una carga de 25 lb.



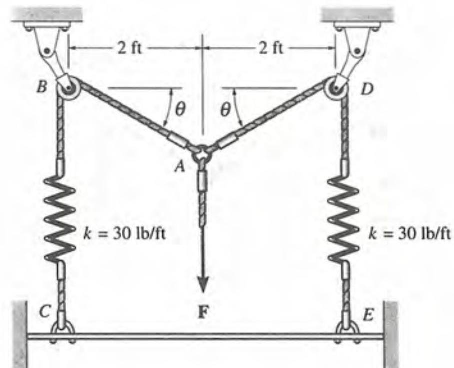
Prob. 3.24

3.25. Los resortes en el juego de cuerdas están inextendidos originalmente cuando $\theta = 0°$. Determine la tensión en cada cuerda cuando $F = 90$ lb. Ignore el tamaño de las poleas en B y D.



Prob. 3.25

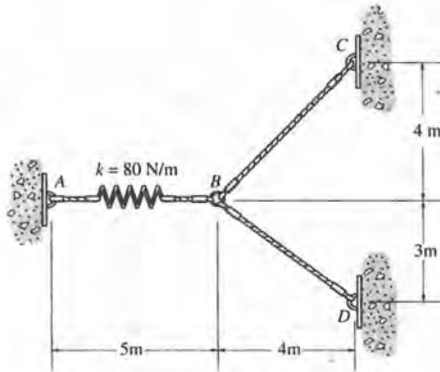
3.26. Los resortes en el juego de cuerdas están original-mente sin extender cuando $\theta = 0°$. Determine la fuerza vertical **F** requerida para desplazar el anillo en A de modo que $\theta = 30°$. Ignore el tamaño de las poleas en B y D.



Prob. 3.26

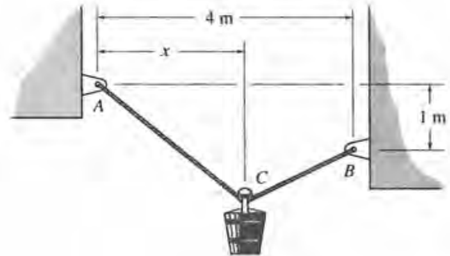
http://librosysolucionarios.net

3.27. El resorte tiene una rigidez de $k = 80$ N/*m* y longitud inextendida de 2 m. Determine la fuerza en los cables *BC* y *BD* cuando el resorte sea mantenido en la posición que se muestra.



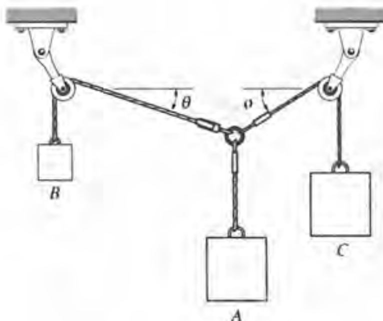
Prob. 3.27

3.29. Los extremos del cable de 6 m de longitud, *AB*, están atados a las paredes fijas. Si el cubo y su contenido tienen masa de 10 kg y se suspenden del cable por medio de una *pequeña* polea en *C*, determine la situación de equilibrio *x* de la polea.



Prob. 3.29

*** 3.28.** Se sostienen tres bloques usando cuerdas y poleas como puede verse en la ilustración. Si los bloques pesan $W_A = W$, $W_B = 0.25W$, y $W_C = W$, determine los ángulos θ y Φ para equilibrio.



Prob. 3.28

3.30. Un hombre intenta tirar el tronco en *C* utilizando tres cuerdas. Determine la dirección θ en la que deberá jalar la cuerda con una fuerza de 80 lb para ejercer una fuerza máxima sobre el tronco. Calcule la fuerza sobre el tronco. Determine también la dirección en que deberá ejercer su fuerza para maximizar la fuerza en la cuerda atada a *B*. ¿Qué valor tiene esta fuerza máxima?



Prob. 3.30

http://librosysolucionarios.net

3.4 Sistemas de fuerzas en tres dimensiones

En la sección 3.1 se mostró que el equilibrio de la partícula requiere

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

Si las fuerzas que actúan sobre la partícula se resuelven en sus componentes **i**, **j**, **k**, respectivas, podemos escribir

$$\Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Para asegurar que la ecuación 3.4 sea satisfactoria, debemos ver que las tres siguientes ecuaciones escalares en componentes también sean satisfechas:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Estas ecuaciones representan las *sumas algebraicas* de las componentes de fuerza x, y, z, que actúan sobre la partícula. Usándolas podemos resolver cuando más tres incógnitas, generalmente representadas como ángulos o magnitudes de fuerzas que aparecen en el diagrama de cuerpo libre de la partícula.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento proporciona un método para resolver problemas de equilibrio de fuerzas en tres dimensiones.

Diagrama de cuerpo libre. Trace un diagrama de cuerpo libre de la partícula y "etiquete" todas las fuerzas, conocidas y desconocidas, en este diagrama

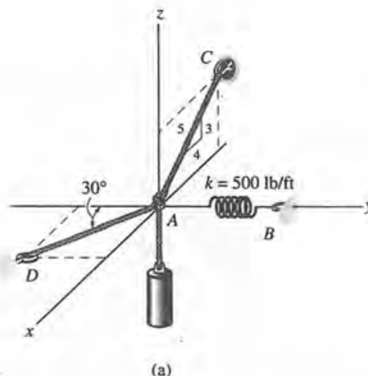
Ecuaciones de equilibrio. Establezca el sistema de ejes coordenados con el origen en la partícula y aplique las ecuaciones de equilibrio. Use las tres ecuaciones escalares 3.5 en los casos en que sea fácil resolver cada fuerza que actúa sobre la partícula en sus componentes x, y, z. Si esto se dificulta, exprese primeramente cada fuerza que actúa en la partícula en forma vectorial cartesiana y entonces sustituya estos vectores en la ecuación 3.4. Al escribir las componentes **i**, **j**, **k**, igualadas a cero, se generan las tres ecuaciones escalares 3.5. Si hay más de tres incógnitas y el problema incluye un resorte, considere el uso de $F = ks$ para relacionar la fuerza del resorte a la deformación s del resorte.

Los siguientes problemas de ejemplo ilustran numéricamente este procedimiento de solución.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3.6

El cilindro de 90 lb que se muestra en la figura 3.9*a* está sostenido por dos cables y un resorte de rigidez $k = 500$ lb/ft. Determine la fuerza en los cables y el alargamiento del resorte para que haya equilibrio. El cable *AD* se encuentra en el plano *x–y* y el cable *AC* en el plano *x–z*.

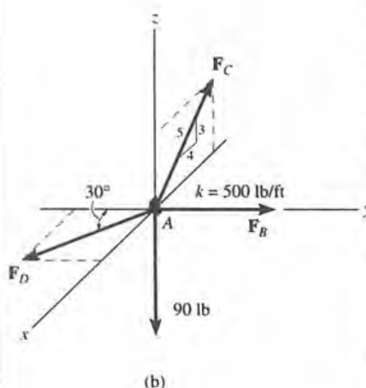


(a)

SOLUCIÓN

El alargamiento del resorte puede medirse una vez determinada la fuerza en el resorte.

Diagrama de cuerpo libre. Se elige la conexión en *A* para el análisis puesto que las fuerzas de los cables concurren ahí. Figura 3.9*b*.



(b)

Fig. 3.9

Las ecuaciones de equilibrio. Por inspección, se resuelve fácilmente cada fuerza en sus componentes *x*, *y*, *z*, y en consecuencia se aplican las tres ecuaciones escalares de equilibrio. si se consideran "positivas" las componentes que se dirijan por los ejes positivos, tenemos,

$\Sigma F_x = 0;\qquad F_D \operatorname{sen} 30° - \frac{4}{5}F_C = 0 \qquad (1)$

$\Sigma F_y = 0;\qquad -F_D \cos 30° + F_B = 0 \qquad (2)$

$\Sigma F_z = 0;\qquad \frac{3}{5}F_C - 90 \text{ lb} = 0 \qquad (3)$

Si se resuelve la ecuación 3 para F_C, la ecuación 1 para F_D, y por último la ecuación 2 para F_B, tenemos

$F_C = 150$ lb ***Resp.***

$F_D = 240$ lb ***Resp.***

$F_B = 208$ lb ***Resp.***

El alargamiento del resorte es por lo tanto

$$F_B = ks_{AB}$$
$$208 \text{ lb} = 500 \text{ lb/ft } (s_{AB})$$
$$s_{AB} = 0.416 \text{ ft}$$
Resp.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3.7

Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza **F** en la figura 3.10*a*, que se requieren para el equilibrio de la partícula *O*.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Sobre la partícula *O*, figura 3.10*b*, actúan cuatro fuerzas.

Ecuaciones de equilibrio. Se usará un análisis vectorial cartesiano para la solución con el propósito de formular las componentes de $\mathbf{F}_3$. Así,

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Si se expresa cada una de estas fuerzas en forma vectorial cartesiana, notando que las coordenadas de *B* son *B*(–2, –3, 6), tenemos

$$\mathbf{F}_1 = \{400\mathbf{j}\}\text{ N}$$
$$\mathbf{F}_2 = \{-800\mathbf{k}\}\text{ N}$$
$$\mathbf{F}_3 = F_3\mathbf{u}_B = F_3\left(\frac{\mathbf{r}_B}{r_B}\right) = 700\text{ N}\left[\frac{-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}}\right]$$
$$= \{-200\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 600\mathbf{k}\}\text{ N}$$
$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$$

Sustituyendo en la ecuación 1 se tendrá

$$400\mathbf{j} - 800\mathbf{k} - 200\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 600\mathbf{k} + F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Al igualar las respectivas componentes **i**, **j**, **k**, a cero, tenemos

$$\Sigma F_x = 0; \qquad -200 + F_x = 0 \qquad F_x = 200\text{ N}$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad 400 - 300 + F_y = 0 \qquad F_y = -100\text{ N}$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad -800 + 600 + F_z = 0 \qquad F_z = 200\text{ N}$$

Así,

$$\mathbf{F} = \{200\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\}\text{ N}$$

$$F = \sqrt{(200)^2 + (-100)^2 + (200)^2} = 300\text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

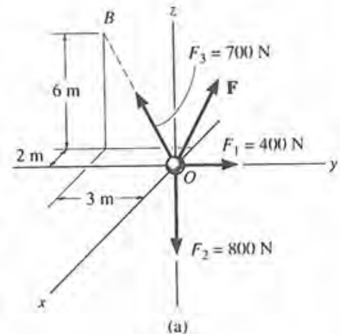
$$\mathbf{u}_F = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{200}{300}\mathbf{i} - \frac{100}{300}\mathbf{j} + \frac{200}{300}\mathbf{k}$$

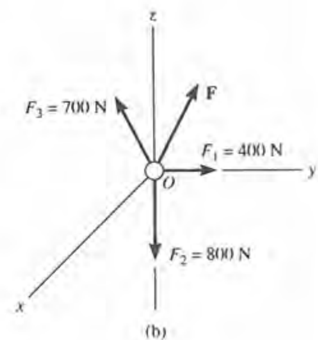
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{200}{300}\right) = 48.2° \qquad \textit{Resp.}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-100}{300}\right) = 110° \qquad \textit{Resp.}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{200}{300}\right) = 48.2° \qquad \textit{Resp.}$$

La magnitud y dirección correcta de **F** se muestran en la figura 3.10*c*.





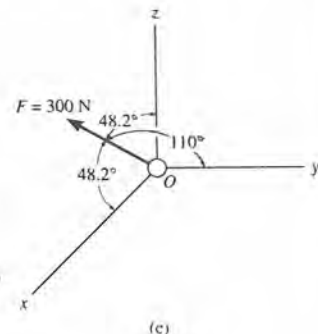
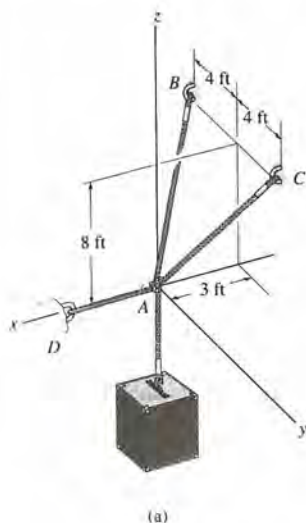


Fig. 3.10

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3.8

Determine la fuerza desarrollada en cada uno de los cables que sostienen la caja de 40 lb de la figura 3.11*a*.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 3.11*b*, se considera el diagrama de cuerpo libre *A* para "exponer" las tres fuerzas desconocidas en los cables y obtener por ese medio sus magnitudes.

Ecuaciones de equilibrio

$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0};$ $$\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Ya que las coordenadas de los puntos *B* y *C* son *B* (–3, –4, 8) y *C* (–3, 4, 8), tenemos

$$\mathbf{F}_B = F_B\left[\frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}}\right]$$

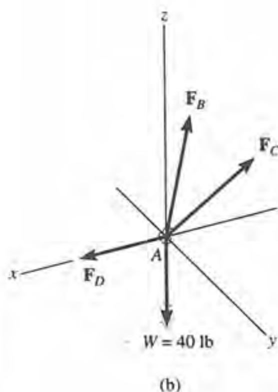
$$= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C\left[\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}}\right]$$

$$= -0.318F_C\,\mathbf{i} + 0.424F_C\,\mathbf{j} + 0.848F_C\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$

$$\mathbf{W} = -40\mathbf{k}$$



(b)

Fig. 3.11

Al sustituir estas fuerzas en la ecuación 1 se tiene

$$-0.318F_B\,\mathbf{i} - 0.424F_B\,\mathbf{j} + 0.848F_B\,\mathbf{k} - 0.318F_C\,\mathbf{i} + 0.424F_C\,\mathbf{j} + 0.848F_C\,\mathbf{k} + F_D\,\mathbf{i} - 40\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Si se igualan las respectivas componentes **i**, **j**, **k** a cero:

$\Sigma F_x = 0;$ $$-0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0 \qquad (2)$$
$\Sigma F_y = 0;$ $$-0.424F_B + 0.424F_C = 0 \qquad (3)$$
$\Sigma F_z = 0;$ $$0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0 \qquad (4)$$

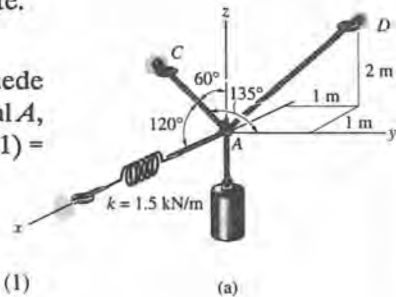
La ecuación 3 afirma que $F_B = F_C$. Así, al resolver la ecuación 4 para obtener F_B y F_C y sustituir el resultado en la ecuación 2 para obtener F_D, tenemos

$$F_B = F_C = 23.6 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$
$$F_D = 15.0 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3.9

El cilindro de 100 kg de la figura 3.12*a* está sostenido por tres cuerdas, una de las cuales está unida a un resorte. Determine la tensión en cada cuerda y el alargamiento del resorte.



(a)

SOLUCIÓN

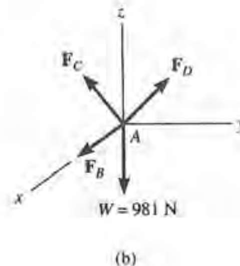
Diagrama de cuerpo libre. La fuerza en cada cuerda puede obtenerse si se analiza el diagrama del cuerpo libre puntual *A*, figura 3.12*b*. ¿Por qué? El peso del cilindro es $W = 100(9.81) = 981$ N.

Ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Cada uno de estos vectores puede expresarse en forma vectorial cartesiana. si se usa la ecuación 2.11 para F_C, y se observa el punto $D(-1, 2, 2)$ para F_D, tenemos

$$\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{i}$$
$$\mathbf{F}_C = F_C \cos 120°\mathbf{i} + F_C \cos 135°\mathbf{j} + F_C \cos 60°\mathbf{k}$$
$$= -0.5F_C\,\mathbf{i} - 0.707F_C\,\mathbf{j} + 0.5F_C\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_D = F_D\left[\frac{-1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}}\right]$$
$$= -0.333F_D\,\mathbf{i} + 0.667F_D\,\mathbf{j} + 0.667F_D\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{W} = -981\mathbf{k}$$



(b)

Fig. 3.12

Si se sustituyen estas fuerzas en la ecuación 1, se obtiene

$$F_B\mathbf{i} - 0.5F_C\,\mathbf{i} - 0.707F_C\,\mathbf{j} + 0.5F_C\,\mathbf{k} - 0.333F_D\,\mathbf{i} + 0.667F_D\,\mathbf{j} + 0.667F_D\,\mathbf{k} - 981\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Igualando a cero las componentes respectivas correspondientes a **i, j, k**

$$\Sigma F_x = 0; \qquad F_B - 0.5F_C - 0.333F_D = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad -0.707F_C + 0.667F_D = 0 \qquad (3)$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad 0.5F_C + 0.667F_D - 981 = 0 \qquad (4)$$

Al resolver la ecuación 3 para F_D en términos de F_C y sustituir en la ecuación 4 se tiene F_C. F_D se determina de la ecuación 3. Finalmente, al sustituir los resultados en la ecuación 2 se tendrá F_B. Así

$$F_C = 813 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$F_D = 862\text{N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$F_B = 693.7\text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

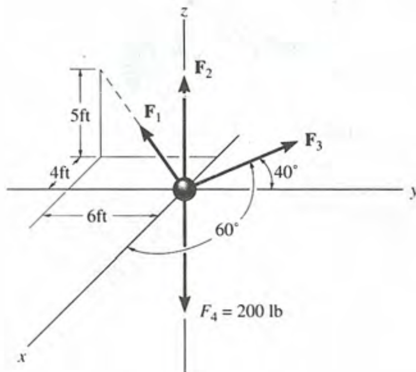
El alargamiento del resorte es, por tanto,

$$F = ks; \qquad 693.7 = 1500s$$
$$s = 0.462 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

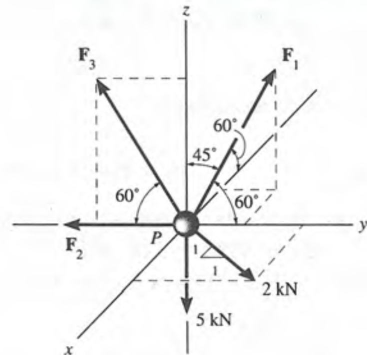
PROBLEMAS

3.31. Determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, y $\mathbf{F}_3$ para el equilibrio de la partícula. La fuerza $\mathbf{F}_3$ se localiza en el octante donde las tres coordenadas x, y, z, son positivas.



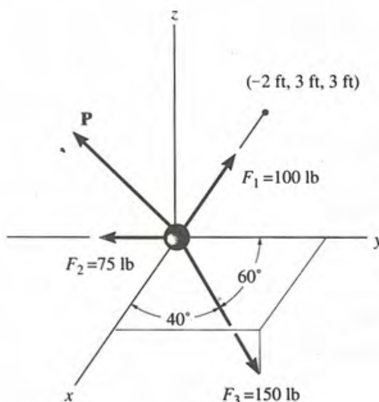
Prob. 3.31

3.33. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, y $\mathbf{F}_3$ para el equilibrio de la partícula.



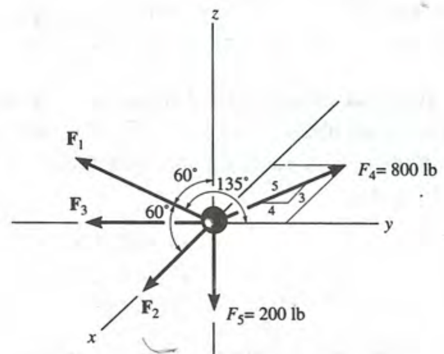
Prob. 3.33

***3.32.** Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza **P** que se necesita para mantener el sistema de fuerzas concurrentes en equilibrio.



Prob. 3.32

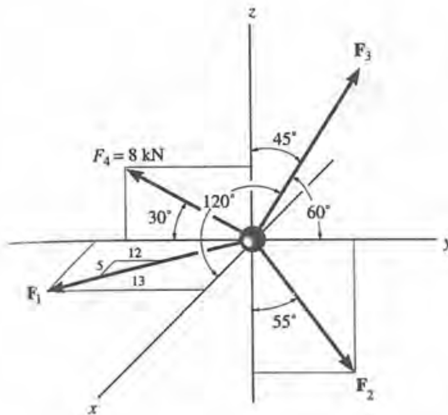
3.34. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, y $\mathbf{F}_3$ para el equilibrio de la partícula.



Prob. 3.34

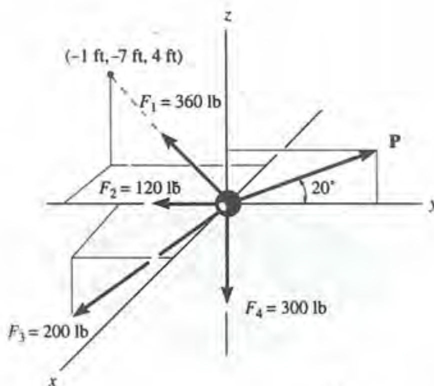
http://librosysolucionarios.net

3.35. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ para el equilibrio de la partícula.



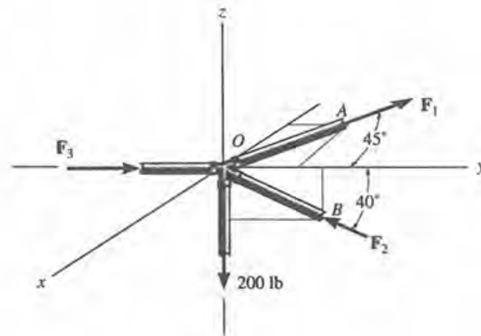
Prob. 3.35

***3.36.** Determine la magnitud de **P** y la orientación de la fuerza de 200 lb que se necesita para mantener el sistema concurrente de fuerzas en equilibrio.



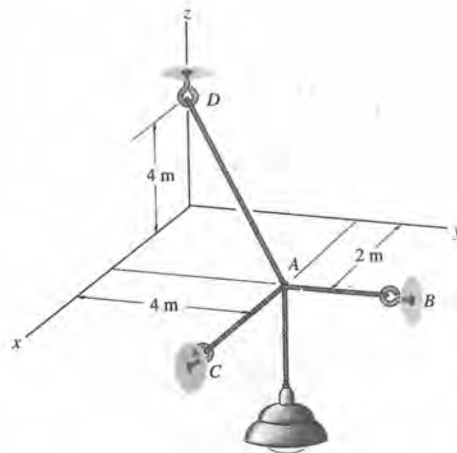
Prob. 3.36

3.37. La unión de una estructura espacial está sujeta a las cuatro fuerzas de sus cuatro elementos. El elemento OA está en el plano x–y y el elemento OB en el plano y–z. Determine las fuerzas que actúan en cada uno de los miembros para que haya equilibrio de la unión.



Prob. 3.37

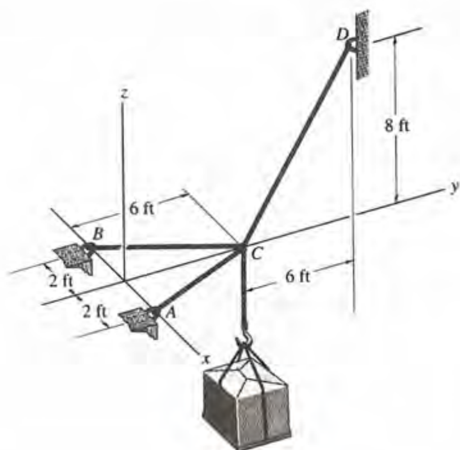
3.38. Los tres cables sostienen la lámpara de 8 kg. Determine la fuerza desarrollada en cada cable para el equilibrio.



Prob. 3.38

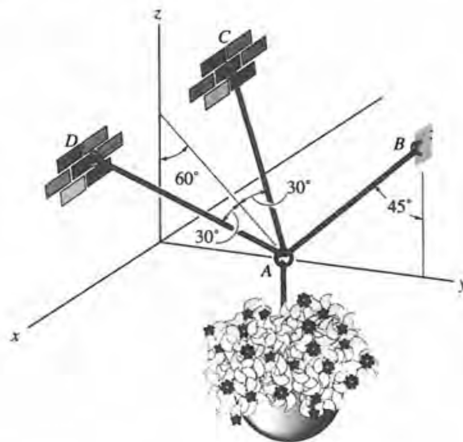
http://librosysolucionarios.net

3.39. Determine la fuerza que se requiere en cada cable para sostener la carga de 500 lb.



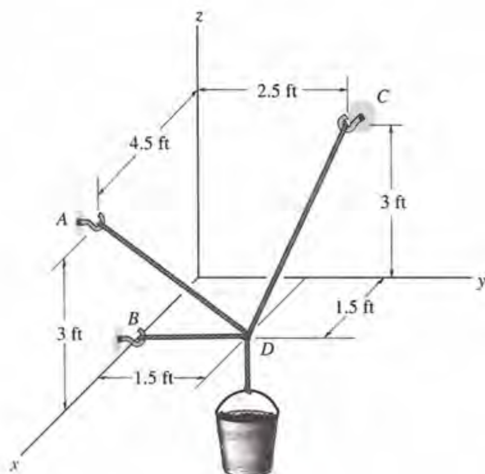
Prob. 3.39

3.41. La maceta de 25 kg está sostenida en *A* por los tres cables. Determine la fuerza en cada cable para que haya equilibrio.



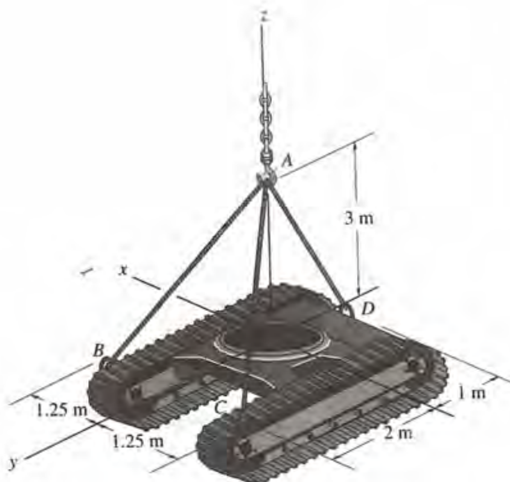
Prob. 3.41

*** 3.40.** Si el cubo y su contenido pesan 20 lb , determine la fuerza en los cables de soporte *DA*, *DB* y *DC*.



Prob. 3.40

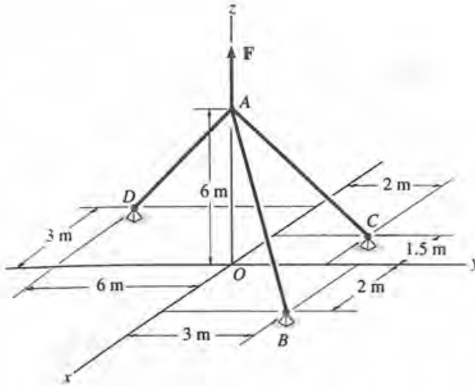
3.42. Determine la fuerza en cada uno de los tres cables requerida para elevar el tractor que tiene una masa de 8 Mg.



Prob. 3.42

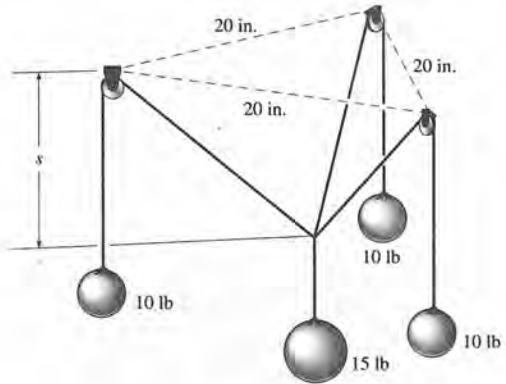
http://librosysolucionarios.net

3.43. Si el cable AB se somete a una tensión de 700 N, determine la tensión en los cables AC y AD y la magnitud de la fuerza vertical **F**.



Prob. 3.43

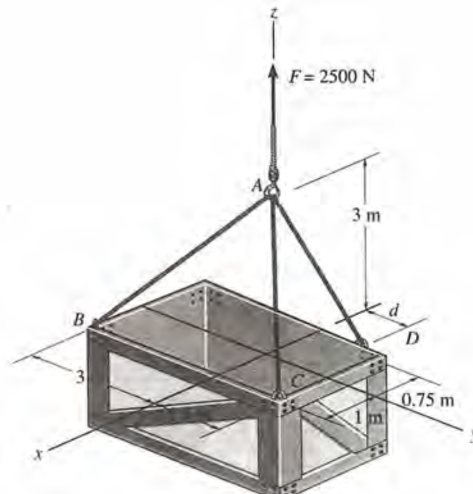
*3.44. El sistema de cables y poleas sostiene tres esferas de 10 lb y una de 15 lb. Si las poleas no tienen fricción y sus centros están situados en el mismo plano horizontal, determine la flecha s para equilibrio del sistema.



Prob. 3.44

PROBLEMAS DE REPASO

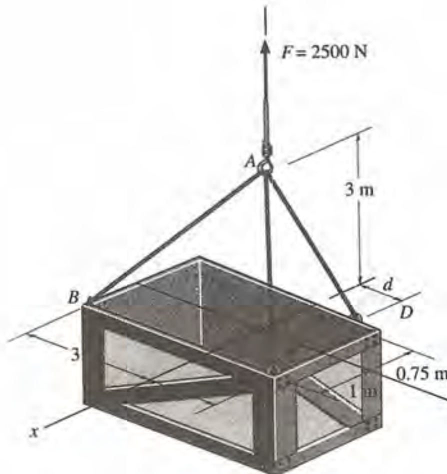
3.45. Una caja se levanta desde la cala de un barco por medio del juego de cables que se ve en la figura. Si se aplica una fuerza vertical de 2500 N en el gancho en A, determine la tensión en cada cable para que haya equilibrio. Considérese d = 1 m.



Prob. 3.45

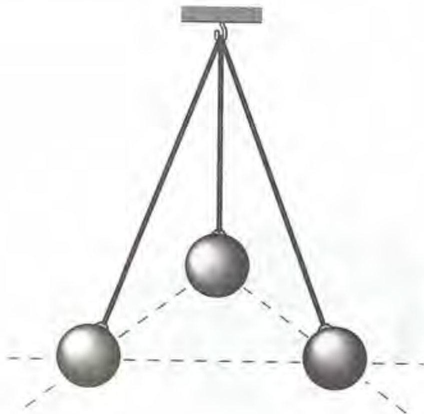
http://librosysolucionarios.net

3.46. La caja se eleva desde la bodega de un barco mediante el sistema de cables que se muestra. Si se aplica una fuerza de 2500 N en el gancho que está en A, determine la tensión en cada uno de los cables para que haya equilibrio. Considérese $d = 1.5$ m.



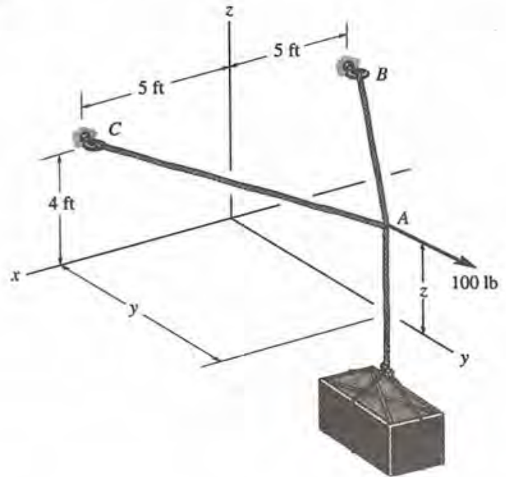
Prob. 3.46

3.47. Tres bolas cargadas electrostáticamente, cada una con peso de $0.44(10^{-3})$ lb, están suspendidas desde un punto común. Si la fuerza electrostática de repulsión que actúa entre cualquiera de las bolas es de $1(10^{-3})$ lb con la misma dirección que la recta que une las bolas, determine la tensión en cada cuerda para que haya equilibrio.

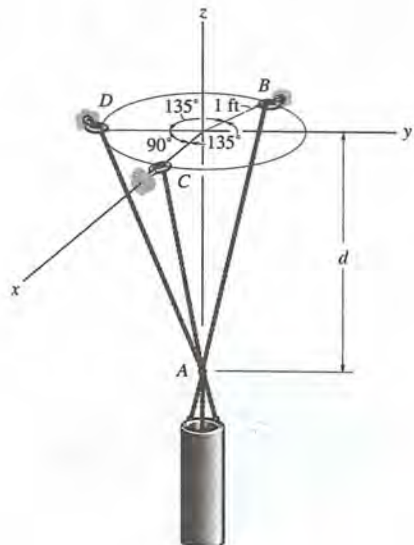


Prob. 3.47

*** 3.48.** Una fuerza de 100 lb mantiene la caja de 400 lb en equilibrio. Determine las coordenadas $(0, y, z)$ del punto A si la tensión es 700 lb en cada cuerda, AB y AC.



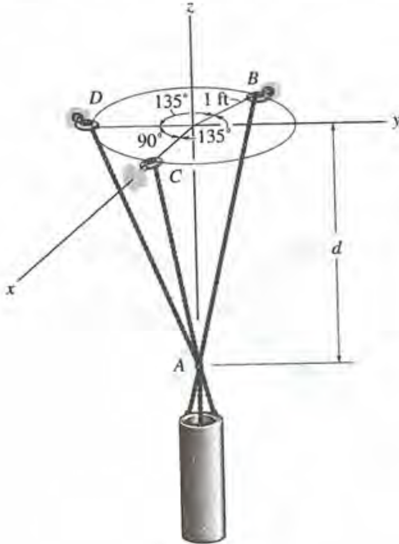
3.49. El cilindro de 800 lb se sostiene con tres cadenas, como se ve en la ilustración. Determine la fuerza en cada cadena para el equilibrio del punto A. Suponga que $d = 2.4$ ft.



Prob. 3.49

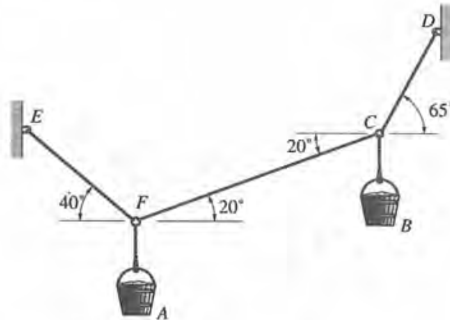
http://librosysolucionarios.net

3-50. El cilindro de 800 lb está suspendido mediante tres cadenas como se ve en la ilustración. Determine la fuerza en cada una de las cadenas para el equilibrio del punto A. Suponga que $d = 1$ ft.



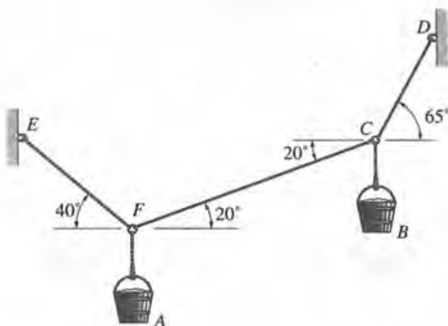
Prob. 3.50

*** 3.52.** Las cuerdas tienen suspendidos dos cubos en la posición de equilibrio que se muestra. Determine el peso del cubo A si el B tiene un peso de 20 lb.



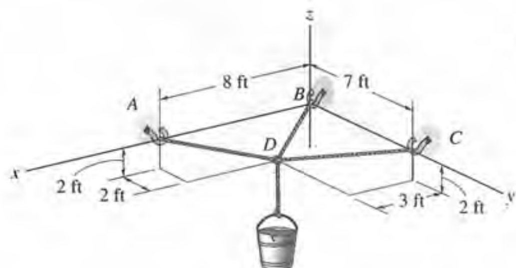
Prob. 3.52

3.51. Las cuerdas tienen suspendidos dos cubos en la posición de equilibrio, como se muestra. Determine el peso del cubo B. El cubo A tiene un peso de 60 lb.



Prob. 3.51

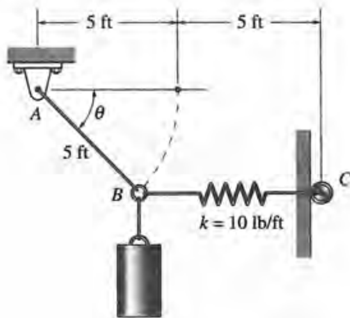
3.53. El cubo tiene un peso de 20 lb. Determine la tensión desarrollada en cada cuerda para que haya equilibrio.



Prob. 3.53

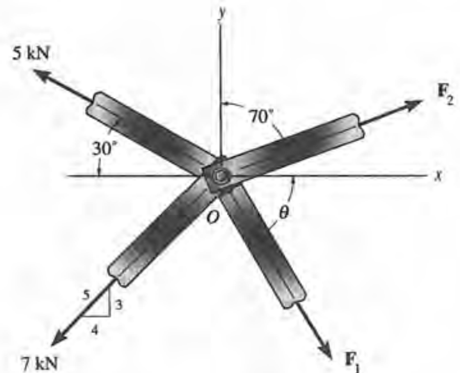
http://librosysolucionarios.net

*3.54. La cuerda AB, de 5 ft de longitud, está sostenida del extremo B de un resorte que tiene longitud sin elongación de 5 ft. El otro extremo del resorte está sometido a un rodamiento C de modo que el resorte permanece horizontal al elongarse. Si en B se suspende un peso de 10 lb, determine el ángulo θ de la cuerda AB para el equilibrio.



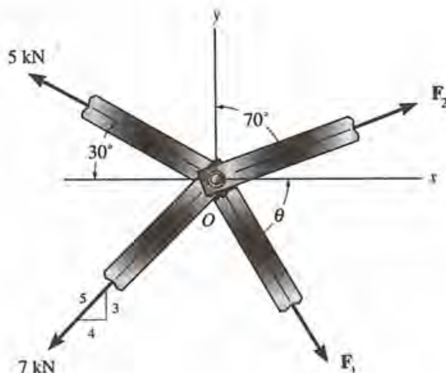
Prob. 3.54

*3.56. Los miembros de una armadura se unen por medio de una clavija situada en O. Determine la magnitud de F_1 y su ángulo θ para el equilibrio. Considere que $F_2 = 6$ kN.



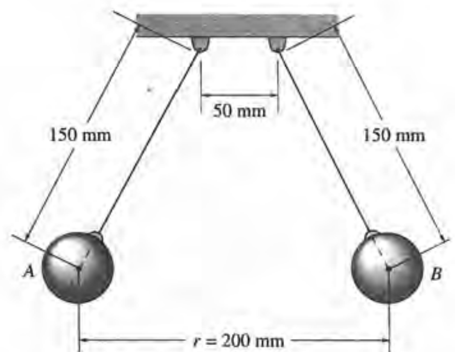
Prob. 3.56

3.55. Los miembros de una armadura se unen en la clavija del punto O. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ para el equilibrio. Considere $\theta = 60°$.



Prob. 3.55

3.57. Dos bolas electrostáticamente cargadas, cada una con una masa de 0.15 g, se suspenden de hilos finos de misma longitud. Determine la magnitud de la fuerza horizontal resultante de repulsión **F** que actúa en cada bola si la distancia medida entre ellas es r = 200 mm.



Prob. 3.57

http://librosysolucionarios.net

4 Resultantes de un sistema de fuerzas

En el capítulo 3 se mostró que la condición para el equilibrio de una partícula o de un sistema de fuerzas concurrentes requiere simplemente que la resultante del sistema de fuerzas sea igual a cero. En el capítulo 5 se mostrará que tal restricción es necesaria, pero no suficiente para el equilibrio de un cuerpo rígido. Debe imponerse una restricción, además, en relación con la no concurrencia del sistema de fuerzas aplicado, para llegar al concepto de *momento*. En este capítulo se presentará una definición formal del concepto de momento y se explicarán métodos para determinar el momento de una fuerza respecto a un punto o un eje. También se presentarán métodos para determinar las resultantes de sistemas no concurrentes de fuerzas. Éste es un desarrollo importante, ya que la aplicación de las ecuaciones para la simplificación de sistemas de fuerzas se asemeja a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido. Además, las resultantes de un sistema de fuerzas influirán en el estado de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido, de la misma manera que el sistema de fuerzas, y podemos, por lo tanto, estudiar el comportamiento de un cuerpo rígido más simplemente, usando las resultantes.

4.1 El producto cruz

El momento de una fuerza se formulará usando vectores cartesianos en la sección siguiente. Antes de hacerlo es sin embargo, necesario ampliar nuestro conocimiento del álgebra vectorial e introducir la multiplicación vectorial denominada producto cruz o producto vectorial.

http://librosysolucionarios.net

El *producto cruz* de dos vectores **A** y **B** da un vector **C** que se escribe como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

lo cual se lee "**C** igual a **A** cruz **B**".

Magnitud. La *magnitud* de **C** se define como el producto de las magnitudes de **A** y de **B** y el seno del ángulo θ entre sus puntos de aplicación ($0° \leq \theta \leq 180°$). Por lo anterior, $C = AB$ sen θ.

Dirección. El vector **C** tiene una *dirección* que es perpendicular al plano que contiene a **A** y **B**, de tal manera que la dirección y el sentido quedan especificados por la "regla del tirabuzón" que se explicó en el tratamiento de los "sistemas de coordenadas derechos"; esto es, cerrando los dedos de la mano derecha, del vector **A** (cruz) hacia el vector **B**, el pulgar apuntará entonces en la dirección y sentido de **C**, como se ve en la figura 4.1.

Al conocer la magnitud, la dirección y el sentido de **C** podemos escribir

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \text{ sen } \theta)\mathbf{u}_C \qquad (4.1)$$

donde el escalar AB sen θ define la *magnitud* de **C** y el vector unitario $\mathbf{u}_C$ define la *dirección* de **C**. Los términos de la ecuación 4.1 se ilustran gráficamente en la figura 4.2.

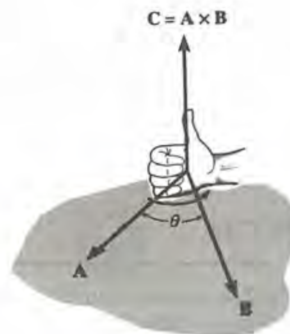


Fig. 4.1

http://librosysolucionarios.net

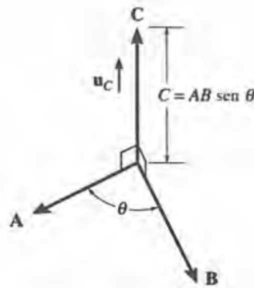


Fig. 4.2

Leyes de operación

1. La ley conmutativa *no* es válida; es decir

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Sino que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Esto se muestra en la figura 4.3 con el uso de la regla del tirabuzón. El producto vectorial **B** × **A** da un vector que actúa en la dirección opuesta a la de **C**; es decir, **A** × **B** = –**C**.

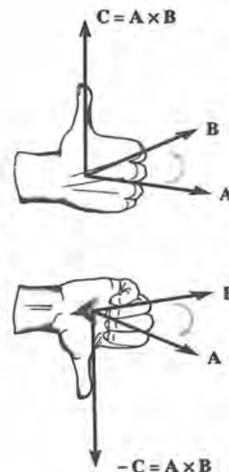


Fig. 4.3

2. Multiplicación por un escalar:

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})a$$

Esta propiedad se demuestra con facilidad, puesto que la magnitud del vector resultante ($|a|AB$ sen θ) su dirección y sentido son las mismas en cada caso.

3. La ley distributiva:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$$

La demostración de esta identidad se deja como ejercicio (véase el Prob. 4.1). Es importante notar que debe mantenerse el *orden de los factores* en el producto cruz, o producto vectorial, ya que este tipo de producto no es conmutativo.

Formulación en términos de vectores cartesianos. La ecuación 4.1 puede usarse para encontrar el producto cruz de un par de vectores cartesianos unitarios. Por ejemplo, para encon-

http://librosysolucionarios.net

trar $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, la *magnitud* del vector resultante es $(i)(j)(\text{sen } 90°) = (1)(1)(1) = 1$, y su *dirección y sentido* se determinan por la regla del tirabuzón. Como se muestra en la figura 4.4, el vector resultante apunta en la dirección $+\mathbf{k}$. Así, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (1)\mathbf{k}$. Análogamente,

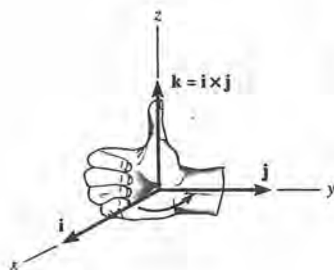


Fig. 4.4

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array}$$

Estos resultados *no* habrá que memorizarlos; en lugar de eso habrá que entender claramente cómo se obtienen, usando la regla del tirabuzón y la definición de producto cruz. La figura 4.5 ofrece una nemotecnia para el propósito de recordar estos resultados. En dicha figura, se indica que el producto cruz de dos vectores cartesianos unitarios alrededor del círculo en el *sentido contrario al de las manecillas del reloj* dará como resultado el tercer vector unitario *positivo*, por ejemplo, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Si el movimiento tiene el *otro sentido*, el producto dará el tercer vector, pero afectado del signo "menos"; ejemplo, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

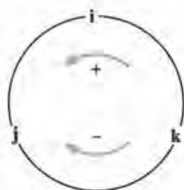


Fig. 4.5

Consideremos ahora el producto cruz de dos vectores cualesquiera, **A** y **B**, expresados en forma vectorial cartesiana. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}) \times (B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Al realizar las operaciones del producto cruz y combinando términos se obtiene

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k} \quad (4.2)$$

Esta igualdad puede escribirse también en forma más compacta, usando un determinante como sigue

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

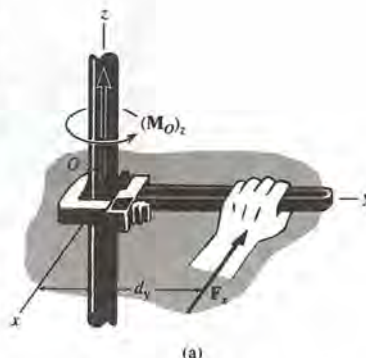
Así, para encontrar el producto cruz de dos vectores cartesianos **A** y **B**, es necesario desarrollar el determinante cuyo primer renglón tiene como elementos los tres vectores unitarios **i**, **j** y **k** y cu-

http://librosysolucionarios.net

yos renglones segundo y tercero consisten en las coordenadas x, y, z de los vectores **A** y **B**, respectivamente. *

4.2 Momento de una fuerza. Formulación escalar

El *momento* de una fuerza respecto a un punto o un eje proporciona una medida de la tendencia de la fuerza a causar la rotación de un cuerpo alrededor del punto o el eje. Por ejemplo, consideremos la fuerza horizontal $\mathbf{F}_x$, que actúa perpendicularmente al mango de la llave y se sitúa a una distancia d_y del punto O, figura 4.6*a*. Se ve que esta fuerza tiende a causar el giro del tubo alrededor del eje z y, por tanto, la fuerza crea un momento $(\mathbf{M}_O)_z$ respecto al eje. Cuanto mayor sea la fuerza o la distancia d_y, tanto mayor será el efecto. Esta tendencia a la rotación causada por $\mathbf{F}_x$ suele llamarse *momento de torsión* o simplemente *momento* $(\mathbf{M}_O)_z$ (en la actualidad también suelen llamarla "torque" o "torca"). En particular, obsérvese que el eje del momento (z) es perpendicular al plano sombreado ($x-y$) que contiene a $\mathbf{F}_x$ y d_y y que este eje interseca el plano en el punto O. Ahora consideremos aplicar la fuerza $\mathbf{F}_z$ a la llave, figura 4.6*b*. Esta fuerza *no* girará el tubo alrededor del eje z. En lugar de ello, tiende a girarlo alrededor del eje x. Téngase en mente que si bien no es posible "girar" el tubo en esta forma, $\mathbf{F}_z$ de todos modos crea la *tendencia* a la rotación y, por lo tanto, se produce el momento



(a)

Fig. 4.6

* Un determinante que tiene tres renglones y tres columnas puede desarrollarse usando tres "menores", cada uno de los cuales se multiplica por uno de los tres términos del primer renglón. Hay cuatro elementos en cada menor, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Por *definición*, esta notación representa los términos $(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$, que es simplemente el producto de los dos elementos de la diagonal que se dirige abajo a la derecha $(A_{11}A_{22})$ *menos* el producto de los elementos que están en la otra diagonal $(A_{12}A_{21})$. Para un determinante de 3 × 3, como la ecuación 4.3, los tres menores pueden generarse de acuerdo con el siguiente esquema :

Para el elemento **i**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y)$

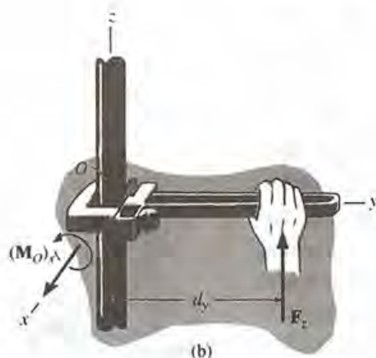
Para el elemento **j**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x)$

Para el elemento **k**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$

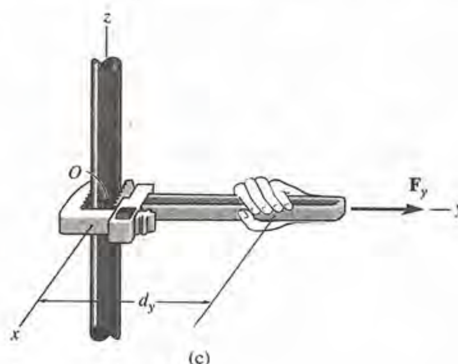
Sumando los resultados y observando que el elemento **j** debe estar afectado de un signo menos, se obtiene la forma desarrollada de **A** × **B** dada en la Ec. 4.2.

http://librosysolucionarios.net

$(\mathbf{M}_O)_x$. Como anteriormente, la fuerza y la distancia d_y se encuentran en el plano $(y-z)$ que es perpendicular al eje de momento (x). Por último, si se aplica una fuerza $\mathbf{F}_y$ a la llave, figura 4.6*c*, no se produce momento respecto a *O*. Esta falta de efecto rotatorio resulta de que la línea de acción de la fuerza pasa por *O* y, por tanto, no es posible la tendencia a la rotación.



(b)



(c)

Para el caso general, consideremos la fuerza **F** y el punto *O* que se encuentran en un plano sombreado como en la figura 4.7*a*. El momento $\mathbf{M}_O$ respecto a *O*, o respecto a un eje que pase por *O* y perpendicular al plano, es una *cantidad vectorial*, porque tiene magnitud especificada y dirección y, al sumarse, obedece a la ley del paralelogramo.

Magnitud. La magnitud de M_O es

$$M_O = Fd \tag{4.4}$$

donde *d* representa el *brazo de momento*, que es la distancia perpendicular desde el eje en el punto *O* a la recta de acción de la fuerza. Las unidades de magnitud del momento son de fuerza por distancia, es decir, N · m o bien lb · ft.

Dirección y sentido. La dirección y sentido de $\mathbf{M}_O$ se especificará usando la "regla del tirabuzón". Para hacerlo, los dedos de la mano derecha se cierran siguiendo el sentido de la rotación que ocurriría si la fuerza pudiese girar en torno a *O*, figura 4.7*a*. Entonces, el *pulgar* apunta a lo largo del *eje de momento* señalando la dirección y el sentido del vector de momento, *hacia arriba y perpendicular* al plano sombreado que contiene **F** y *d*. Por esta definición, el momento $\mathbf{M}_O$ puede considerarse *vector deslizante* y, por tanto, actúa en cualquier punto del eje de momento.

En tres dimensiones, $\mathbf{M}_O$ se ilustra con una flecha de vector rodeada por una flecha curva o símbolo rotacional, para distinguirlo de un vector fuerza, figura 4.7*a*. Numerosos problemas de

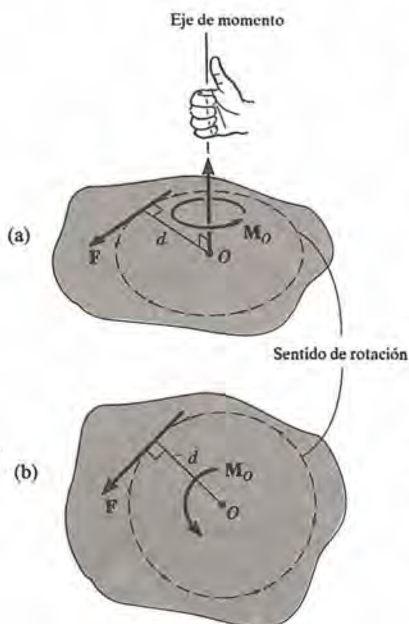


Fig. 4.7

http://librosysolucionarios.net

la mecánica, sin embargo, incluyen sistemas de fuerzas coplanares que pueden verse adecuadamente en dos dimensiones. Por ejemplo, la figura 4.7*b* es una vista de dos dimensiones de la figura 4.7*a*. Aquí, $\mathbf{M}_O$ se representa simplemente por el rotacional (rizo) (contrario al movimiento de las manecillas del reloj) que indica la acción de **F**. La punta de la flecha del rotacional (rizo) se usa para mostrar el *sentido de rotación* causado por **F**. Usando la regla del tirabuzón, sin embargo, hay que darse cuenta de que la dirección y sentido del vector de momento en la figura 4.7*b* están especificados por el pulgar, que apunta hacia fuera de la página, pues los dedos siguen el rizo. En particular, nótese que *este rizo o sentido de rotación puede siempre determinarse observando en qué dirección "orbitaría" la fuerza alrededor de O* (en el sentido contrario a las manecillas del reloj en la figura 4.7*b*). En dos dimensiones nos referiremos frecuentemente a encontrar el momento de fuerza "respecto a un punto" (*O*). No olvidar, sin embargo, que el momento, de hecho, actúa respecto a un eje que es perpendicular al plano que contiene **F** y *d*, y este eje interseca el plano en el punto (*O*), figura 4.7*a*.

Momento resultante de un sistema de fuerzas coplanares. Si un sistema de fuerzas se encuentra totalmente en el plano $x-y$, entonces el momento producido por cada fuerza respecto al punto *O* estará dirigido a lo largo del eje *z*, figura. 4.8. En consecuencia, el momento resultante $\mathbf{M}_{R_O}$ del sistema puede ser determinado por simple adición *algebraica* de los momentos de todas y cada una de las fuerzas, dado que todos los vectores momento son colineales. Podemos escribir simbólicamente esta suma vectorial como



Fig. 4.8

$$\circlearrowleft +; \quad M_{R_O} = \Sigma Fd \tag{4.5}$$

Aquí, el rizo en sentido contrario a las manecillas del reloj que se ve al lado de la ecuación indica que por el convenio de signo para escalares, el momento de una fuerza será positivo si se dirige como el eje *z* positivo, mientras que un momento negativo se dirige contrariamente.

Los ejemplos 4.1 a 4.4 ilustran la aplicación numérica de las ecuaciones 4.4 y 4.5.

4.3 Momento de una fuerza. Formulación vectorial

El momento de una fuerza **F** respecto a un punto *O*, o de hecho, respecto a un eje que pase por *O* y perpendicular al plano que contiene *O* y **F**, figura 4.9*a*, puede expresarse usando el producto

http://librosysolucionarios.net

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4.6}$$

Aquí **r** representa un vector de posición con extremos en O y *en cualquier punto* que esté en la línea de acción de **F**. Ahora se mostrará que, de hecho, el momento $\mathbf{M}_O$, cuando se determina mediante el producto cruz o vectorial, tiene la dirección y la magnitud apropiadas.

Magnitud. La magnitud del producto cruz precedente se define de la ecuación 4.1 como $M_O = rF \text{ sen } \theta$. Aquí , el ángulo θ se mide entre los puntos de aplicación de **r** y **F**. Por tanto, **r** debe tratarse como vector deslizante para construir θ apropiadamente, figura 4.9*b*. Como se muestra, el brazo de la palanca $d = r \text{ sen } \theta$, de modo que, efectivamente,

$$M_O = rF \text{ sen } \theta = F\,(r \text{ sen } \theta) = Fd$$

en concordancia con la ecuación 4.4.

Dirección. La dirección y sentido de $\mathbf{M}_O$ en la ecuación. 4.6 se determinan por la regla del tirabuzón aplicada al producto cruz. Así, extendiendo **r** hasta la posición segmentada y cerrando los dedos de la mano derecha de **r** hacia **F**, "**r** cruz **F**", el pulgar se dirige arriba o perpendicularmente al plano que contiene **r** y **F**, y esto es en la *misma dirección* que $\mathbf{M}_O$, el momento de la fuerza respecto al punto O , figura 4.9*b*. Nótese que el "sentido de rotación" de los dedos, como el sentido del rotacional (rizo) alrededor del vector de momento, indica el sentido de rotación causado por la fuerza. Ya que el producto cruz no es conmutativo, es importante que se mantenga el *orden adecuado* de **r** y **F** en la ecuación 4.6.

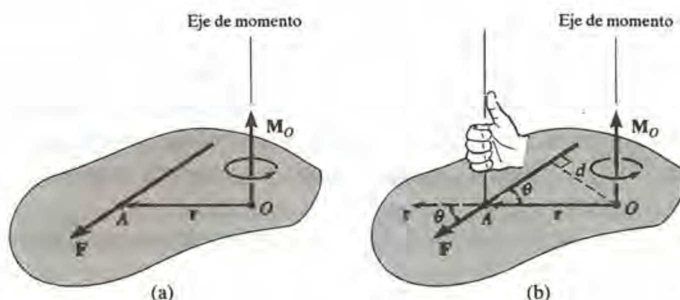
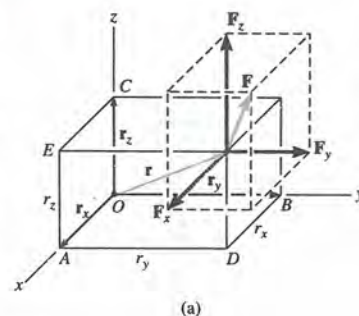


Fig. 4.9

Formulación vectorial cartesiana. Si el vector de posición **r** y la fuerza **F** se expresan en forma vectorial cartesiana, figura 4.10, entonces de la ecuación 4.6 tenemos

http://librosysolucionarios.net

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (4.7)$$



donde r_x, r_y, r_z representan las componentes x, y, z del vector de posición trazado del punto O *a cualquier punto* de la línea de acción de la fuerza

F_x, F_y, F_z representan las componentes x, y, z, del vector de fuerza

Al desarrollar el determinante, como la ecuación 4.2, tenemos

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} - (r_xF_z - r_zF_x)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k} \qquad (4.8)$$

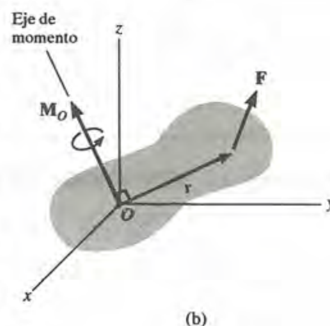


Fig. 4.10

El significado físico de estas tres componentes de momento se hace evidente al estudiar la figura 4.10*a*. Por ejemplo, la componente $\mathbf{i}$ de $\mathbf{M}_O$ está determinada por los momentos $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, y $\mathbf{F}_z$, respecto al eje x. En particular, nótese que $\mathbf{F}_x$ *no* crea un momento o tendencia a causar rotación alrededor del eje x puesto que esta fuerza es *paralela* al eje x. La línea de acción de $\mathbf{F}_y$ pasa por el punto E y, por tanto, la magnitud del momento de $\mathbf{F}_y$ respecto al punto A en el eje x es r_zF_y. Por la regla del tirabuzón, esta componente actúa en sentido $\mathbf{i}$ negativo. Así también, $\mathbf{F}_z$ contribuye con una componente de momento igual a $r_yF_z\mathbf{i}$. De esta manera, $(\mathbf{M}_O)_x = (r_yF_y - r_zF_y)$ como se muestra en la ecuación 4.7. Como ejercicio, establezca las componentes $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ de $\mathbf{M}_O$ de esta manera, y demuestre que efectivamente la forma desarrollada del determinante, ecuación 4.8, representa el momento de $\mathbf{F}$ respecto al punto O. Una vez determinado, obsérvese que $\mathbf{M}_O$ será *perpendicular* al plano sombreado que contiene los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$, figura 4.10*b*.

Se mostrará en el ejemplo 4.5 que para la obtención del momento, el producto cruz ofrece claras ventajas de cálculo en comparación con la formulación escalar, para problemas en tres dimensiones. Esto se debe a que es usualmente más fácil establecer el vector de posición $\mathbf{r}$ hacia la fuerza que determinar la distancia del brazo de momento, d, que debe dirigirse *perpendicularmente* a la recta de acción de la fuerza.

Momento resultante de un sistema de fuerzas. El momento resultante de un sistema de fuerzas alrededor de un punto O se puede determinar por adición vectorial como consecuencia de las aplicaciones sucesivas de la ecuación 4.7. Esta resultante puede escribirse simbólicamente como

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4.9)$$

y se muestra en la figura 4.11.

El ejemplo 4.6 ilustra una aplicación numérica de las ecuaciones 4.7 y 4.9.

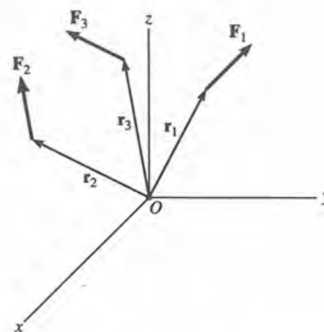


Fig. 4.11

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.1

Determine el momento de la fuerza de 800 N que actúa sobre la estructura de la figura 4.12 respecto a los puntos A, B, C, y D.

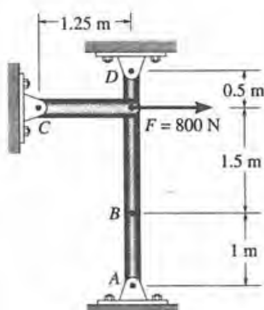


Fig. 4.12

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS ESCALAR*)

En general, $M = Fd$, siendo d el brazo de palanca o *distancia perpendicular* desde el *punto* en el eje de momento hasta la *línea de acción* de la fuerza. Por tanto,

$M_A = 800\text{ N}(2.5\text{ m}) = 2000\text{ N}\cdot\text{m}$ ↻ **Resp.**

$M_B = 800\text{ N}(1.5\text{ m}) = 1200\text{ N}\cdot\text{m}$ ↻ **Resp.**

$M_C = 800\text{ N}(0) = 0$ (la línea de acción de **F** pasa a través de C) **Resp.**

$M_D = 800\text{ N}(0.5\text{ m}) = 400\text{ N}\cdot\text{m}$ ↺ **Resp.**

Ejemplo 4.2

Determine la localización del punto de aplicación P y la dirección de una fuerza de 20 lb que está en el plano de la placa cuadrada mostrada en la figura 4.13*a*, de modo que esta fuerza cree el momento máximo en el sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto al punto O. ¿Cuál es el valor de este momento?

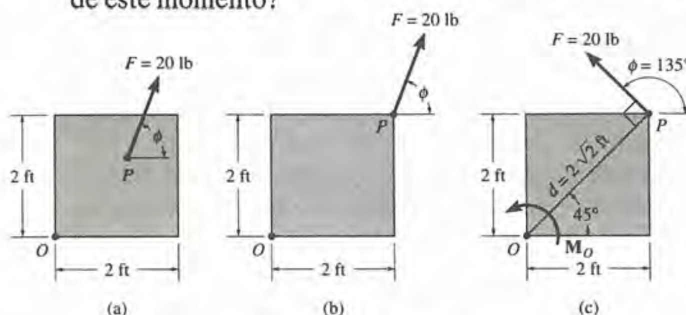


Fig. 4.13

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS ESCALAR*)

Ya que se requiere el máximo momento creado por la fuerza, ésta deberá actuar sobre la placa a distancia *máxima* del punto O. Como se ve en la figura 4.13*b*, el punto de aplicación debe encontrarse en la esquina. Para producir una rotación de sentido *positivo* a la placa alrededor de O, **F** debe actuar a un ángulo $45° < \Phi < 225°$. El momento máximo se produce cuando la línea de acción de **F** es *perpendicular* a d, es decir, $\Phi = 135°$, figura 4.13*c*. El máximo momento es, por tanto,

$$M_O = Fd = (20\text{ lb})(2\sqrt{2}\text{ ft}) = 56.6\text{ lb}\cdot\text{ft} \circlearrowleft \qquad \textbf{Resp.}$$

Por la regla del tirabuzón, $\mathbf{M}_O$ se dirige hacia el lado del lector.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.3

Para cada uno de los casos ilustrados en la figura 4.14, determine el momento de la fuerza respecto al punto O.

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS ESCALAR*)

La línea de acción de cada fuerza se extiende como línea punteada para determinar el brazo de palanca d. También, la tendencia de rotación causada por la fuerza se muestra en forma de flecha curva. Así,

Fig. 4.14*a* $M_O = (100\text{ N})(2\text{ m}) = 200\text{ N}\cdot\text{m}$ ↻ *Resp.*
Fig. 4.14*b* $M_O = (50\text{ N})(0.75\text{ m}) = 37.5\text{ N}\cdot\text{m}$ ↻ *Resp.*
Fig. 4.14*c* $M_O = (40\text{ lb})(4\text{ ft} + 2\cos 30°\text{ ft}) = 229\text{ lb}\cdot\text{ft}$ ↻ *Resp.*
Fig. 4.14*d* $M_O = (60\text{ lb})(1\text{ sen }45°\text{ ft}) = 42.4\text{ lb}\cdot\text{ft}$ ↺ *Resp.*
Fig. 4.14*e* $M_O = (7\text{ kN})(4\text{ m} - 1\text{ m}) = 21.0\text{ kN}\cdot\text{m}$ ↺ *Resp.*

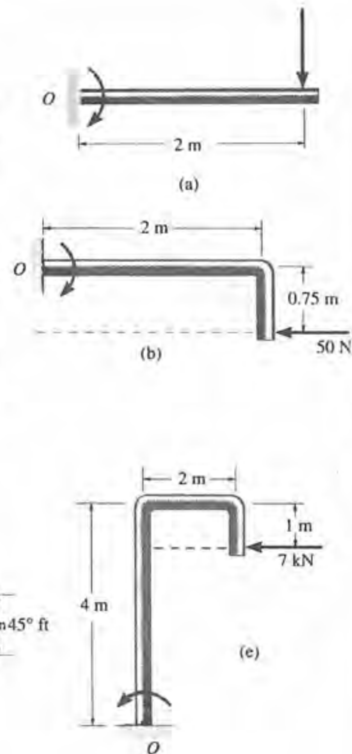


Fig. 4.14

Ejemplo 4.4

Determine el momento resultante de las cuatro fuerzas que actúan en el elemento mostrado en la figura 4.15 respecto a O.

SOLUCIÓN

Aquí es necesario aplicar la ecuación. 4.5. Suponiendo que los momentos positivos actúan en la dirección $+\mathbf{k}$, es decir, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, tenemos

$$\circlearrowleft + M_{R_O} = \Sigma Fd;$$

$$M_{R_O} = -50\text{ N}(2\text{ m}) + 60\text{ N}(0) + 20\text{ N}(3\text{ sen }30°\text{ m})$$
$$-40\text{ N}(4\text{ m} + 3\cos 30°\text{ m})$$

$$M_{R_O} = -334\text{ N}\cdot\text{m} = 334\text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

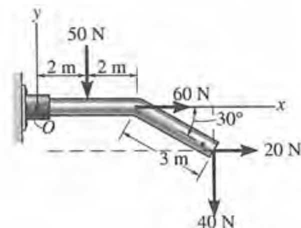


Fig. 4.15

Para este cálculo, obsérvese cómo las distancias de brazo de palanca para las fuerzas de 20 N y 40 N son establecidas con las rectas (punteadas) prolongadas que son líneas de acción de cada una de las fuerzas.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.5

El poste de la figura 4.16*a* está sujeto a una fuerza de 60 N dirigida de C a B. Determine la magnitud del momento creado por esta fuerza alrededor del punto A.

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

Como se ve en la figura 4.16*b*, cualquiera de los dos vectores de posición puede ser usado para la solución, ya que $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$ o $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$. Los vectores de posición se representan como

$$\mathbf{r}_B = \{1\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}\text{ m} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_C = \{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\}\text{ m}$$

La fuerza tiene una magnitud de 60 N y una dirección especificada por el vector unitario $\mathbf{u}_F$, dirigido de C a B. Así,

$$\mathbf{F} = (60\text{ N})\mathbf{u}_F = (60)\left[\frac{(1-3)\mathbf{i} + (3-4)\mathbf{j} + (2-0)\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}}\right]$$
$$= \{-40\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\}\text{ N}$$

Si se sustituye en la formulación dada por un determinante, ecuación 4.7, y se sigue el proceso para desarrollo de determinantes, dado en la nota al pie de la página 111, tenemos

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ -40 & -20 & 40 \end{vmatrix}$$
$$= [3(40) - 2(-20)]\mathbf{i} - [1(40) - 2(-40)]\mathbf{j} + [1(-20) - 3(-40)]\mathbf{k}$$

o

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -40 & -20 & 40 \end{vmatrix}$$
$$= [4(40) - 0(-20)]\mathbf{i} - [3(40) - 0(-40)]\mathbf{j} + [3(-20) - 4(-40)]\mathbf{k}$$

En ambos casos,

$$\mathbf{M}_A = \{160\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 100\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}$$

La *magnitud* de $\mathbf{M}_A$ es, por tanto,

$$M_A = \sqrt{(160)^2 + (-120)^2 + (100)^2} = 224\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Como es de esperarse, $\mathbf{M}_A$ actúa perpendicularmente al plano sombreado que contiene los vectores $\mathbf{F}$, $\mathbf{r}_B$, y $\mathbf{r}_C$, figura 4.16*c*. (¿Cómo encontraría sus ángulos directores coordenados $\alpha = 44.3°$, $\beta = 122°$, $\gamma = 63.4°$?). Si este problema se hubiese desarrollado por el planteamiento escalar, donde $\mathbf{M}_A = Fd$, nótese la dificultad que podría representar la obtención del brazo de palanca d.

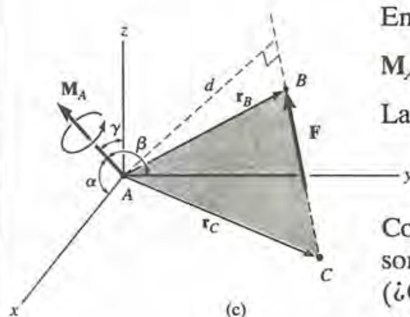
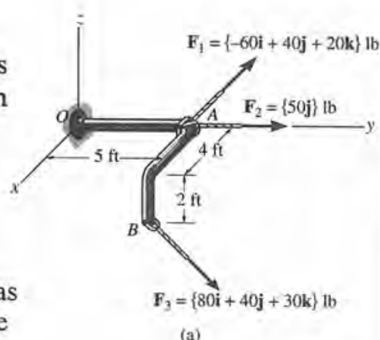


Fig. 4.16

Ejemplo 4.6

Tres fuerzas actúan sobre la varilla que se muestra en la figura 4.17*a*. Determine el momento resultante creado respecto a la brida en *O*, y determine la dirección del eje de este momento.



(a)

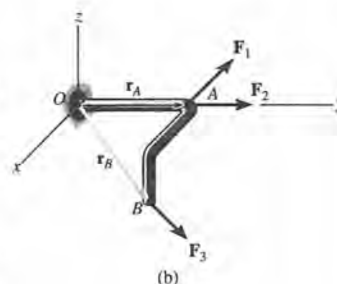
SOLUCIÓN

Aquí debemos aplicar la ecuación 4.9. Se dirigen vectores de posición desde el punto *O* hasta cada fuerza, como se ve en la figura 4.17*b*. Estos vectores son

$$\mathbf{r}_A = \{5\mathbf{j}\} \text{ ft}$$
$$\mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} \text{ ft}$$

Ya que $\mathbf{F}_2 = \{50\mathbf{j}\}$ lb y las componentes cartesianas de las otras fuerzas están dadas, el momento resultante alrededor de *O* es, por tanto,

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
$$= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_3$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$
$$= [5(20) - 40(0)]\mathbf{i} - [0\mathbf{j}] + [0(40) - (-60)(5)]\mathbf{k} + [0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}]$$
$$+ [5(-30) - (40)(-2)]\mathbf{i} - [4(-30) - 80(-2)]\,\mathbf{j} + [4(40) - 80(5)]\mathbf{k}$$
$$= \{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

El eje de momento se dirige por la recta de acción de $\mathbf{M}_{R_O}$. Puesto que la magnitud de este momento es

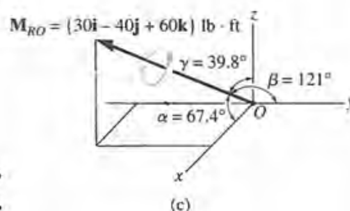
$$M_{R_O} = \sqrt{(30)^2 + (-40)^2 + (60)^2} = 78.10 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

el vector unitario que define la dirección del eje de momento es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{M}_{R_O}}{M_{R_O}} = \frac{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}}{78.10} = 0.3841\mathbf{i} - 0.5121\mathbf{j} + 0.7682\mathbf{k}$$

Por tanto, los ángulos directores coordenados del eje son

$$\cos\alpha = 0.3841; \qquad \alpha = 67.4° \qquad \textit{Resp.}$$
$$\cos\beta = -0.5121; \qquad \beta = 121° \qquad \textit{Resp.}$$
$$\cos\gamma = 0.7682; \qquad \gamma = 39.8° \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Fig. 4.17

Estos resultados se muestran en la figura 4.17*c*. Es necesario percatarse de que las tres fuerzas tienden a causar la rotación del tubo alrededor de este eje, en la forma mostrada por la flecha curva que se pone rodeando al vector momento.

http://librosysolucionarios.net

4.4 Transmisibilidad de una fuerza y el principio de momentos

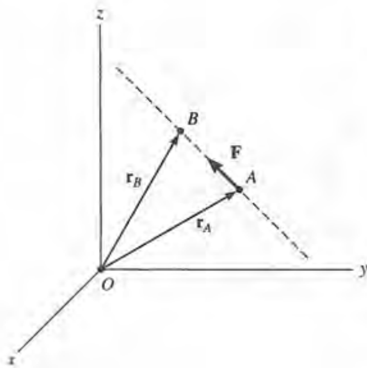


Fig. 4.18

Usando la definición de momento formalizada por el producto cruz, presentaremos ahora dos importantes conceptos frecuentemente utilizados en todo nuestro estudio de la mecánica.

Transmisibilidad de una fuerza. Consideremos la fuerza **F** aplicada en el punto A en la figura 4.18. El momento creado por **F** respecto a O es $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$; sin embargo, se mostró que el vector de posición "**r**" puede extenderse desde O hasta *cualquier punto* de la línea recta de acción de **F**. En consecuencia, **F** puede aplicarse en el mismo punto B y se calculará el mismo momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$. Por lo tanto, **F** tiene las propiedades de un *vector deslizante* y puede, por esta razón, actuar en *cualquier punto de su línea de acción y crear el mismo momento respecto a O*. Nos referiremos a **F**, por ello, como "transmisible", y continuaremos explicando esta propiedad en la sección 4.7.

Principio de los momentos. Un concepto que se usa en la mecánica con gran frecuencia es el *principio de los momentos*, también llamado *teorema de Varignon*, pues lo desarrolló el matemático francés Varignon, (1654-1722). Afirma que *el momento de una fuerza alrededor de un punto es la suma de los momentos de sus componentes alrededor del punto*. La demostración se sigue de la propiedad distributiva del producto cruz. Para verlo, consideremos la fuerza **F** y dos de sus componentes, donde $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, figura 4.19. Tenemos

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Este concepto tiene importantes aplicaciones en la solución de problemas y en las demostraciones de los teoremas que siguen, ya que, a menudo, es más fácil determinar los momentos de componentes de fuerzas que el momento de la fuerza misma.

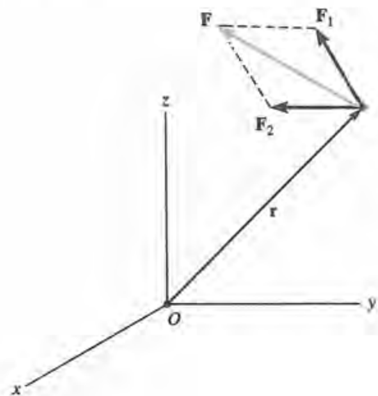
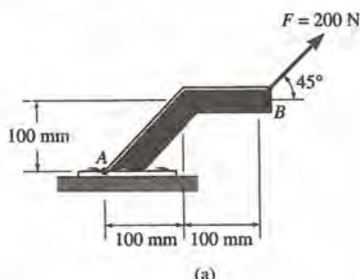


Fig. 4.19

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.7

Una fuerza de 200 N actúa sobre la ménsula mostrada en la figura 4.20*a*. Determine el momento de la fuerza respecto al punto *A*.



(a)

SOLUCIÓN I

El brazo de palanca *d* puede hallarse por trigonometría, usando la construcción mostrada en la figura 4.16*b*. Del triángulo *BCD*,

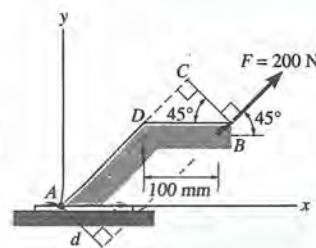
$$CB = d = 100 \cos 45° = 70.71 \text{ mm} = 0.070\,71 \text{ m}$$

Así pues,

$$M_A = Fd = 200 \text{ N}(0.070\,71 \text{ m}) = 14.1 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowleft$$

De acuerdo con la regla del tirabuzón, $\mathbf{M}_A$ se orienta en la dirección +**k**, ya que la fuerza tiende a girar en el *sentido* contrario a las manecillas del reloj, alrededor del punto *A*. Por tanto, al expresar el momento como un vector cartesiano, tenemos

$$\mathbf{M}_A = \{14.1\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

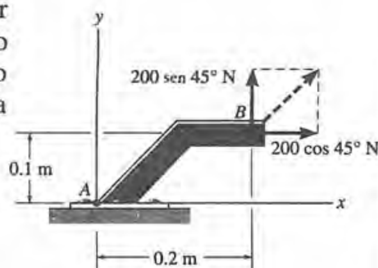
SOLUCIÓN II

La fuerza de 200 N puede descomponerse en componentes *x* y *y*, como se ve en la figura 4.20*c*. De acuerdo con el principio de los momentos, el momento de **F** respecto al punto *A* es igual a la suma de los momentos producidos por las dos componentes de fuerza. Con la rotación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj considerada como positiva, es decir, en la dirección +**k**, podemos aplicar la ecuación 4.5, y en este caso,

$$\circlearrowleft +M_A = (200 \text{ sen } 45°)(0.20) - (200 \cos 45°)(0.10) = 14.1 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowleft$$

Así,

$$\mathbf{M}_A = \{14.1\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

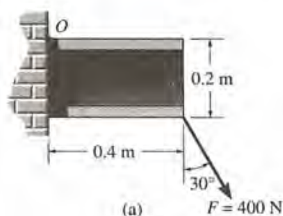
Fig. 4.20

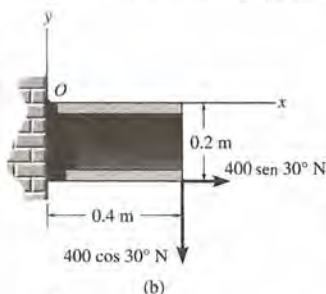
Por comparación, se ve que la solución II proporciona un *método más conveniente* para el análisis que la solución I, pues el brazo de palanca para cada componente se establece con más facilidad.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.8

La fuerza **F** actúa al extremo de la viga mostrada en la figura 4.21*a*. Determine el momento de la fuerza respecto a *O*.





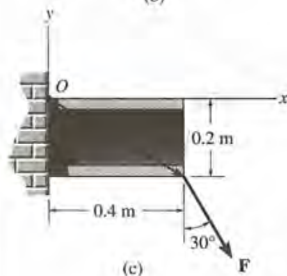


Fig. 4.21

SOLUCIÓN I (*ANÁLISIS ESCALAR*)

La fuerza se resuelve en sus componentes *x*, *y* como se ve en la figura 4.21*b*, y los momentos de las componentes se calculan respecto al punto *O*. Si se consideran positivos los momentos en el sentido contrario al de las manecillas, esto es, en la dirección +**k**, tenemos

$$\circlearrowleft +M_O = 400 \text{ sen } 30°(0.2) - 400 \cos 30°(0.4)$$
$$= -98.6 \text{ N} \cdot \text{m} = 98.6 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowright$$

o

$$\mathbf{M}_O = \{-98.6\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

Al usar vectores cartesianos, la fuerza y los vectores de posición que se ven en la figura 4.21*c* pueden representarse como

$$\mathbf{r} = \{0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{F} = \{400 \text{ sen } 30°\mathbf{i} - 400 \cos 30°\mathbf{j}\} \text{ N}$$
$$= \{200.0\mathbf{i} - 346.4\mathbf{j}\} \text{ N}$$

El momento es, por tanto,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.4 & -0.2 & 0 \\ 200.0 & -346.4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + [0.4(-346.4) - (-0.2)(200.0)]\mathbf{k}$$
$$= \{-98.6\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Comparativamente, se aprecia que el análisis escalar (solución I) proporciona un *método más conveniente* para el análisis que la solución II, puesto que la dirección del momento y el brazo de palanca para cada fuerza componente se establecen fácilmente. Luego, este método se recomienda en general para problemas que se exhiben en dos dimensiones. Por otra parte, el análisis vectorial cartesiano se recomienda en general solamente para problemas en tres dimensiones, donde es más difícil determinar las componentes de fuerzas y los brazos de palanca.

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

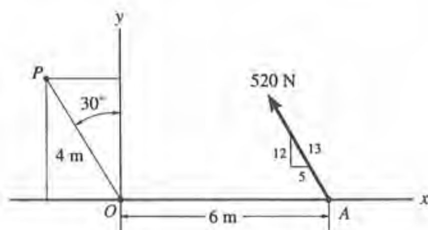
4.1. Si **A**, **B**, y **D** son vectores dados, demuestre la ley distributiva para el producto vectorial o producto cruz, es decir, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$.

4.2. Demuestre la identidad del llamado triple producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

4.3. Dados los tres vectores no nulos **A**, **B**, y **C**, demuestre que si $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$, entonces los tres vectores *deben* estar en un mismo plano.

* **4.4.** Determine la magnitud, sentido y dirección del momento de la fuerza en *A* respecto a *O*.

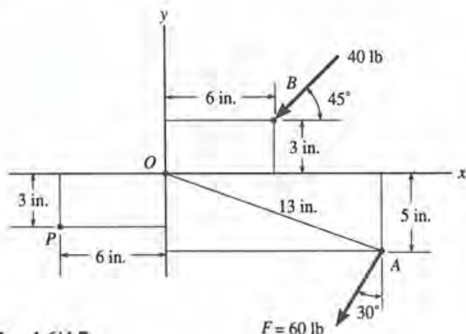
4.5. Determine la magnitud, sentido y dirección del momento de la fuerza en *A* respecto a *P*.



Probs. 4.4/4.5

4.6. Determine la magnitud, sentido y la dirección del momento resultante de las fuerzas en *A* y *B* respecto a *O*.

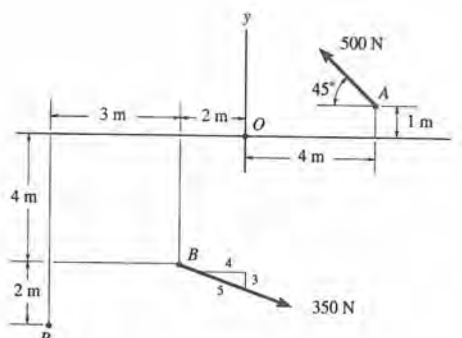
4.7. Determine la magnitud, sentido y dirección del momento resultante de las fuerzas en *A* y *B* respecto al punto *P*.



Probs. 4.6/4.7

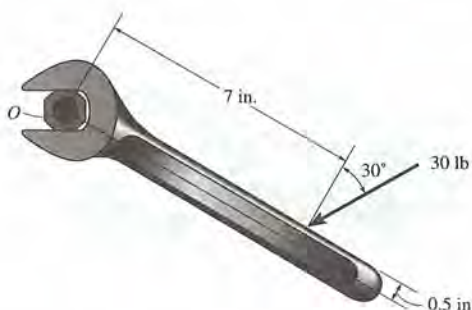
* **4.8.** Determine la magnitud, sentido y dirección del momento resultante de las fuerzas en *A* y *B* respecto a *O*.

4.9. Determine la magnitud, sentido y dirección del momento resultante de las fuerzas *A* y *B* respecto al punto *P*.



Probs. 4.8/4.9

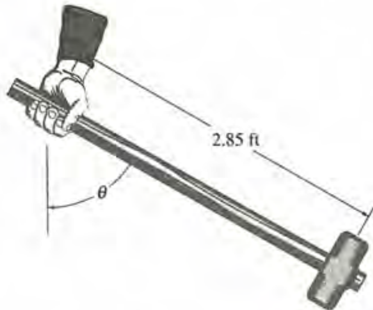
4.10. Una fuerza de 30 lb está aplicada al mango de la llave. Determine el momento de esta fuerza respecto al punto *O*.



Prob. 4.10

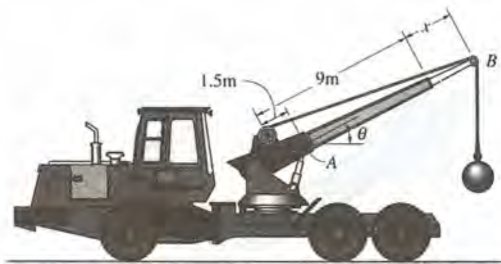
http://librosysolucionarios.net

4.11. Un hombre intenta levantar un marro con una mano; si la cabeza del marro pesa 10 lb, determine el ángulo máximo θ en que lo puede sostener, si el momento máximo que puede desarrollar en la muñeca es 18 lb · ft. Se ignora el peso del mango.



Prob. 4.11

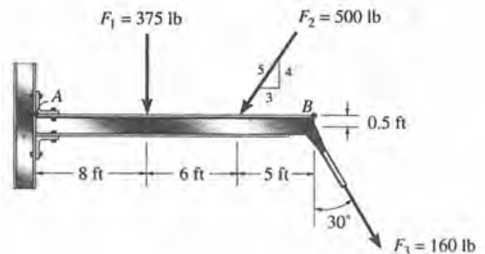
***4.12.** Una grúa se ajusta a cualquier ángulo $0° \leq \theta \leq 90°$ y cualquier extensión $0 \leq x \leq 5$ m. Para una masa suspendida de 150 kg, determine el momento desarrollado en A como una función de x y θ. ¿Qué valores de x y θ simultáneos desarrollan el momento máximo en A? Calcule este momento. Ignore el tamaño de la polea en B.



Prob. 4.12

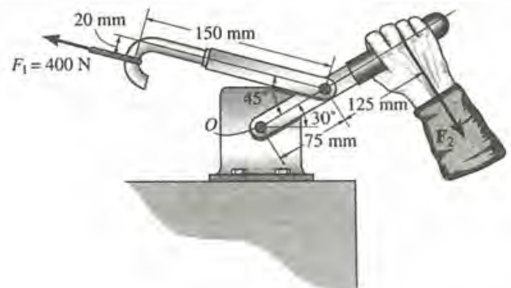
4.13. Determine el momento resultante respecto A de las tres fuerzas que actúan sobre la viga.

4.14. Determine el momento resultante respecto B de las tres fuerzas que actúan sobre la viga.



Probs. 4.13/4.14

4.15. Determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_2$ que debe aplicarse perpendicularmente al mango, de modo que el momento resultante de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en O sea cero.

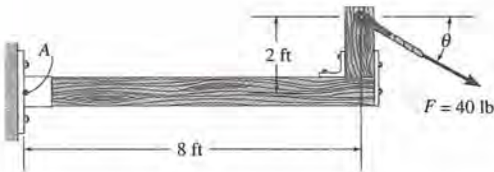


Prob. 4.15

http://librosysolucionarios.net

* **4.16.** Determine la orientación θ ($0° \leq \theta \leq 180°$) de la fuerza **F** de 40 lb, de modo que **F** produzca: (*a*) el momento máximo respecto de *A*, y (*b*) ningún momento respecto a *A*. Calcule el momento en cada caso.

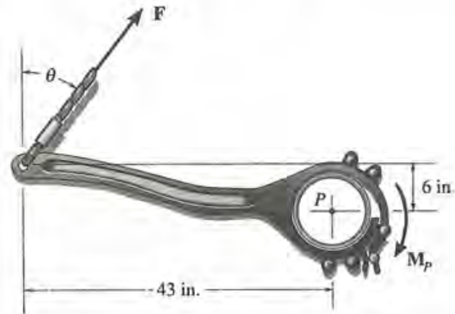
4.17. Determine el momento de la fuerza **F** respecto de *A* como función de θ. Trace la gráfica de *M* (ordenada) vs. θ (abscisa) para $0° \leq \theta \leq 180°$.



Probs. 4.16/4.17

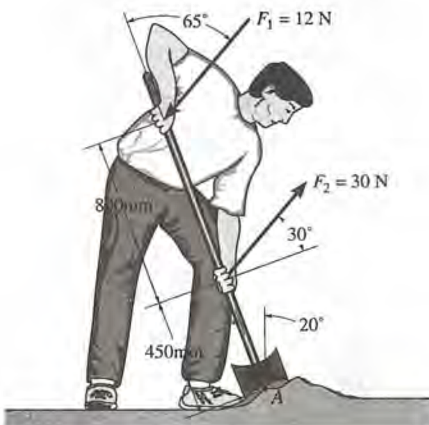
4.19. Las tenazas se usan para sujetar los extremos del tubo de perforación *P*. Determine el torque (momento) M_P que la fuerza aplicada $\mathbf{F} = 150$ lb ejerce sobre el tubo como función de θ. Grafique este momento M_P vs. θ para $0 \leq \theta \leq 90°$.

* **4.20.** Se usan las tenazas para sujetar los extremos del tubo de perforación *P*. Si se necesita un torque (momento) de $M_P = 800$ lb · ft en *P* para girar el tubo, determine la fuerza del cable **F** que debe aplicarse a las tenazas. Considere que $\theta = 30°$.



Probs. 4.19/4.20

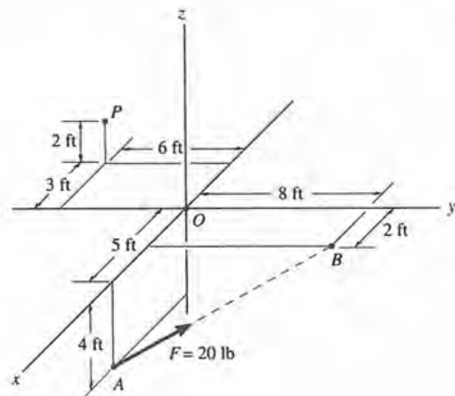
4.18. Un hombre ejerce las dos fuerzas en el mango de la pala. Determine el momento resultante de estas fuerzas respecto de la hoja de la pala en *A*.



Prob. 4.18

4.21. Determine el momento de la fuerza **F** en *A* respecto al punto *O*. Exprese el resultado como vector cartesiano.

4.22. Determine el momento de la fuerza **F** en *A* respecto al punto *P*. Exprese el resultado como vector cartesiano.

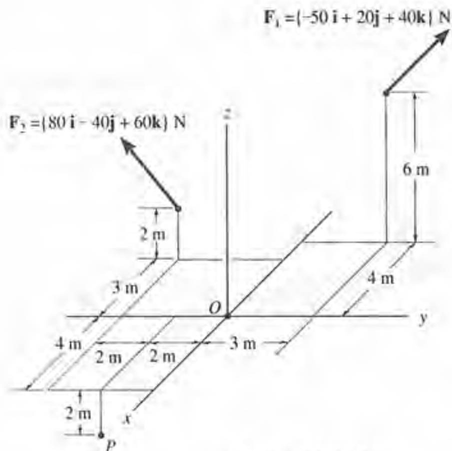


Probs. 4.21/4.22

http://librosysolucionarios.net

4.23. Determine el momento resultante de las fuerzas respecto a O. Exprese el resultado como vector cartesiano.

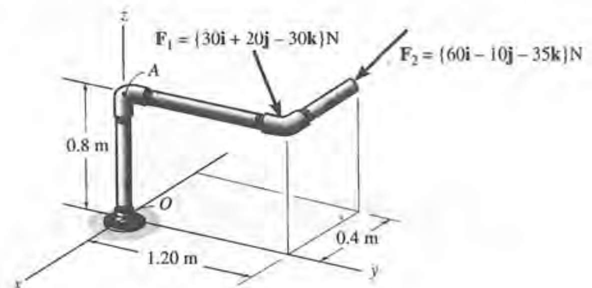
* **4.24.** Determine el momento resultante de las fuerzas respecto a P. Exprese el resultado como vector cartesiano.



Probs. 4.23/4.24

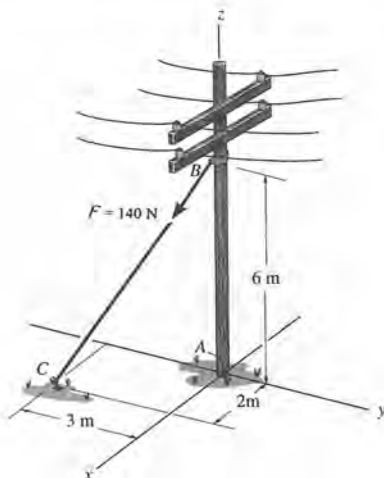
4.26. Utilizando vectores cartesianos, calcule el momento de cada una de las dos fuerzas que actúan en el ensamble tubular respecto al punto O. Sume estos momentos y calcule la magnitud y ángulos directores coordenados del momento resultante.

4.27. Usando vectores cartesianos, determine el momento de cada una de las dos fuerzas que actúan sobre el ensamble tubular respecto al punto A. Sume estos momentos y calcule la magnitud y ángulos directores coordenados del momento resultante.



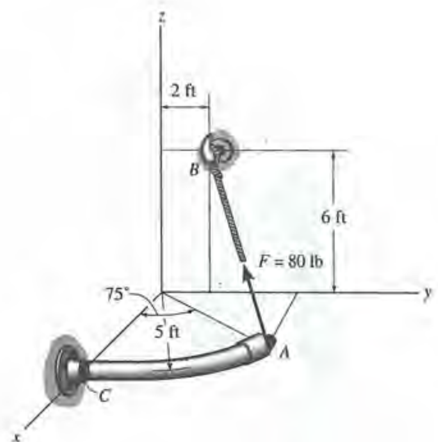
Probs. 4.26/4.27

4.25. Un cable ejerce una fuerza de 140 N en el poste de teléfonos, como se ilustra. Determine el momento de esta fuerza en la base A del poste. Resuelva el problema de dos maneras, esto es, usando un vector de posición de A a C, y luego, de A a B.



Prob. 4.25

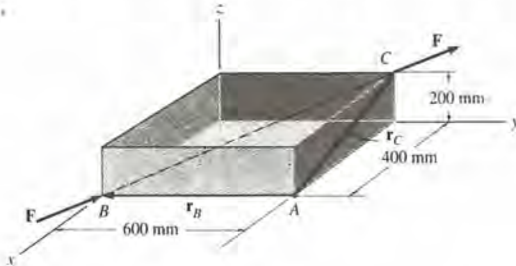
* **4.28.** El tubo curvo tiene un radio de 5 ft. Si una fuerza de 80 lb actúa en su extremo como se ilustra, determine el momento de esta fuerza respecto al punto C. Resuelva el problema usando dos diferentes vectores de posición.



Prob. 4.28

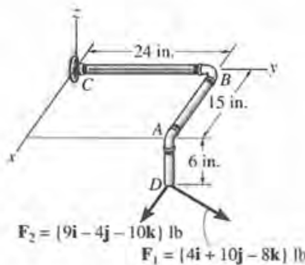
http://librosysolucionarios.net

4.29. Una fuerza **F** de magnitud F = 100 N actúa a lo largo de la diagonal del paralelepípedo. Usando vectores cartesianos, determine el momento de **F** respecto al punto *A*, donde $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$ y $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$.



Prob. 4.29

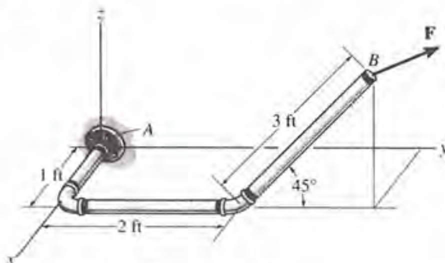
4.30. Encuentre el momento resultante de las dos fuerzas que actúan en el extremo del ensamble tubular respecto a cada unión *A*, *B* y *C*.



Prob. 4.30

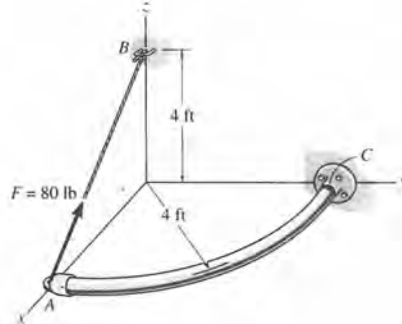
4.31. Si **F** = {50**i** + 60**j** + 30**k**} lb, determine la magnitud y ángulos directores coordenados del momento de **F** respecto al punto *A*.

* **4.32.** Determine los ángulos directores coordenados de la fuerza **F** aplicada al extremo del tubo, de modo que el momento creado por **F** respecto al punto *A* sea cero.



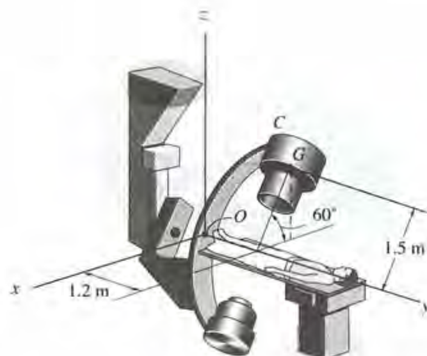
Probs. 4.31/4.32

4.33. La varilla curva tiene un radio de 4 ft y se encuentra sostenida por el cable *AB*, que ejerce una fuerza de 80 lb sobre la varilla. Determine el momento de esta fuerza respecto a *C*. Resuelva el problema usando dos diferentes vectores de posición.



Prob. 4.33

4.34. El equipo de rayos x se utiliza para diagnósticos médicos. Si la cámara y la caja en *C* tienen una masa de 150 kg y centro de masa en *G*, determine el momento de su peso respecto al punto *O*, cuando se encuentre en la posición mostrada.

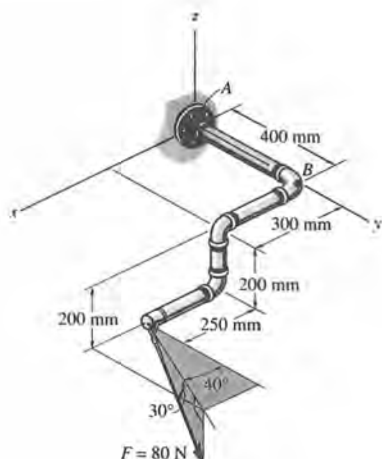


Prob. 4.34

http://librosysolucionarios.net

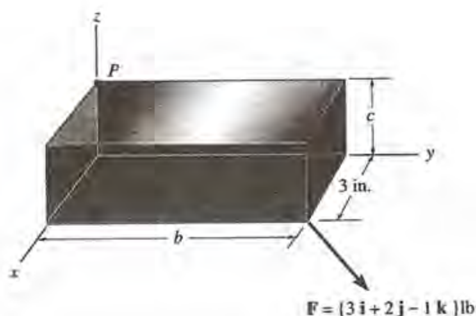
4.35. El ensamble tubular está sujeto a la fuerza de 80 N. Determine el momento de esta fuerza respecto al punto A.

* **4.36.** El ensamble tubular está sujeto a la fuerza de 80 N. Determine el momento de esta fuerza respecto a B.



Probs. 4.35/4.36

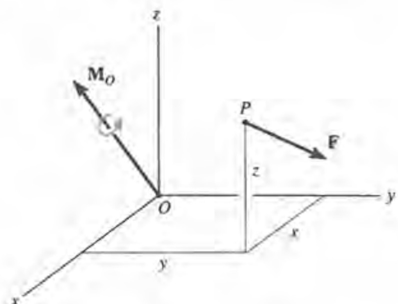
4.37. El momento en el punto P creado por la fuerza aplicada **F** que actúa en la caja, es $\mathbf{M}_P = \{-1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}\}$ lb · in. Determine las dimensiones b y c de la caja.



Prob. 4.37

4.38. Una fuerza $\mathbf{F} = \{-5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\}$ kN produce un momento de $\mathbf{M}_O = \{-17\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 16\mathbf{k}\}$ kN · m respecto al punto O. Si la fuerza actúa en un punto P de coordenada $y = 2$ m, determine sus coordenadas x y z.

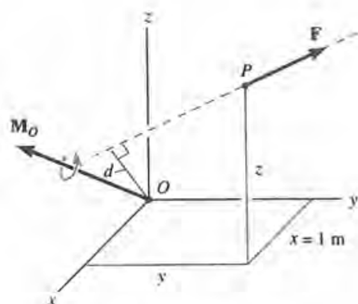
4.39. La fuerza $\mathbf{F} = \{-5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\}$ kN crea un momento respecto al punto O de $\mathbf{M}_O = \{-17\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 19\mathbf{k}\}$ kN · m. Si la fuerza pasa por un punto P que tiene coordenada $z = 3$ m, determine las otras dos coordenadas de este punto. También, teniendo en cuenta que $M_O = Fd$, determine la distancia perpendicular d, desde el punto O hasta la línea de acción de **F**.



Probs. 4.38/4.39

4.40. Una fuerza de $\mathbf{F} = \{6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}$ kN produce un momento de $\mathbf{M}_O = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 14\mathbf{k}\}$ kN · m respecto al origen de coordenadas, el punto O. Si la fuerza actúa en un punto que tiene su primera coordenada $x = 1$ m, determine las otras dos coordenadas.

4.41. La fuerza $\mathbf{F} = \{6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}$ N crea un momento respecto a O de $\mathbf{M}_O = \{-14\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}$ N · m. Si la fuerza pasa por un punto que tiene $x = 1$ m, determine sus otras dos coordenadas. También, observando que $\mathbf{M}_O = Fd$, determine la distancia perpendicular d del punto O a la línea de acción de **F**.



Probs. 4.40/4.41

http://librosysolucionarios.net

4.5. Momento de una fuerza con respecto a un eje especificado

Recordemos que cuando se calcula el momento de una fuerza respecto a un punto, el momento y su eje *siempre* son perpendiculares al plano que contiene la fuerza y el brazo de palanca. En ciertos problemas, es importante encontrar la *componente* de este momento a lo largo de un eje especificado que pase por el punto. Para resolver este problema se puede usar el análisis escalar o el análisis vectorial.

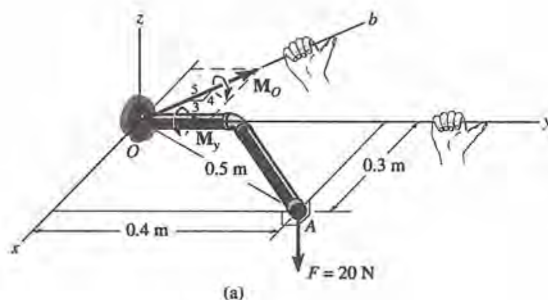


Fig. 4.22

Análisis escalar. Como ejemplo numérico de este problema, considérese el ensamble tubular mostrado en la figura 4.22*a*, que se encuentra en el plano horizontal sujeto a la fuerza vertical de magnitud $F = 20$ N aplicada al punto A. El momento de esta fuerza con respecto a O tiene *magnitud* $\mathbf{M}_O = (20\text{ N})(0.5\text{ m}) = 10\text{ N}\cdot\text{m}$ y *dirección* determinada por la regla del tirabuzón, como se ve en la figura 4.22*a*. Este momento tiende a girar el tubo alrededor del eje Ob. Por razones prácticas, sin embargo, puede ser necesario determinar la *componente* de $\mathbf{M}_O$ con respecto al eje y, $\mathbf{M}_y$, ya que esta componente tiende a desatornillar el tubo del platillo en O. A partir de la figura 4.22*a*, $\mathbf{M}_y$ tiene magnitud $M_y = \frac{3}{5}(10\text{ N}\cdot\text{m}) = 6\text{ N}\cdot\text{m}$ y en el sentido mostrado por la resolución del vector. En vez de realizar este proceso en *dos pasos*, es decir, primero encontrar el momento de la fuerza respecto a O, y luego resolver el momento a lo largo del eje y, es posible también resolver el problema *directamente*. Para hacerlo, es necesario determinar la perpendicular o distancia de brazo de palanca desde

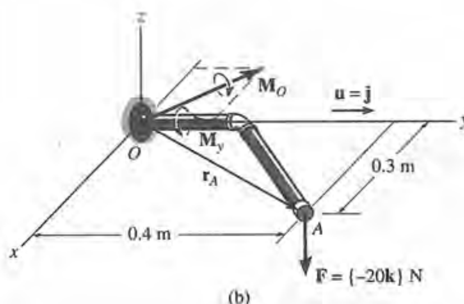
http://librosysolucionarios.net

la línea de acción de **F** al eje *y*. A partir de la figura 4.22*a* esta distancia es 0.3 m. Luego, la *magnitud* del momento de la fuerza respecto al eje *y* es de nuevo $M_y = 0.3(20\text{ N}) = 6\text{ N}\cdot\text{m}$, y el sentido está determinado por la regla del tirabuzón, como se ve.

En general, *entonces, si la línea de acción de una fuerza* **F** *es perpendicular a un eje aa*, la magnitud del momento de **F** con respecto al eje puede determinarse de la ecuación

$$M_a = Fd_a \tag{4.10}$$

Aquí, d_a es la *perpendicular o distancia* más corta de la línea de acción de fuerza al eje. La dirección está determinada por el pulgar de la mano derecha, al cerrar los dedos de acuerdo con el sentido de giro producido por la fuerza. En particular, debe observarse que una *fuerza no producirá momento respecto a un eje si su línea de acción es paralela al eje o su línea de acción pasa por el eje*.



(b)

Análisis vectorial. La solución precedente en dos etapas, de hallar primeramente el momento de la fuerza respecto a un punto en el eje y encontrar después la componente proyectada del momento respecto al eje, puede determinarse también mediante el análisis vectorial, figura 4.22*b*. Aquí, el momento respecto a *O* se determina primero a partir de $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) \times (-20\mathbf{k}) = \{-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}\}\text{ N}\cdot\text{m}$. La componente o proyección de este momento a lo largo del eje *y* se determina entonces a partir del producto escalar (sección 2.9). Ya que el vector unitario para el eje es $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, se tiene $M_y = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u} = (-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} = 6\text{ N}\cdot\text{m}$. Este resultado es el que se espera, naturalmente, puesto que representa la componente **j** de $\mathbf{M}_O$.

http://librosysolucionarios.net

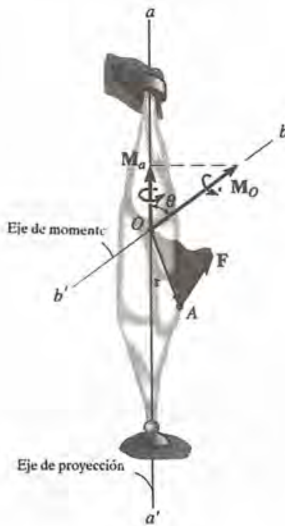


Fig. 4.23

Un análisis vectorial como éste es muy ventajoso para encontrar el momento de una fuerza respecto a un eje, cuando las componentes de la fuerza o los brazos de palanca apropiados son difíciles de determinar. Por esta razón, se generalizará el método anterior en dos pasos y se aplicará a un cuerpo de cualquier forma. Para hacerlo, consideremos el cuerpo de la figura 4.23, que está sujeto a la fuerza **F** que actúa en el punto *A*. Aquí, deseamos determinar el efecto de **F** en la tendencia a girar el cuerpo alrededor del eje *aa*'. Esta tendencia a la rotación se mide por la componente $\mathbf{M}_a$ del momento. Para determinar $\mathbf{M}_a$ calculamos primeramente el momento de **F** respecto a un *punto arbitrario O* que está en el eje. En este caso, $\mathbf{M}_O$ se expresa por el producto cruz $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde **r** se dirige desde *O* hasta *A*. Ya que $\mathbf{M}_O$ actúa a lo largo del eje de momento *bb*', que es perpendicular al plano que contiene **r** y **F**, la componente o proyección de $\mathbf{M}_O$ sobre el eje *aa*' se representa por $\mathbf{M}_a$. La *magnitud* de $\mathbf{M}_a$ está determinada por el producto escalar $M_a = M_O \cos\theta = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}_a$, donde $\mathbf{u}_a$ es un vector unitario utilizado para definir la dirección del eje *aa*'. Combinando estos dos pasos como una expresión general, tenemos $M_a = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u}_a$. Puesto que el producto escalar es conmutativo, podemos escribir también

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

http://librosysolucionarios.net

En álgebra vectorial, esta combinación del producto escalar con el producto vectorial que resulta en el escalar M_a es llamada *triple producto escalar*. Si se conocen las componentes cartesianas de cada uno de los vectores, el triple producto mixto puede escribirse en forma de determinante, como a continuación

$$M_a = (u_{a_x}\mathbf{i} + u_{a_y}\mathbf{j} + u_{a_z}\mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

o simplemente

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{4.11}$$

donde $u_{a_x}, u_{a_y}, u_{a_z}$ representan las componentes x, y, z, del vector unitario que define la dirección del eje aa'.

r_x, r_y, r_z representan las componentes x, y, z, del vector de posición trazado desde cualquier punto O del eje aa' hasta cualquier punto A en la línea de acción de la fuerza.

F_x, F_y, F_z representan las tres componentes cartesianas del vector de fuerza.

Cuando M_a se evalúe a partir de la ecuación 4.11, se obtendrá un escalar positivo o negativo. El signo de este escalar indica el sentido de $\mathbf{M}_a$ a lo largo del eje aa'. Si es positivo, entonces $\mathbf{M}_a$ tendrá el mismo sentido que $\mathbf{u}_a$ en tanto que si es negativo, entonces $\mathbf{M}_a$ actuará de manera opuesta que $\mathbf{u}_a$.

Una vez determinado M_a, podemos expresar $\mathbf{M}_a$ como vector cartesiano, a saber,

$$\mathbf{M}_a = M_a\mathbf{u}_a = [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})]\, \mathbf{u}_a \tag{4.12}$$

Finalmente, si el momento resultante de una serie de fuerzas ha de ser calculado con respecto a un eje, entonces las componentes del momento de cada fuerza se sumarán entre sí *algebraicamente*, pues cada componente se encuentra en el mismo eje.

Los ejemplos siguientes ilustran una aplicación numérica de los conceptos anteriores.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.9

La fuerza $\mathbf{F} = \{-40\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}$ N actúa en el punto A mostrado en la figura 4.24*a*. Determínese los momentos de esta fuerza respecto al eje x y al eje Oa.

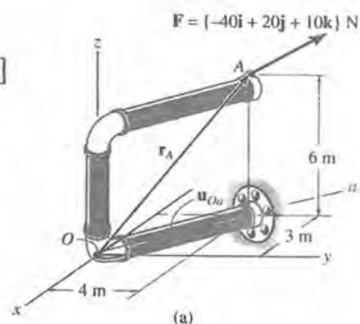
SOLUCIÓN I (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

Podemos resolver este problema usando el vector de posición $\mathbf{r}_A$. ¿Por qué? Como $\mathbf{r}_A = \{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}$ m, y $\mathbf{u}_x = \mathbf{i}$, tendremos, aplicando la ecuación 4.11,

$$M_x = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 1[4(10) - 6(20)] - 0[(-3)(10) - 6(-40)] + 0[(-3)(20) - 4(-40)]$$

$$= -80 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



El signo "menos" indica que el sentido de $\mathbf{M}_x$ es opuesto a $\mathbf{i}$.

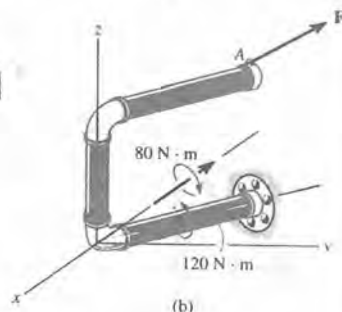
Es necesario observar que este resultado también representa la componente $\mathbf{i}$ del momento de $\mathbf{F}$ respecto a A, es decir, $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$

Podemos calcular, M_{Oa} usando $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{u}_{Oa} = -\frac{3}{5}(\mathbf{i}) + \frac{4}{5}(\mathbf{j})$. Así

$$M_{Oa} = \mathbf{u}_{Oa} \cdot (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -\tfrac{3}{5}[4(10) - 6(20)] - \tfrac{4}{5}[(-3)(10) - 6(-40)] + 0[(-3)(20) - 4(-40)]$$

$$= -120 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



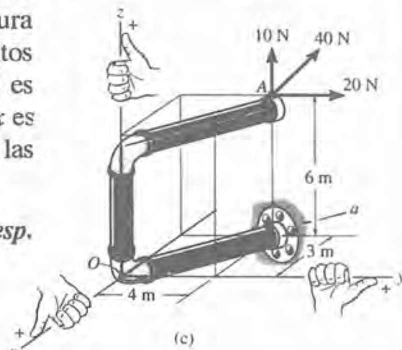
¿Qué indica el signo "menos"?

Las componentes del momento se muestran en la figura 4.24*b*.

SOLUCIÓN II (*ANÁLISIS ESCALAR*)

Ya que las componentes de fuerzas y brazos de palanca se determinan fácilmente para calcular M_x, puede usarse un análisis escalar para resolver este problema. Con referencia a la figura 4.24*c*, solamente las fuerzas de 10 y 20 N contribuyen momentos respecto al eje x. (La línea de acción de la fuerza de 40 N es *paralela* a este eje x, por tanto, su momento respecto al eje x es cero.) Si se usa la regla del tirabuzón, la suma algebraica de las componentes de momento respecto al eje x es, por tanto,

$$M_x = (10 \text{ N})(4 \text{ m}) - (20 \text{ N})(6 \text{ m}) = -80 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



Aunque aquí no se requiere, obsérvese también que

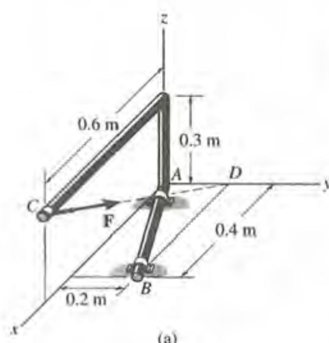
$$M_y = (10 \text{ N})(3 \text{ m}) - (40 \text{ N}(6 \text{ m}) = -210 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$M_z = (40 \text{ N})(4 \text{ m}) - (20 \text{ N})(3 \text{ m}) = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Fig. 4.24

Si fuéramos a determinar M_{Oa} por este método escalar se realizaría mucho más trabajo , ya que las componentes de fuerza de 20 N y 40 N *no son perpendiculares* a la dirección Oa. El análisis vectorial da una solución más directa.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.10



La varilla que se muestra en la figura 4.25*a* está sujeta en *A* y en *B* como se muestra. Determine el momento $\mathbf{M}_{AB}$ producido por $\mathbf{F} = \{-600\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\}$ N que tiende a rotar la varilla alrededor del eje *AB*.

SOLUCIÓN

Un análisis vectorial mediante la ecuación 4.11 será considerado para la solución, ya que el brazo de palanca no es fácil de determinar. En general, $M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. Cada uno de los términos de esta ecuación se identificará ahora.

El vector unitario $\mathbf{u}_B$ define la dirección del eje *AB* de la varilla, figura 4.25*b*, donde

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j}}{\sqrt{(0.4)^2 + (0.2)^2}} = 0.894\mathbf{i} + 0.447\mathbf{j}$$

El vector **r** se dirige desde *cualquier punto* del eje *AB* a *cualquier punto* de la línea de acción de la fuerza. Por ejemplo, los vectores de posición $\mathbf{r}_C$ y $\mathbf{r}_D$ son compatibles, figura. 4.25*b*. (A pesar de que no se muestre, $\mathbf{r}_{BC}$ o $\mathbf{r}_{BD}$ también pueden ser utilizados). Para simplificar, hemos escogido $\mathbf{r}_D$, donde

$$\mathbf{r}_D = \{0.2\mathbf{j}\} \text{ m}$$

La fuerza es

$$\mathbf{F} = \{-600\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\} \text{ N}$$

Al sustituir estos vectores en la forma determinante y expandiéndolos, obtenemos

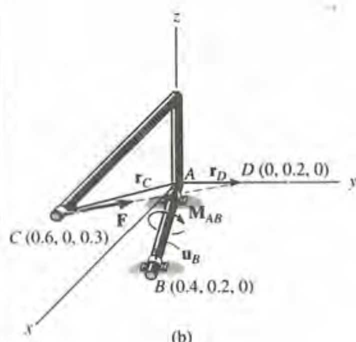


Fig. 4.25

$$M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -600 & 200 & -300 \end{vmatrix}$$

$$= 0.894[0.2(-300) - 0(200)] - 0.447[0(-300) - 0(-600)] + 0[0(200) - 0.2(-600)]$$

$$= -53.64 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El signo "menos" indica que el sentido de $\mathbf{M}_{AB}$ es contrario al $\mathbf{u}_B$. Si expresamos $\mathbf{M}_{AB}$ como un vector cartesiano, tenemos

$$\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}\mathbf{u}_B = (-53.64 \text{ N} \cdot \text{m})(894\mathbf{i} + 0.447\mathbf{j})$$
$$= \{-48.0\mathbf{i} - 24.0\mathbf{j}\} \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

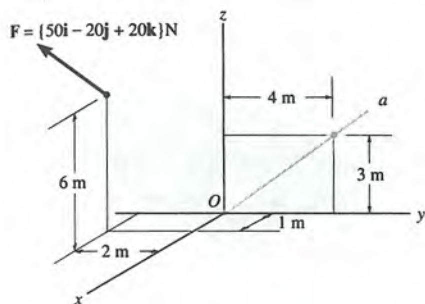
En la figura 4.25*b* se muestra el resultado.

Debe mencionarse que si el eje *AB* se define usando un vector unitario dirigido desde *B* hacia *A*, entonces en la formulación anterior $-\mathbf{u}_B$ debería haber sido utilizado. Esto nos llevaría a $M_{AB} = +053.64$ N · m. Por consiguiente, $\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}(-\mathbf{u}_B)$, y el anterior resultado sería determinado nuevamente.

http://librosysolucionarios.net

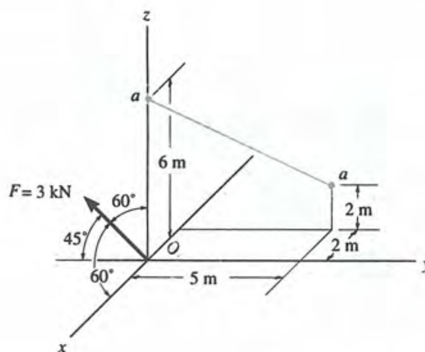
PROBLEMAS

4.42. Determine el momento de la fuerza **F** alrededor del eje *Oa*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



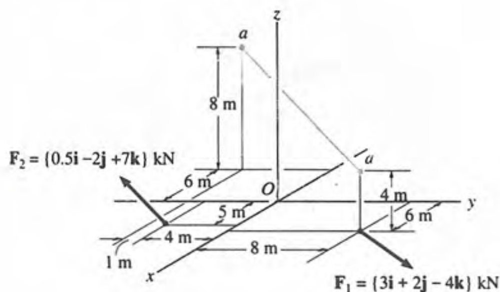
Prob. 4.42

*** 4.44.** Determine el momento de la fuerza **F** alrededor del eje *aa*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



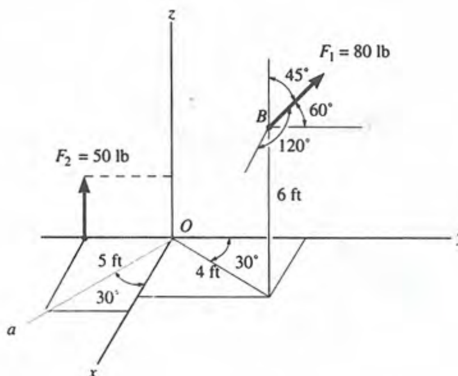
Prob. 4.44

4.43. Determine el momento resultante de dos fuerzas alrededor del eje *aa*. Exprese el resultadao como un vector cartesiano.



Prob. 4.43

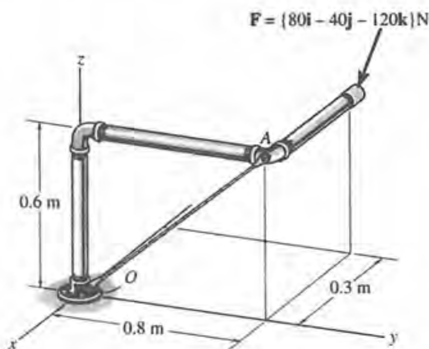
4.45. Determine el momento resultante de las dos fuerzas alrededor del eje *Oa*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



Prob. 4.45

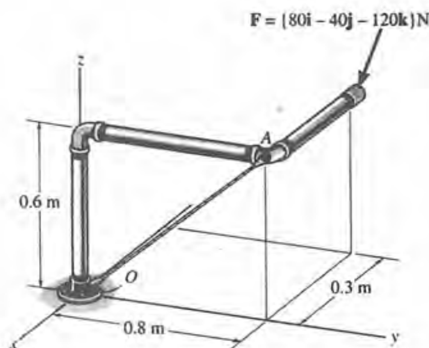
http://librosysolucionarios.net

4-46. Determine los momentos de la fuerza **F** respecto a los ejes *x*, *y*, *z*. Resuelva el problema (*a*) con enfoque vectorial cartesiano y (*b*) con el enfoque escalar.



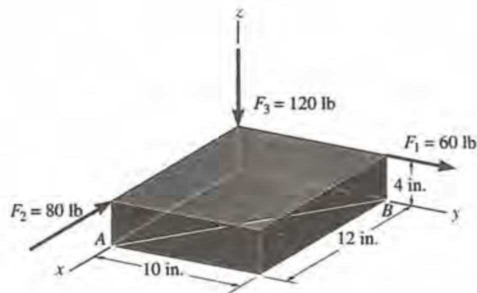
Prob. 4.46

4.47. Determine el momento de la fuerza **F** respecto a un eje que une los puntos *O* y *A*. Exprese el resultado como vector cartesiano.



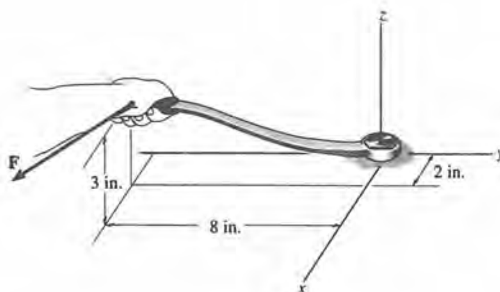
Prob. 4.47

***4.48.** Determine la magnitud del momento resultante de las tres fuerzas respecto al eje *AB*. Resuelva (*a*) usando un enfoque vectorial cartesiano y (*b*) usando un enfoque escalar.



Prob. 4.48

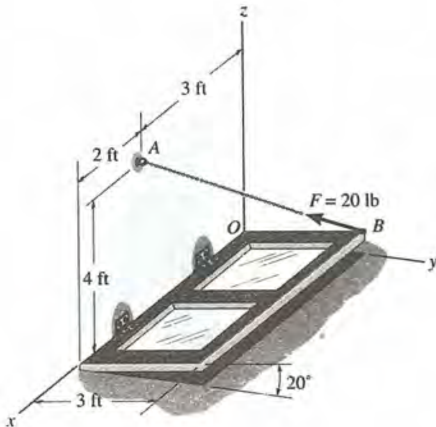
4.49. Una fuerza **F** = {8**i** – 1**j** + 1**k**} lb se aplica al mango de la llave. Determine la componente del momento de esta fuerza respecto al eje *z* que tiene efecto en apretar el perno.



Prob. 4.49

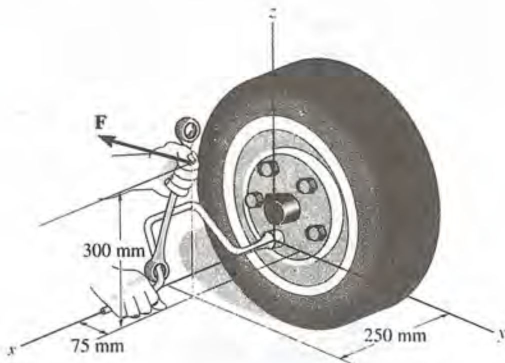
http://librosysolucionarios.net

4.50. La cadena AB ejerce una fuerza de 20 lb sobre la puerta en B. Determine la magnitud del momento de esta fuerza respecto al eje de las bisagras de esta puerta, el eje x.



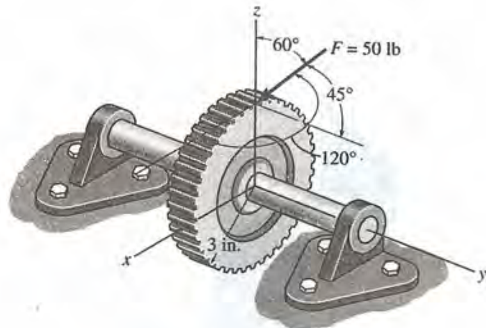
Prob. 4.50

4.51. Se usan las dos llaves en combinación para quitar la tuerca de la maza de la rueda. Si la fuerza aplicada al final de la llave de caja es $\mathbf{F} = \{4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}$ N, determine la magnitud del momento de esta fuerza respecto al eje x que es eficiente para sacar la tuerca.



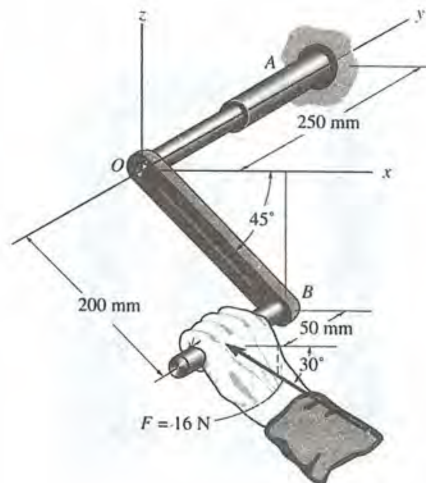
Prob. 4.51

***4.52.** La fuerza de 50 lb actúa sobre el engrane en la dirección mostrada. Determine el momento de esta fuerza respecto al eje y.



Prob. 4.52

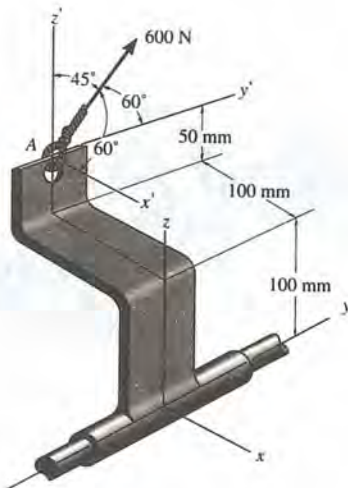
4.53. Determine el momento que la fuerza **F** ejerce respecto al eje y que es el eje de la flecha. Resuelva el problema mediante los métodos vectorial cartesiano y escalar. Exprese el resultado como vector cartesiano.



Prob. 4.53

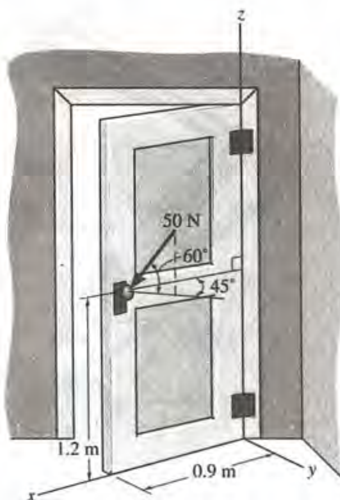
http://librosysolucionarios.net

4.54. En la ménsula actúa una fuerza de 600 N aplicada en el punto A. Determine el momento de esta fuerza respecto al eje y.



Prob. 4.54

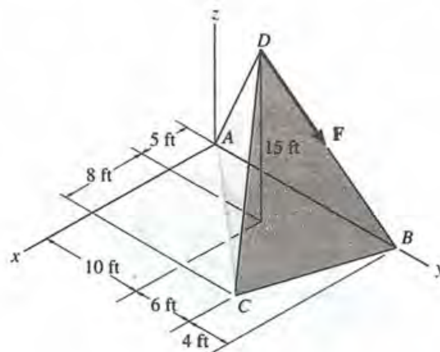
4.55. Una fuerza de 50 N se aplica a la manija de la puerta. Determine el momento de esta fuerza respecto al eje z de las bisagras. Ignore el tamaño de la manija. *Sugerencia*: use análisis escalar.



Prob. 4.55

* **4.56.** La fuerza de $\mathbf{F}$ = 80 lb actúa a lo largo de la arista DB del tetraedro. Determine la magnitud del momento de esta fuerza respecto a la arista AC.

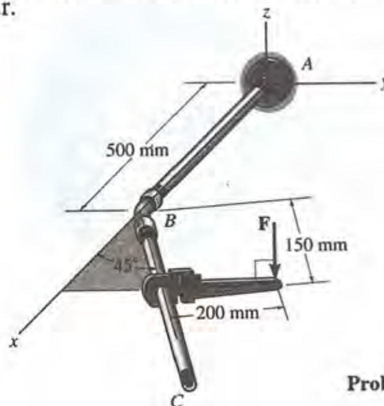
4.57. Si el momento de la fuerza $\mathbf{F}$ respecto a la arista AC del tetraedro tiene una magnitud de M = 200 lb · ft y se dirige de C a A, determine la magnitud de $\mathbf{F}$.



Probs. 4.56/4.57

4.58. Una fuerza vertical de F = 60 N se aplica al mango de la llave Stillson. Determine el momento que esta fuerza ejerce a lo largo del eje AB (eje x) del ensamble tubular. Tanto la llave como el ensamble tubular ABC se encuentran en el plano $x-y$. *Sugerencia*: use análisis escalar.

4.59. Determine la magnitud de la fuerza vertical $\mathbf{F}$ que actúa en el mango, de modo que esta fuerza produzca una componente de momento a lo largo del eje AB (eje x) del ensamble tubular de$((\mathbf{M}_A)_x$ = {–5**i**} N · m. El ensamble tubular y la llave están contenidos en el plano $x-y$. *Sugerencia*: Utilice análisis escalar.



Probs. 4.58/4.59

http://librosysolucionarios.net

4.6 Momento de un par

Un *par* se define como dos fuerzas paralelas que tienen la misma magnitud, sentidos opuestos y están separadas por una distancia perpendicular *d*, figura 4.26. Ya que la fuerza resultante de las dos fuerzas que componen el par es cero, el único efecto de un par es producir una rotación o tendencia a la rotación en el sentido especificado.

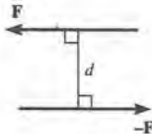


Fig. 4.26

El momento que produce un par, denominado *momento de un par*, es equivalente a la suma de los momentos de las dos fuerzas del par, determinado respecto a *cualquier* punto *O* del espacio. Para mostrarlo, considérense los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, dirigidos desde *O* hasta los puntos *A* y *B* que están sobre la línea de acción de $-\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}$, figura 4.27. El momento del par calculado respecto a *O* es, por tanto,

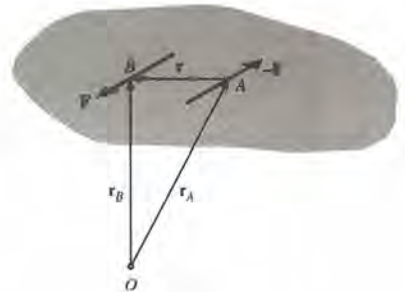


Fig. 4.27

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_B \times (\mathbf{F})$$
$$= (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}$$

Por la ley del triángulo para adición vectorial, $\mathbf{r}_A + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B$ o $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, de modo que

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4.13}$$

Este resultado indica que el momento de un par es un *vector libre*, es decir, que puede actuar en *cualquier punto*, ya que **M** depende *solamente* del vector de posición dirigido *entre* las fuerzas y *no* de los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, dirigidos del punto *O* a las fuerzas. Este concepto es, por tanto, diferente del concepto de momento de una fuerza, el cual requiere un punto definido o eje respecto a los cuales se determinen los momentos.

Formulación escalar. El momento de un par, **M**, figura 4.28 se define dotado de una *magnitud* igual a

$$M = Fd \tag{4.14}$$

donde *F* es la magnitud de una de las fuerzas y *d* es la distancia perpendicular o brazo de palanca entre las fuerzas. La *dirección* y el sentido del momento del par se determinan por la regla del tirabuzón, donde el pulgar indica la dirección al cerrar los dedos en el sentido de la rotación causada por las dos fuerzas. En todos los casos, **M** actúa perpendicularmente al plano que contiene estas fuerzas.

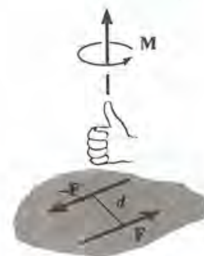


Fig. 4.28

http://librosysolucionarios.net

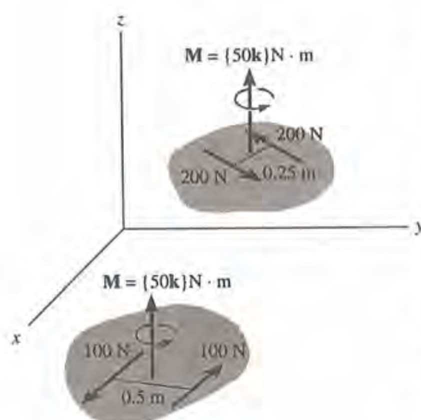


Fig. 4.29

Formulación vectorial. El momento de un par también puede expresarse mediante el producto vectorial con ayuda de la ecuación 4.13.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4.15}$$

Es fácil recordar la aplicación de esta ecuación pensando en tomar los momentos de ambas fuerzas respecto a un punto en la línea de acción de una de las fuerzas. Por ejemplo, si se toman los momentos respecto a A en la figura 4.27, el momento de $-\mathbf{F}$ es cero respecto a este punto y el momento de $\mathbf{F}$ se define de la ecuación 4.15. Por tanto, en la formulación se hace el producto cruz de $\mathbf{r}$ con la fuerza $\mathbf{F}$ a la que se dirige.

Pares equivalentes. Dos pares se consideran equivalentes si producen el mismo momento. Ya que el momento producido por un par es siempre perpendicular al plano que contiene las fuerzas del par, será necesario que las fuerzas de pares equivalentes se encuentren en el mismo plano o en planos *paralelos* entre sí. En esta forma, el sentido de cada momento de par será uno mismo, es decir, perpendicular a los planos paralelos de los pares. Por ejemplo, los dos pares mostrados en la figura 4.29 son equivalentes. Un par se produce por dos fuerzas de 100 N separadas por una distancia de d = 0.5 m, y la otra es producida por dos fuerzas de 200 N separadas por una distancia de 0.25 m. Dado que los planos donde actúan las fuerzas son paralelos al plano $x-y$, el momento producido por cada uno de los pares puede expresarse como $\mathbf{M} = \{50\mathbf{k}\}\text{N} \cdot \text{m}$.

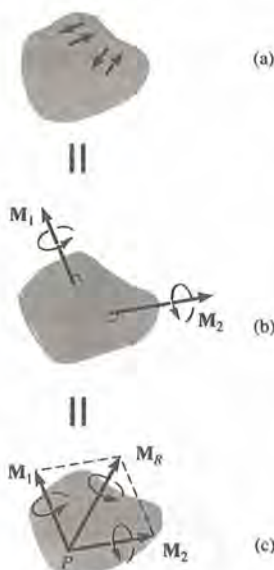


Fig. 4.30

Resultante de momentos de pares. Dado que los momentos de pares son vectores libres, pueden aplicarse en cualquier punto P de un cuerpo y sumarse vectorialmente. Por ejemplo, los dos pares que actúan en planos diferentes del cuerpo rígido en la figura 4.30*a* pueden reemplazarse por sus momentos de par $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$, figura 4.30*b* y entonces estos vectores libres pueden moverse al *punto arbitrario P* y sumarse para obtener el momento de par resultante $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ que se ve en la figura 4.30*c*.

Si son más de dos pares los que actúan sobre el cuerpo, se puede generalizar este concepto y escribir la resultante vectorial como

$$\mathbf{M}_R = \Sigma \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4.16}$$

donde cada momento de par se calcula de acuerdo con la ecuación 4.15.

Los ejemplos a continuación ilustran estos conceptos numéricamente. En general, los problemas proyectados en dos dimensiones deberán resolverse usando análisis escalar, dado que los brazos de palanca y componentes de fuerzas se calculan con facilidad.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.11

En el extremo de la viga de la figura 4.31*a* actúa un par. Reemplácese por un par equivalente que contenga dos fuerzas que actúen por (*a*) los puntos *A* y *B*, y (*b*) los puntos *D* y *E*.

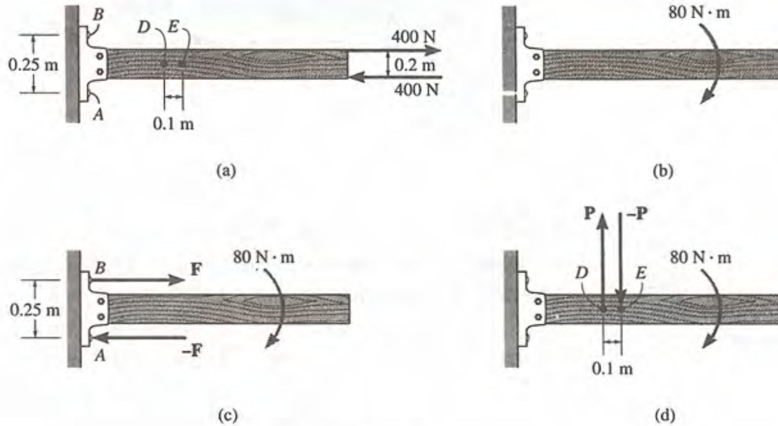


Fig. 4.31

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS ESCALAR*)

El par tiene una magnitud de $M = Fd = 400(0.2) = 80$ N · m y dirección, es decir, hacia adentro de la página, porque las fuerzas tienden a girar en el sentido de las manecillas del reloj. **M** es un vector libre, de modo que se le puede colocar en cualquier punto de la viga, figura. 4.31*b*.

Parte (*a*). Para preservar la dirección de **M**, las fuerzas *horizontales* que actúan por los puntos *A* y *B* deben dirigirse como se ve en la figura 4.31*c*. La magnitud de cada fuerza es

$$M = Fd$$
$$80 = F(0.25)$$
$$F = 320 \text{ N}$$ ***Resp.***

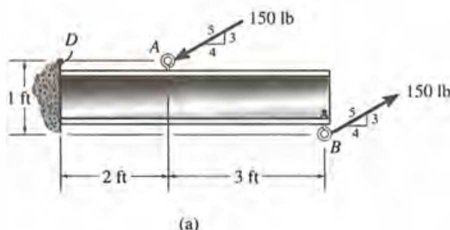
Parte (*b*). Para generar la rotación en el sentido de las manecillas del reloj, las fuerzas que actúan por los puntos *D* y *E* deben ser *verticales* y dirigirse como se muestra en la figura 4.31*d*. La magnitud de cada fuerza es

$$M = Pd$$
$$80 = P(0.1)$$
$$P = 800 \text{ N}$$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.12

Determine el momento de par que actúa en la viga mostrada en la figura 4.32*a*.



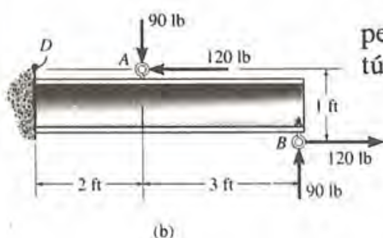
(a)

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS ESCALAR*)

Aquí presentan cierta dificultad la determinación de la distancia perpendicular entre las fuerzas y el cálculo del momento del par como $M = Fd$. En lugar de ello, podemos resolver cada fuerza en sus componentes horizontal y vertical, $F_x = 4/5(150) = 120$ lb y $F_y = 3/5(150) = 90$ lb, figura 4.32*b*, y entonces usar el principio de los momentos. El momento de par se puede determinar respecto a *cualquier punto*. Por ejemplo, si se elige el punto *D*, tenemos, para las cuatro fuerzas

$$\circlearrowleft + M = 120\text{ lb}(0\text{ ft}) - 90\text{ lb}(2\text{ ft}) + 90\text{ lb}(5\text{ ft}) + 120\text{ lb}(1\text{ ft})$$
$$= 390\text{ lb}\cdot\text{ft} \circlearrowleft$$ ***Resp.***

Sin embargo, es más fácil determinar los momentos respecto a *A* o *B* para *eliminar* el momento de las fuerzas que actúan en ese punto. Para el punto *A*, figura 4.28*b*, tenemos



(b)

$$\circlearrowleft + M = 90\text{ lb}(3\text{ ft}) + 120\text{ lb}(1\text{ ft})$$
$$= 390\text{ lb}\cdot\text{ft} \circlearrowleft$$ ***Resp.***

Demuéstrese que se obtiene el mismo resultado si los momentos se suman respecto a *B*. Nótese también que el par de la figura 4.32*a* ha sido reemplazado por dos pares en la figura 4.32*b*. Usando $M = Fd$, un par tiene momento $M_1 = 90$ lb(3 ft) = 270 lb · ft y el otro tiene momento de $M_2 = 120$ lb(1 ft) = 120 lb · ft. Por la regla de la mano derecha, ambos momentos de par están en el sentido contrario al de las manecillas del reloj y por tanto dirigidos hacia el lado del lector. Ya que estos momentos son vectores libres, se pueden mover a cualquier punto y sumarse para dar $M = 270$ lb · ft + 120 lb · ft = 390 lb · ft , que el resultado antes determinado también. **M** es un vector libre y puede, por tanto, actuar en cualquier punto de la viga, figura 4.32*c*.

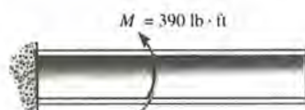
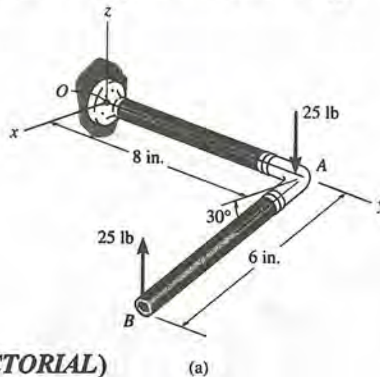


Fig. 4.32

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.13

Determine el momento del par que actúa sobre el tubo que se muestra en la figura 4.33*a*. El segmento *AB* se dirige 30° por abajo del plano *x*−*y*.



(a)

SOLUCIÓN I (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

El momento de las fuerzas del par puede encontrarse respecto a *cualquier punto*. Si se considera el punto *O*, figura 4.33*b*, tenemos

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times (-25\mathbf{k}) + \mathbf{r}_B \times (25\mathbf{k})$$
$$= (8\mathbf{j}) \times (-25\mathbf{k}) + (6 \cos 30°\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6 \text{ sen } 30°\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k})$$
$$= -200\mathbf{i} - 129.9\mathbf{j} + 200\mathbf{i}$$
$$= \{-130\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{in} \qquad \textit{Resp.}$$

Es más *fácil* tomar momentos de las fuerzas del par respecto a un punto que se encuentre sobre la línea de acción de una de las fuerzas, por ejemplo, el punto *A*, figura 4.33*c*. En este caso el momento de la fuerza en *A* es cero, de modo que

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{AB} \times (25\mathbf{k})$$
$$= (6 \cos 30°\mathbf{i} - 6 \text{ sen } 30°\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k})$$
$$= \{-130\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{in} \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II (*ANÁLISIS ESCALAR*)

Aunque el problema se muestra en tres dimensiones, la geometría es tan simple que permite el uso de la ecuación $M = Fd$. La distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas es $d = 6 \cos 30° = 5.20$ in, figura 4.33*d*. Así, tomando momentos de las fuerzas respecto al punto *A* o al punto *B*, se obtendrá

$$M = Fd = 25(5.20) = 129.9 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

Aplicando la regla de la mano derecha, **M** actúa en la dirección −**j**. Por tanto,

$$\mathbf{M} = \{-130\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{in} \qquad \textit{Resp.}$$

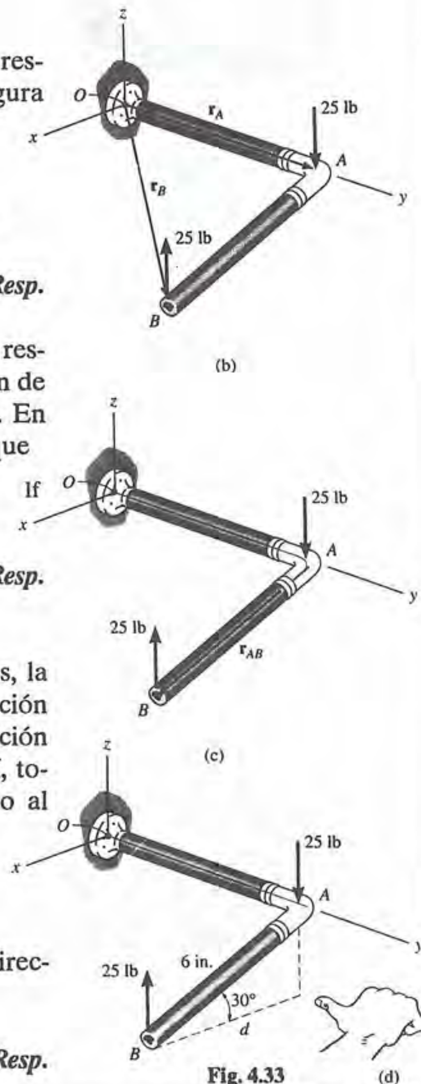


Fig. 4.33

Ejemplo 4.14

Reemplace los dos pares que actúan sobre el bloque triangular en la figura 4.34*a*, por un momento de par resultante.

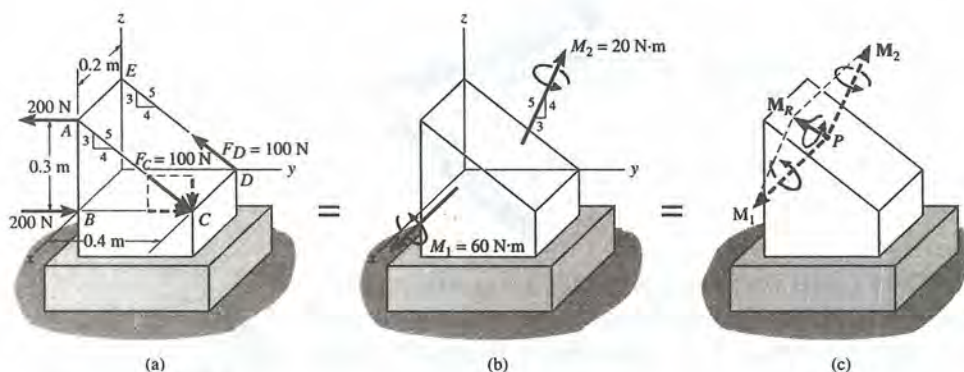


Fig. 4.34

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

El momento de un par $\mathbf{M}_1$, desarrollado por las fuerzas en *A* y *B* puede ser fácilmente determinado de una formulación escalar.

$$M_1 = Fd = 200(0.3) = 60\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Por la regla de la mano derecha, $\mathbf{M}_1$ actúa en la dirección $+\mathbf{i}$, figura 4.34*b*. Por tanto,

$$\mathbf{M}_1 = \{60\mathbf{i}\}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Se usará análisis vectorial para determinar $\mathbf{M}_2$, causado por las fuerzas en *C* y *D*. Si se calculan los momentos respecto a *D*, figura 4.34*a*, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_{DC} \times \mathbf{F}_C$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_{DC} \times \mathbf{F}_C &= (0.2\mathbf{i}) \times [100(\tfrac{4}{5})\mathbf{j} - 100(\tfrac{3}{5})\mathbf{k}]\\ &= (0.2\mathbf{i}) \times [80\mathbf{j} - 60\mathbf{k}] = 16(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - 12(\mathbf{i} \times \mathbf{k})\\ &= \{12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}\}\ \text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Trate de establecer usando una formulación escalar, figura 4.34*b*.

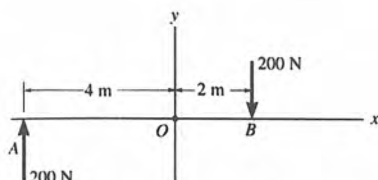
Dado que $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son vectores libres, pueden moverse arbitrariamente a un punto *P* del bloque y sumarse vectorialmente, figura 4.34*c*. El momento resultante de estos pares viene a ser

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \{60\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}\}\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

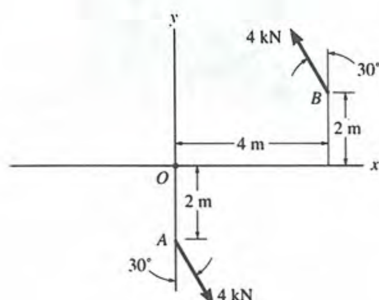
PROBLEMAS

*4.60. Determine la magnitud y dirección del momento del par.



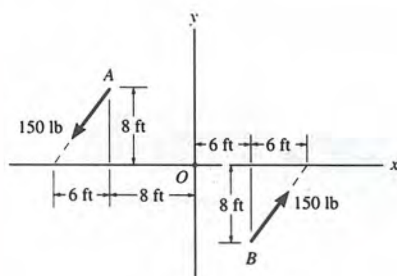
Prob. 4.60

4.61. Determine la magnitud y dirección del momento del par.



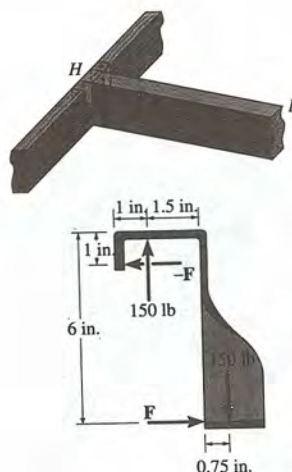
Prob. 4.61

4.62. Determine la magnitud y la dirección del momento del par.



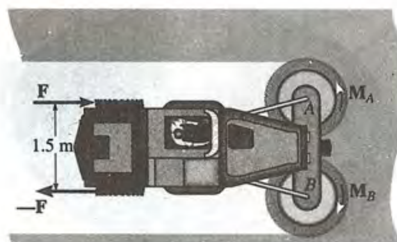
Prob. 4.62

4.63. En el soporte *H* se fija el extremo de la viga de piso *B*. Si la carga sobre el soporte consiste en dos pares, determine la magnitud de las fuerzas horizontales **F** y –**F**, de manera que el momento de par resultante sobre el soporte sea igual a cero.



Prob. 4.63

*4.64. El asfalto reacciona con un torque de M_A = 400 N · m y M_B = 200 N · m sobre los cepillos de la máquina de limpieza. Determine la magnitud del par de fuerzas que desarrolla el asfalto sobre las ruedas traseras de la máquina, de modo que el momento de un par resultante sobre la máquina sea cero. ¿Cuál es la magnitud de estas fuerzas, si deja de funcionar el cepillo en *B*?

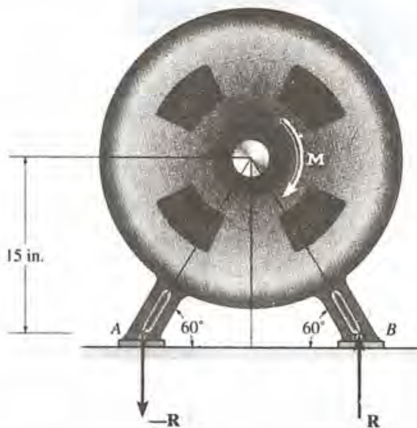


Prob. 4.64

http://librosysolucionarios.net

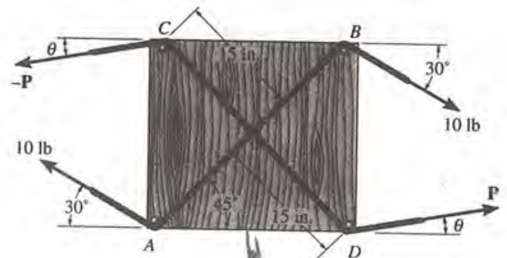
4.65. El momento de un par de magnitud $M = 40$ lb · ft y sentido de las manecillas del reloj es resistido por el eje de un motor eléctrico. Determine las magnitudes de las fuerzas de reacción **R** y **–R** que actúan en los soportes A y B, de manera que el resultante de los dos pares sea cero.

4.66. Determine la magnitud del momento de par **M** que actúa sobre el motor eléctrico si las fuerzas reactivas **R** y **–R** tienen, cada una, magnitud de 20 lb y el resultante de los dos pares es cero.



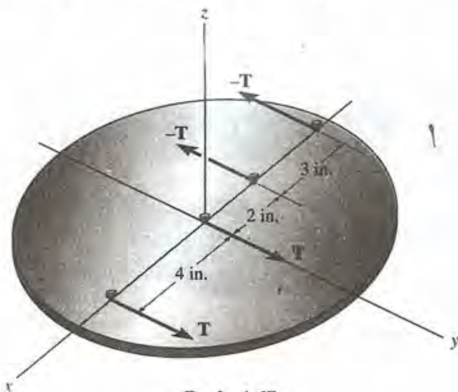
Probs. 4.65/4.66

*** 4.68.** La cuerda que pasa por las dos pequeñas clavijas A y B de la tabla está sujeta a una tensión de 10 lb. Determine la tensión *mínima* P y la orientación θ de la cuerda que pasa por las clavijas C y D, de modo que el momento de un par resultante producido por las dos cuerdas sea 20 lb · in en el sentido de las manecillas del reloj.



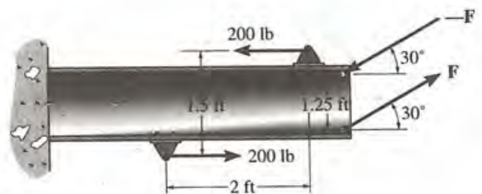
Prob. 4.68

4.67. El momento de un par resultante creado por los dos pares que actúan sobre el disco es {10**k**} klb · in. Determine la magnitud de la fuerza **T**.



Prob. 4.67

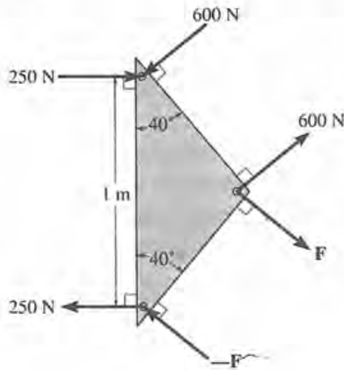
4.69. Dos pares actúan sobre la viga. Determine la magnitud de **F**, de modo que el momento de un par resultante sea 450 lb · ft, en el sentido contrario a las manecillas del reloj. ¿En qué lugar de la viga actúa el momento de un par resultante?



Prob. 4.69

http://librosysolucionarios.net

4.70. Los extremos de la placa triangular están sometidos a tres pares. Determine la magnitud de la fuerza **F** de modo que el momento de un par resultante sea 400 N · m en sentido de las manecillas del reloj.

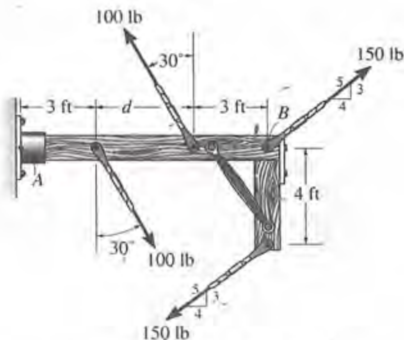


Prob. 4.70

4.71. Dos pares actúan sobre la estructura. Si el momento de un par resultante debe ser igual a cero, determine la distancia d entre las fuerzas del par de magnitud 100 lb.

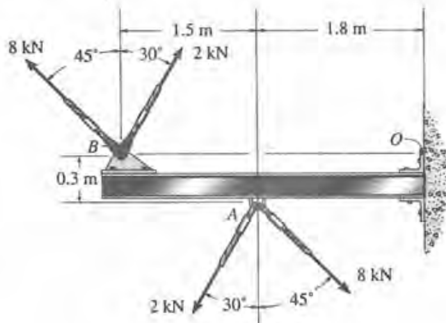
*__4.72.__ Sobre la estructura actúan dos pares. Si d = 4 ft, determine el momento de un par resultante. Calcule el resultado resolviendo cada fuerza en componentes x y y (a) encontrando el momento de cada par (Ec. 4.14) y (b) sumando los momentos de todas las componentes de fuerza respecto al punto A.

4.73. Sobre la estructura actúan dos pares. Si d = 6 ft, determine el momento de un par resultante. Calcule el resultado resolviendo cada fuerza en componentes x, y (a) encontrando el momento de cada par (ecuación 4.14) y (b) sumando los momentos de todas las componentes de fuerzas respecto al punto B.



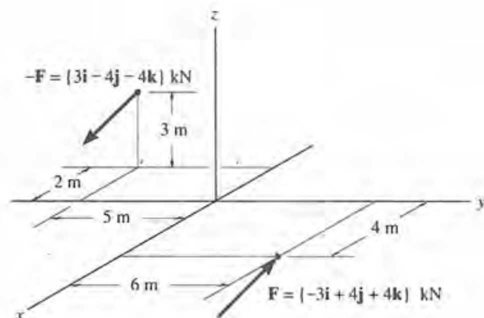
Probs. 4.71/4.72/4.73

4.74. Determine el momento de un par resultante que actúa sobre la viga. Resuelva el problema de dos formas: (a) sumando momentos respecto a O; y (b) sumando momentos respecto de A.



Prob. 4.74

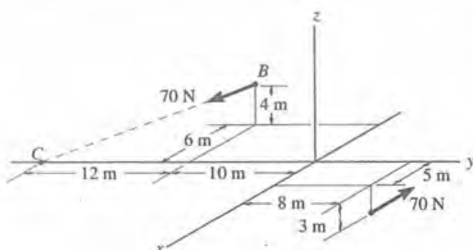
4.75. Determine el momento del par. Exprese el resultado como vector cartesiano.



Prob. 4.75

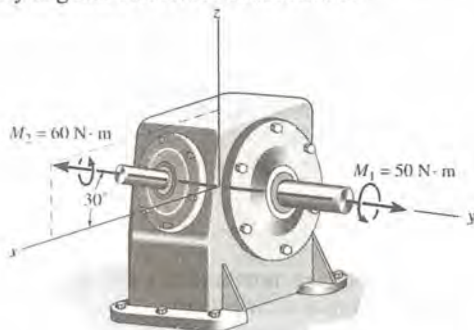
http://librosysolucionarios.net

***4.76.** Determine el momento del par. Exprese el resultado como vector cartesiano.



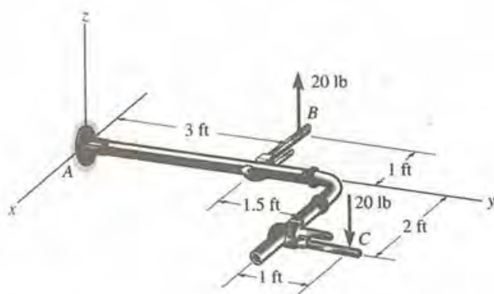
Prob. 4.76

4.77. El engranaje desmultiplicador está sujeto a los momentos de un par que se muestran. Determine el momento de un par resultante y especifique su magnitud y ángulos directores coordenados.



Prob. 4.77

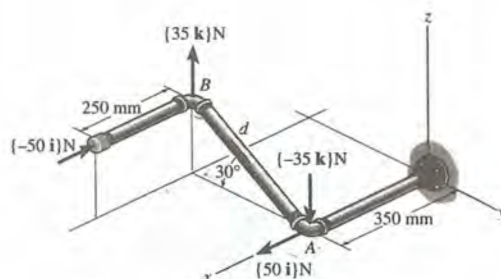
4.78. Exprese el momento del par que actúa sobre el ensamble tubular en forma vectorial cartesiana. ¿Cuál es la magnitud del momento de par?



Prob. 4.78

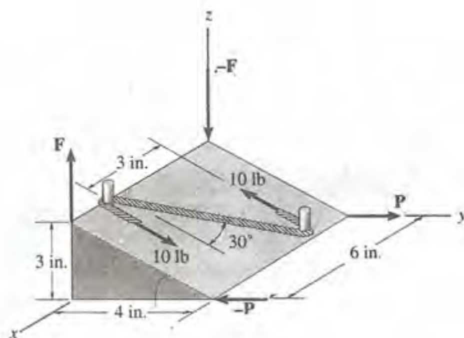
4.79. Determine el momento de un par resultante de los dos pares que actúan sobre el ensamble tubular. La distancia entre A y B es d = 400 mm. Exprese el vector en forma cartesiana.

***4.80.** Determine la distancia d entre A y B, de manera que el momento de un par resultante tenga magnitud de M_R = 20 N · m.



Probs. 4.79/4.80

4.81. Si el momento de un par resultante de los tres pares que actúan en el bloque triangular ha de ser cero, determine la magnitud de las fuerzas **F** y **P**.



Prob. 4.81

http://librosysolucionarios.net

4.7 Movimiento de una fuerza en un cuerpo rígido

Numerosos problemas de la estática, incluida la reducción de un sistema de fuerzas a su expresión más simple posible, requieren mover una fuerza de un punto a otro en un cuerpo rígido. Ya que una fuerza tiende tanto a *trasladar* como a *rotar* el cuerpo, es importante que estos dos efectos "externos" se mantengan sin cambio, si la fuerza se mueve de uno a otro punto del cuerpo. Ahora consideraremos dos casos en relación con la localización del punto O al que se ha de mover la fuerza.

1. El punto O está en la línea de acción de la fuerza. Consideremos el cuerpo rígido que se muestra en la figura 4.35*a*, sujeto a la fuerza **F** aplicada al punto A. Para mover la fuerza al punto O aplicaremos, primeramente, las fuerzas de la misma magnitud, pero mutuamente opuestas **F** y −**F** en O, como se muestra en la figura 4.35*b*. Este paso no altera de modo alguno los efectos externos sobre el cuerpo; sin embargo, las dos fuerzas indicadas con la pequeña transversal pueden cancelarse, y dejar la fuerza en el punto O como se quiere, figura 4.35*c*. Usando este procedimiento de construcción, se ha mantenido un *sistema equivalente* entre cada uno de los diagramas, lo que se indica con el signo de "igual". Observemos, sin embargo, que la fuerza sólo ha sido "transmitida" a lo largo de su línea de acción del punto A, figura 4.35*a*, al punto O, figura 4.35*c*. En otras palabras, la fuerza pue-

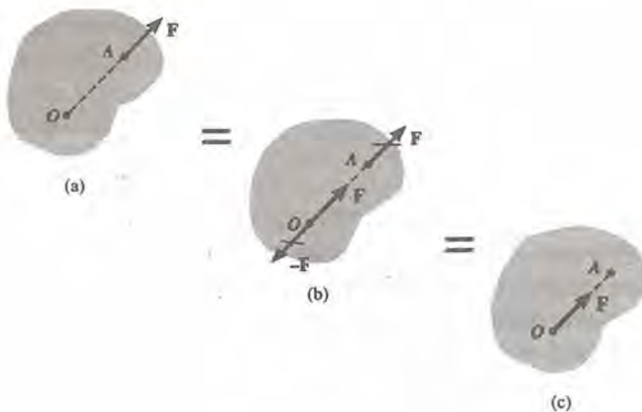


Fig. 4.35

http://librosysolucionarios.net

de considerarse como un *vector deslizante*, puesto que puede actúar en cualquier punto de su línea de acción. En la sección 4.4 nos hemos referido a este concepto como *principio de transmisibilidad.* Puede formalmente enunciarse como sigue: *los efectos externos que actúan sobre un cuerpo rígido permanecen inalterados cuando una fuerza, que actúa en un punto dado de un cuerpo, se aplica en otro punto situado sobre la línea de acción de la fuerza.* Es importante darse cuenta de que tan sólo los *efectos externos* causados por la fuerza *permanecen* inalterados después de moverla. Es un hecho que los *efectos internos* dependen del punto donde se localiza **F**. Por ejemplo, cuando **F** actúa en A, las fuerzas internas en el cuerpo tienen una elevada intensidad alrededor de A; mientras que si **F** actúa en O, el efecto de **F** en la generación de fuerzas internas en A será menor.

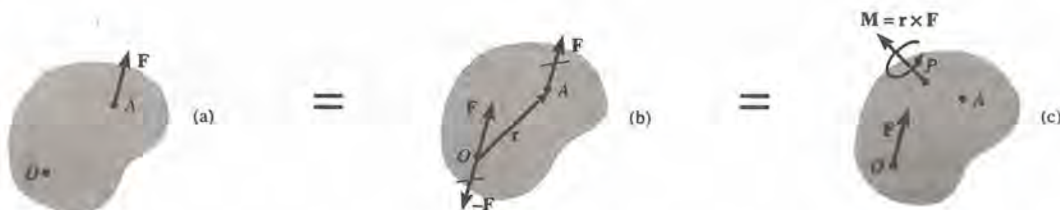


Fig. 4.36

2. *El punto O no se encuentra en la línea de acción de la fuerza.* Este caso se ilustra en la figura 4.36*a*. Siguiendo el mismo procedimiento anterior, primero aplicamos fuerzas de igual magnitud, pero opuestas en O, las fuerzas **F** y −**F** de la figura 4.36*b*. Aquí, las dos fuerzas identificadas por la pequeña transversal forman un par con momento dado por el producto vectorial **M** = **r** × **F**. Ya que el momento de un par es un *vector libre*, se le puede aplicar en cualquier punto P del cuerpo como se ve en la figura 4.36*c*. F actúa ahora en el punto O, como se quería, además de este momento de un par.

http://librosysolucionarios.net

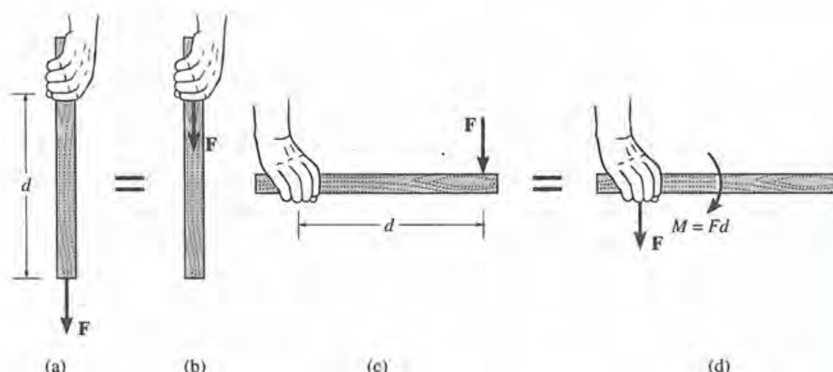


Fig. 4.37

Como ilustración física de estos dos enunciados, consideremos el efecto que produce sobre la mano el sostener un pedazo de palo de peso despreciable. Si se aplica una fuerza vertical al otro extremo del palo y se le mantiene en posición vertical, como en la figura 4.37*a*, entonces, por el principio de transmisibilidad, la misma fuerza es sentida en el puño, figura 4.37*b*, sin atender al punto de la línea de acción donde la fuerza se aplique. Cuando se mantiene el palo en posición horizontal, figura 4.37*c*, la fuerza tiene el efecto de producir *tanto* una fuerza hacia abajo en el puño *como* una torsión en el sentido de las manecillas de un reloj, figura 4.37*d*. Estos mismos efectos serán sentidos en el puño, si la fuerza **F** y el momento de par $M = Fd$ son aplicados en la empuñadura, figura 4.37*c*.

4.8 Resultantes de un sistema de fuerzas y pares

Cuando un cuerpo rígido está sujeto a un sistema de fuerzas y momentos de pares, suele ser más fácil estudiar los efectos externos sobre el cuerpo si se usan las resultantes de fuerzas y momentos de pares, en vez del sistema de fuerzas y momentos. Para mostrar cómo se simplifica un sistema de fuerzas y momentos de pares en sus resultantes, considérese el cuerpo rígido de la figura 4.38*a*. El sistema de fuerzas y momentos de pares que actúa sobre el cuerpo será simplificado moviendo las fuerzas y los momentos de pares al punto arbitrario *O*. A este respecto, el mo-

http://librosysolucionarios.net

mento de par **M** simplemente se mueve a *O*, ya que es un vector libre. Las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son vectores deslizantes y, dado que *O* no se encuentra sobre la línea de acción de estas fuerzas, debe moverse cada una a *O*, de acuerdo con el procedimiento explicado en la sección 4.7. Por ejemplo, cuando $\mathbf{F}_1$ se aplica en *O*, debe aplicarse el momento de un par correspondiente $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ al cuerpo, figura 4.38*b*. Por adición vectorial, el sistema de fuerzas y momentos de pares mostrado en la figura 4.38*b* puede ahora reducirse a una fuerza resultante equivalente $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y momento de un par resultante $\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ como se ve en la figura 4.38*c*. Obsérvese que tanto la magnitud como la dirección de $\mathbf{F}_R$ son independientes de la localización del punto *O*; sin embargo, $\mathbf{M}_{R_O}$ depende de su localización, ya que los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ se calculan usando los vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Es importante darse cuenta de que $\mathbf{M}_{R_O}$ es un vector libre y puede actuar en *todo punto* del cuerpo, aunque *O* suele elegirse como su punto de aplicación.

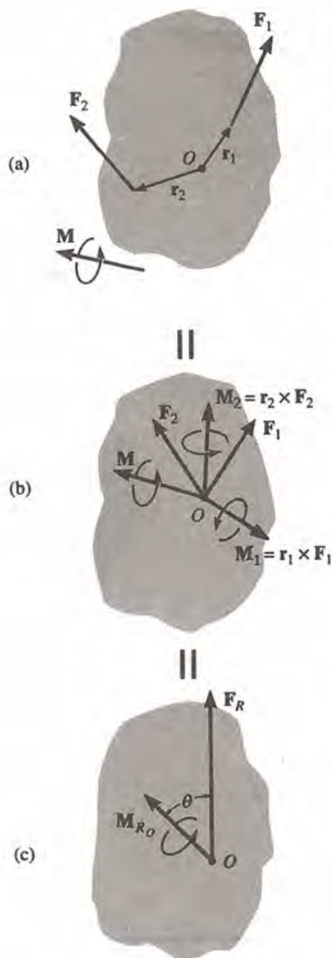


Fig. 4.38

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El método precedente para simplificación de un sistema de fuerzas y momentos de pares a una fuerza resultante que actúe en *O* y el momento de un par resultante será descrito ahora en términos generales. Para aplicar este método es necesario, primeramente, establecer un sistema de coordenadas *x*, *y*, *z*.

Sistemas de tres dimensiones. Para resolver problemas en que interviene un sistema de fuerzas y de pares en tres dimensiones, se usa, en general, un análisis vectorial cartesiano, en caso de que sea difícil determinar las componentes de fuerzas y brazos de palanca.

Suma de fuerzas. La fuerza resultante es equivalente a la suma vectorial de todas las fuerzas del sistema; es decir

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} \tag{4.17}$$

Suma de momentos. El momento de un par resultante es equivalente a la suma vectorial de todos los momentos de pares del sistema más los momentos respecto a *O* de todas las fuerzas del sistema; esto es

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M}_O \tag{4.18}$$

http://librosysolucionarios.net

Sistemas de fuerzas coplanares. Puesto que las componentes de fuerzas y brazos de palanca se determinan con facilidad en dos dimensiones, un análisis escalar es lo más conveniente para resolver problemas relacionados con sistemas de fuerzas coplanares. Suponiendo que las fuerzas se encuentran en el plano $x-y$, y que los momentos de pares sean perpendiculares a este plano (con dirección igual al eje z), entonces las resultantes se determinan como sigue :

Suma de las fuerzas. La *fuerza resultante* $\mathbf{F}_R$ es equivalente a la suma vectorial de sus dos componentes $\mathbf{F}_{R_x}$ y $\mathbf{F}_{R_y}$. Cada componente se encuentra por suma escalar (algebraica) de las componentes de todas las fuerzas en el sistema que actúan en la dirección correspondiente, es decir,

$$F_{R_x} = \Sigma F_x$$
$$F_{R_y} = \Sigma F_y \qquad (4.19)$$

Suma de momentos. El *momento de un par resultante* $\mathbf{M}_{R_O}$ es perpendicular al plano que contiene las fuerzas y es equivalente a la suma escalar (algebraica) de todos los momentos de pares en el sistema, más los momentos respecto a O de todas las fuerzas en el sistema; es decir,

$$\mathrm{M}_{R_O} = \Sigma M_O \qquad (4.20)$$

Al determinar los momentos de las fuerzas respecto a O, suele ser ventajoso usar el *principio de los momentos*; es decir, determinar los momentos de las *componentes* de cada fuerza, en vez del momento de la fuerza misma.

Es importante recordar que al aplicar cualquiera de estas ecuaciones, debe ponerse atención al sentido de las componentes y los momentos de las fuerzas. Si están a lo largo de los ejes coordenados positivos, representan escalares positivos; pero si estas componentes tienen el sentido de la parte negativa de los ejes, son escalares negativos. Siguiendo este criterio, un resultado positivo indica que el vector resultante tiene sentido direccional hacia la parte positiva del eje de coordenadas.

Los siguientes ejemplos ilustran estos procedimientos numéricamente.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.15

Reemplace las fuerzas que actúan sobre el tubo mostrado en la figura 4.39*a* por una fuerza y momento de un par resultantes equivalentes que actúen en el punto *A*.

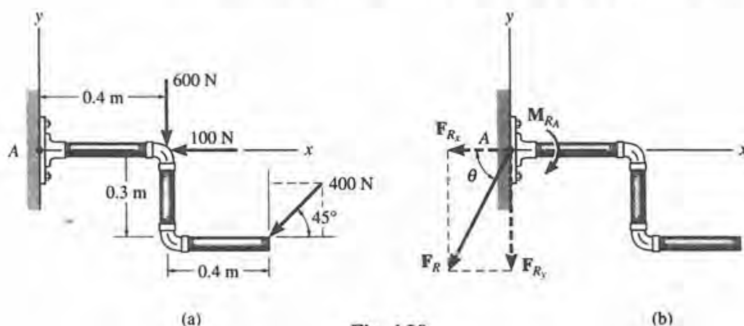


Fig. 4.39

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS ESCALAR*)

El principio de los momentos se aplicará a la fuerza de 400 N, con lo cual se considerarán los momentos de sus dos componentes rectangulares.

Suma de fuerzas. La fuerza resultante tiene componentes *x*, *y*, como a continuación

$$\xrightarrow{+} F_{R_x} = \Sigma F_x; \quad F_{R_x} = -100 - 400 \cos 45° = -382.8\text{N} = 382.8 \text{ N} \leftarrow$$
$$+\uparrow F_{R_y} = \Sigma F_y; \quad F_{R_y} = -600 - 400 \text{ sen } 45° = -882.8 \text{ N} = 882.8 \text{ N} \downarrow$$

Como se muestra en la figura 4.39*b*, $\mathbf{F}_R$ tiene una magnitud de

$$F_R = \sqrt{(F_{R_x})^2 + (F_{R_y})^2} = \sqrt{(382.8)^2 + (882.8)^2} = 962 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

y una dirección definida según el dibujo, que es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{R_y}}{F_{R_x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{882.8}{382.8}\right) = 66.6° \quad \textit{Resp.}$$

Suma de momentos. El momento de un par resultante $\mathbf{M}_{R_A}$ está determinado por la suma de los momentos de las fuerzas respecto a *A*. Si se supone que los momentos positivos actúan en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, es decir, en la dirección +**k**, tenemos

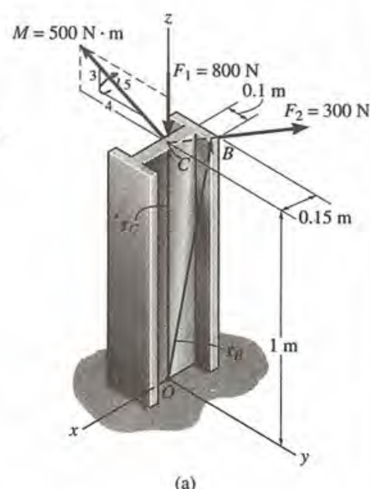
$$\circlearrowleft + M_{R_A} = \Sigma M_A;$$
$$M_{R_A} = 100(0) - 600(0.4) - (400 \text{ sen } 45°)(0.8) - (400 \cos 45°)(0.3)$$
$$= -551 \text{ N} \cdot \text{m} = 551 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowright \quad \textit{Resp.}$$

En conclusión, cuando $\mathbf{M}_{R_A}$ y $\mathbf{F}_R$ actúan en el punto *A* del tubo, figura 4.39*b*, producirán el *mismo* efecto externo o reacción en el soporte *A* que el producido por el sistema de fuerzas de la figura 4.39*a*.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.16

Una viga está sujeta al momento de un par **M** y fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ como se ve en la figura 4.40*a*. Reemplace este sistema por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto *O*.



(a)

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

Si expresamos las fuerzas y el momento de un par como vectores cartesianos, tenemos

$$\mathbf{F}_1 = \{-800\mathbf{k}\}\text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = (300\text{ N})\mathbf{u}_{CB} = (300\text{ N})\left(\frac{\mathbf{r}_{CB}}{r_{CB}}\right)$$

$$= 300\left[\frac{-0.15\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j}}{\sqrt{(-0.15)^2 + (0.1)^2}}\right] = \{-249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}\}\text{ N}$$

$$\mathbf{M} = -500(\tfrac{4}{5})\mathbf{j} + 500(\tfrac{3}{5})\mathbf{k} = \{-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}$$

Suma de fuerzas

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F};\qquad \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -800\mathbf{k} - 249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}$$

$$= \{-249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j} - 800\mathbf{k}\}\text{ N}$$ ***Resp.***

Suma de momentos

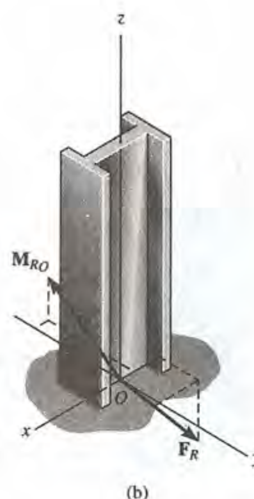
$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M}_O;$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{M} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2$$

$$= (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (1\mathbf{k}) \times (-800\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.15 & 0.1 & 1 \\ -249.6 & 166..4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (\mathbf{0}) + (-166.4\mathbf{i} - 249.6\mathbf{j})$$

$$= \{-166.4\mathbf{i} - 649.6\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}$$ ***Resp.***



(b)

Los resultados se muestran en la figura 4.40*b*.

Fig. 4.40

http://librosysolucionarios.net

4.9 Reducción adicional de un sistema de fuerzas y momentos de pares

Simplificación a una sola fuerza resultante. Consideremos ahora un caso especial cuyo sistema de fuerzas y momentos de pares que actúan en un cuerpo rígido, figura 4.41*a*, se reduce en O a una fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$ y un momento de par resultante $\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M}_O$, que son mutuamente *perpendiculares*, figura 4.41*b*. Cuando esto ocurra, podemos simplificar aún más el sistema de la fuerza y el momento de un par moviendo $\mathbf{F}_R$ a otro punto P, localizado ya sea en el cuerpo, ya sea fuera de él, de manera que no haya que aplicar momento de par alguno, como en la figura 4.41*c*.

La localización del punto P con respecto al punto O se puede determinar siempre y cuando se conozcan $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{M}_{R_O}$, figura 4.41*b*. Como se ve en la figura 4.41*c*, P debe encontrarse sobre el eje *bb*, que es perpendicular a la línea de acción de $\mathbf{F}_R$ y al eje *aa*. Se elige este punto de modo que sea satisfecha la ecuación escalar $\mathbf{M}_{R_O} = F_R\, d$ o $d = M_{R_O}/F_R$. Si $\mathbf{F}_R$ actúa en esa posición producirá los mismos efectos externos sobre el cuerpo que el sistema de fuerza y momento de un par de la figura 4.41*a*, o que la fuerza resultante y el momento de par resultante de la figura 4.41*b*. Se dirá que el sistema de fuerza y momentos de pares de la figura 4.41*a* es *equivalente o equipolente* al "sistema" de la sola fuerza en la figura 4.41*c*, porque cada sistema produce la misma fuerza y momento resultantes reemplazados en O.

Si un sistema de fuerzas es concurrente, coplanar o paralelo puede siempre reducirse, como en el caso anterior, a una sola fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ que actúe por un punto P único. Esto es porque en cada uno de estos casos $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{M}_{R_O}$ serán siempre perpendiculares entre sí, cuando el sistema de fuerzas sea simplificado en cualquier punto O.

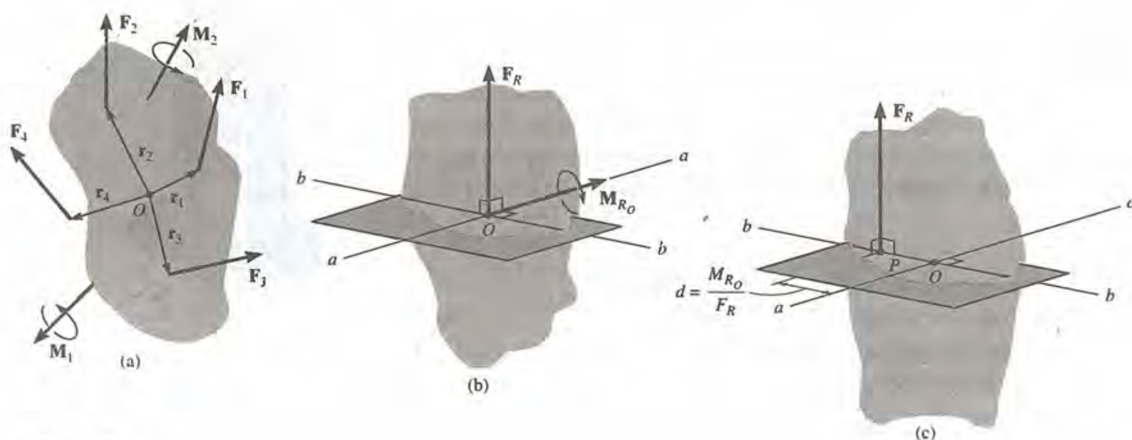


Fig. 4.41

http://librosysolucionarios.net

Los *sistemas de fuerzas concurrentes* fueron detalladamente tratados en el capítulo 2. Obviamente, todas las fuerzas actúan en un punto para el cual no existe resultante de momento de par, de modo que el punto *P* queda automáticamente especificado, figura 4.42.

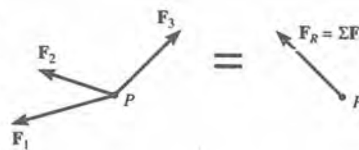


Fig. 4.42

Los *sistemas de fuerzas coplanares*, que pueden incluir momentos de par perpendiculares al plano de las fuerzas, como se muestra en la figura 4.43*a*, se pueden reducir a una fuerza resultante única, pues cuando se mueve a cualquier punto *O* del plano *x*−*y*, cada fuerza del sistema produce un momento de par que es *perpendicular* al plano, esto es, en la dirección $\pm\mathbf{k}$. El momento resultante $\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M} + \Sigma\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es, por tanto, perpendicular a la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$, figura 4.43*b*.

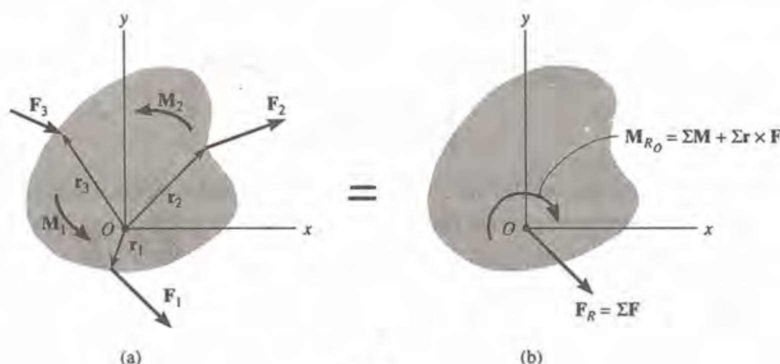


Fig. 4.43

Los *sistemas de fuerzas paralelas*, que pueden incluir momentos de pares que son perpendiculares a las fuerzas, como se ve en la figura 4.44*a*, pueden reducirse a una sola fuerza resultante, porque al mover cada fuerza a cualquier punto *O* en el plano *x*−*y*, se produce un momento de par que tiene componentes solamente a lo largo de los ejes *x* y *y*. El momento resultante $\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M} + \Sigma\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es, por tanto, perpendicular a la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$, figura 4.44*b*.

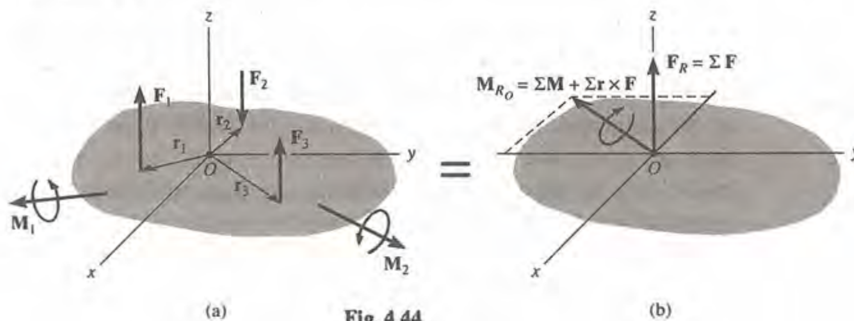


Fig. 4.44

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La técnica usada para reducir un sistema de fuerzas coplanares o paralelas a una sola fuerza resultante sigue el procedimiento general bosquejado en la sección precedente. Se establece, para empezar, un sistema de coordenadas x, y, z. Luego, la simplificación requiere los pasos siguientes:

Suma de fuerzas. La fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ es igual a la suma de todas las fuerzas del sistema, figura 4.41*a* y 4.41*c*; es decir,

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$$

Suma de momentos. La distancia d del punto arbitrario O a la línea de acción de $\mathbf{F}_R$ se determina igualando el momento de $\mathbf{F}_R$ respecto O, $\mathbf{M}_{R_O}$, figura 4.41*c*, a la suma de los momentos respecto al punto O de todos los momentos de pares y fuerzas del sistema, $\Sigma \mathbf{M}_O$, figura 4.41*a*; es decir,

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M}_O$$

El análisis escalar más usual es al aplicar estas ecuaciones pues las componentes de fuerzas y los brazos de palanca se determinan fácilmente para sistemas de fuerzas coplanares o paralelas.

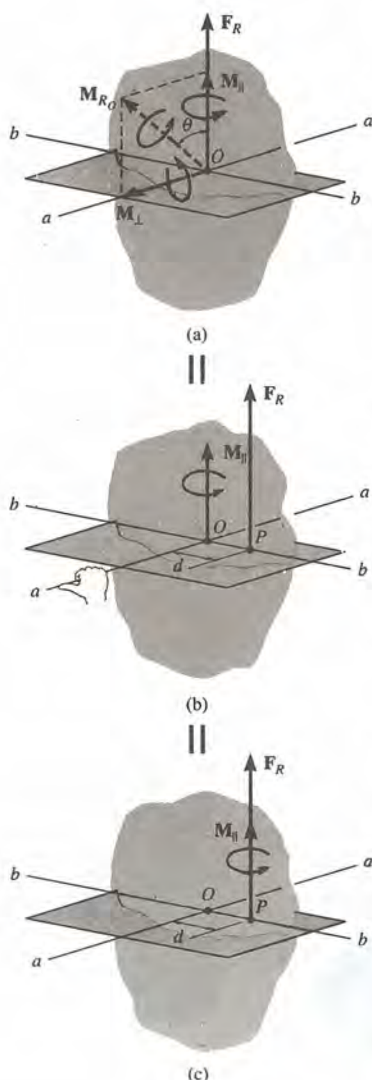


Fig. 4.45

Reducción a una llave de torsión (tornillo). En el caso general, el sistema de fuerzas y momentos de pares que actúan en un cuerpo, figura 4.38*a*, se reducirá a una fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ y momento de par $\mathbf{M}_{R_O}$, en O, que *no* son perpendiculares. En lugar de ello, $\mathbf{F}_R$ actuará con ángulo θ desde $\mathbf{M}_{R_O}$, figura 4.38*c*. Como se muestra en la figura 4.45*a*; sin embargo, $\mathbf{M}_{R_O}$ puede resolverse en dos componentes: una perpendicular, $\mathbf{M}_\perp$, y la otra paralela, $\mathbf{M}_{\parallel}$a la línea de acción de $\mathbf{F}_R$. Como en el procedimiento explicado anteriormente, la componente perpendicular $\mathbf{M}_\perp$ puede *eliminarse* moviendo $\mathbf{F}_R$ al punto P, como se muestra en la figura 4.45*b*. Este punto está sobre el eje *bb* que es tanto perpendicular a $\mathbf{M}_{R_O}$ tanto como a $\mathbf{F}_R$. Para mantener una equivalencia de carga, la distancia entre O y P es $d = \mathbf{M}_\perp / F_R$. Además, cuando $\mathbf{F}_R$ se aplica a P, el momento de $\mathbf{F}_R$ tiende a causar rotación del cuerpo *alrededor* de O en la *misma dirección* que $\mathbf{M}_\perp$, figura 4.45*a*. Finalmente, dado que $\mathbf{M}_\parallel$ es un vector libre, se puede mover a P, de modo que sea colineal con $\mathbf{F}_R$, figura 4.45*c*. Esta combinación de una fuerza y momento de un par colineales se llama *tornillo*. El *eje del tornillo* tiene la misma línea de acción que la fuerza. Por tanto, el tornillo tiende a causar traslación a lo largo del eje, y rotación alrededor del mismo. Si se compara la figura 4.45*a* con la figura 4.45*c*, puede verse que un sistema general de fuerzas y momentos de un par que actúen en un cuerpo pueden reducirse a un tornillo. El eje del tornillo y un punto por el que pase este eje son únicos y pueden siempre determinarse.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.17

Reemplace el sistema de fuerzas que actúan sobre la viga que se ve en la figura 4.46*a* por una fuerza resultante equivalente. Especifique la distancia a la que actúa la fuerza desde el punto *A*.

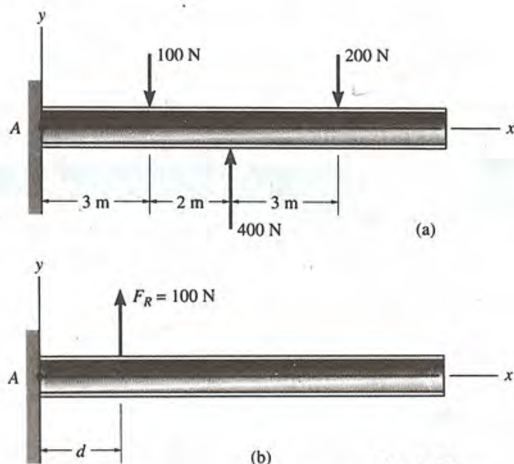


Fig. 4.46

SOLUCIÓN

Las fuerzas de este sistema son paralelas y coplanares. Usaremos los ejes *x*, *y*, *z* establecidos, para resolver este problema.

Suma de fuerzas. La fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ de la figura 4.46*a* es

$$+\uparrow F_R = \Sigma F; \quad F_R = -100\text{ N} + 400\text{ N} - 200\text{ N} = 100\text{ N}\uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

Suma de momentos. Los momentos se sumarán alrededor del punto *A*. Si se considera las rotaciones en el sentido contrario al de las manecillas del reloj como positivas, es decir, que los vectores de momento positivo actúan en la dirección $+\mathbf{k}$, requerimos entonces, que el momento de $\mathbf{F}_R$, alrededor de *A* en las figuras. 4.46*a* y 4.46*b*,iguale los momentos del sistema de fuerzas respecto a *A*; o sea

$$\circlearrowleft + M_{R_A} = \Sigma M_A;$$
$$100\text{ N}(d) = -(100\text{ N})(3\text{ m}) + (400\text{ N})(5\text{ m}) - (200\text{ N})(8\text{ m})$$
$$(100)(d) = 100$$
$$d = 1\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Obsérvese que usando un criterio de sentido de rotación contrario se obtendría el mismo resultado. Como *d* es *positivo*, $\mathbf{F}_R$ actúa hacia la derecha de *A*, como se ve en la figura 4.46*b*.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.18

La viga AE en la figura 4.47a está sujeta a un sistema de fuerzas coplanares. Determine la magnitud, sentido, y localización sobre la viga de una fuerza resultante que sea equivalente al sistema dado de fuerzas.

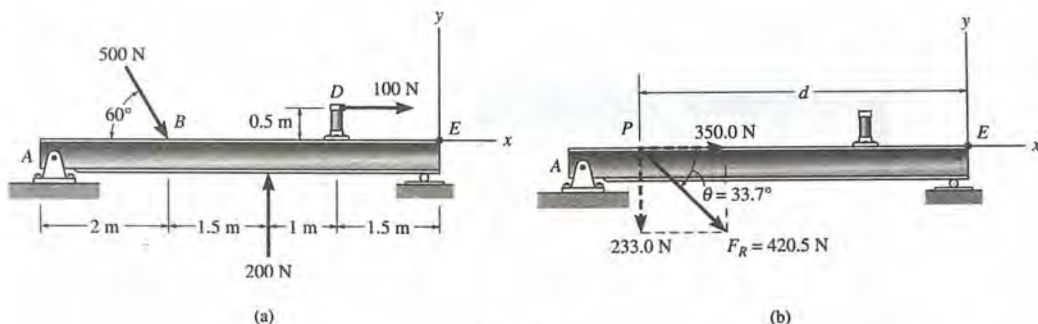


Fig. 4.47

SOLUCIÓN

El origen de coordenadas se localiza arbitrariamente en el punto E, como se muestra en la figura 4.47a.

Suma de fuerzas. Al resolver la fuerza de 500 N en componentes x, y y sumar las componentes de fuerza, se tendrá

$$\overset{+}{\rightarrow} F_{R_x} = \Sigma F_x; \qquad F_{R_x} = 500 \cos 60° + 100 = 350.0 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow F_{R_y} = \Sigma F_y; \qquad F_{R_y} = -500 \text{ sen } 60° + 200 = -233.0 \text{ N}$$
$$= 233.0 \text{ N} \downarrow$$

La magnitud y sentido de la fuerza resultante se establecen por la adición vectorial mostrada en la figura 4.47b. Tenemos

$$F_R = \sqrt{(350.0)^2 + (233.0)^2} = 420.5 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{233.0}{350.0}\right) = 33.7° \quad \searrow \theta \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Suma de momentos. Los momentos se sumarán alrededor E. Así a partir de las figuras 4.47a y 4.47b, requerimos que los momentos de las componentes de $\mathbf{F}_R$ (o el momento de $\mathbf{F}_R$) respecto del punto E igualen los momentos del sistema de fuerzas respecto de E; es decir,

$$\circlearrowright + M_{R_E} = \Sigma M_E;$$

$$233.0(d) + 350.0(0) = (500 \text{ sen } 60°)(4) + (500 \cos 60°)(0) - (100)(0.5) - (200)(2.5)$$

$$d = \frac{1182.1}{233.0} = 5.7 \text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.19

La estructura que se muestre en la figura 4.48*a* está sujeta a tres fuerzas coplanares. Reemplace esta carga por una fuerza resultante equivalente y especifique donde interseca la línea de acción de la resultante a los miembros estructurales *AB* y *BC*.

SOLUCIÓN

Suma de fuerzas. Al resolver la fuerza de 75 lb en componentes *x*, *y*, y sumando las componentes de fuerzas, se obtiene

$$\overset{+}{\rightarrow} F_{R_x} = \Sigma F_x; \quad F_{R_x} = -75(\tfrac{3}{5}) - 15 = -60 \text{ lb} = 60 \text{ lb} \leftarrow$$
$$+\uparrow F_{R_y} = \Sigma F_y; \quad F_{R_y} = -75(\tfrac{4}{5}) - 90 = -150 \text{ lb} = 150 \text{ lb} \downarrow$$

Como se ve en la adición vectorial en la figura 4.48*b*,

$$F_R = \sqrt{(60)^2 + (150)^2} = 161.6 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{150}{60}\right) = 68.2° \qquad \textit{Resp.}$$

Suma de momentos. Los momentos se sumarán alrededor de *A*. Si la línea de acción de $\mathbf{F}_R$ interseca *AB*, figura 4.48*b*, requerimos que el momento de las componentes de $\mathbf{F}_R$ en la figura 4.48*b* alrededor de *A* iguale los momentos del sistema de fuerzas en la figura 4.48*a* alrededor de *A*; o sea ,

$$\circlearrowleft + M_{R_A} = \Sigma M_A; \quad 0(150) + y(60) = 4(15) + 0(90) + 7(75)(\tfrac{3}{5}) - 2(75)(\tfrac{4}{5})$$
$$y = 4.25 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}$$

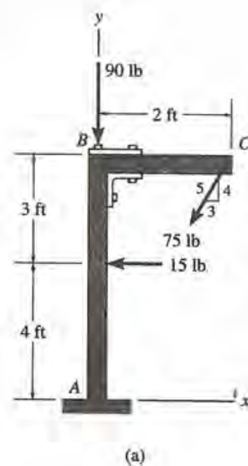
Por el principio de transmisibilidad, $\mathbf{F}_R$ puede también intersecar *BC*, figura 4.48*b*, en cuyo caso tenemos

$$\circlearrowleft + M_{R_A} = \Sigma M_A; \quad 7(60) - x(150) = 4(15) + 0(90) + 7(75)(\tfrac{3}{5}) - 2(75)(\tfrac{4}{5})$$
$$x = 1.10 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}$$

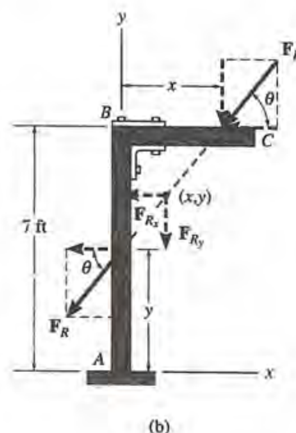
También podemos resolver para obtener estas posiciones suponiendo que $\mathbf{F}_R$ actúa en el punto arbitrario (*x*, *y*) de su línea de acción, figura 4.48*b*. Al sumar los momentos alrededor del punto *A*, se obtiene

$$\circlearrowleft + M_{R_A} = \Sigma M_A; y(60) - x(150) = 4(15) + 0(90) + 7(75)(\tfrac{3}{5}) - 2(75)(\tfrac{4}{5})$$
$$60y - 150x = 255$$

que es la ecuación de la línea de punteada en la figura 4.48*b*. Para encontrar los puntos de intersección con la estructura, considérese que $x = 0$, entonces $y = 4.25$ ft , y escríbase $y = 7$ ft, entonces $x = 1.10$ ft.



(a)



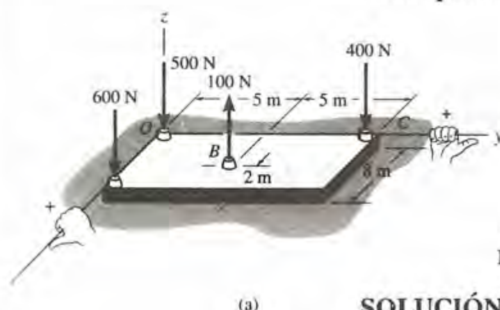
(b)

Fig. 4.48

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.20

La losa de la figura 4.49*a* está sujeta a cuatro fuerzas paralelas. Determine la magnitud y dirección de la fuerza resultante equivalente al sistema de fuerzas dado y localice su punto de aplicación en la losa.



(a)

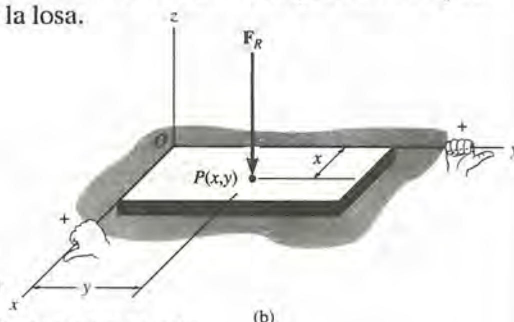


Fig. 4.49

(b)

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS ESCALAR*)

Suma de fuerzas. A partir de la figura 4.49*a*, la fuerza resultante es

$$+\uparrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = -600 + 100 - 400 - 500$$
$$= -1400 \text{ N} = 1400 \text{ N} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Suma de momentos. Requerimos que el momento de la fuerza resultante alrededor del eje x, figura 4.49*b* iguale la suma de los momentos, alrededor del eje x, de todas las fuerzas del sistema, figura 4.49*a*. Los brazos de momento se determinan a partir de las ordenadas y ya que estas ordenadas representan las *distancias perpendiculares* desde el eje x a las líneas de acción de estas fuerzas. Si se usa la regla de la mano derecha según la cual los momentos positivos actúan en la dirección **+i**, tenemos

$$M_{R_x} = \Sigma M_x;$$
$$-1400y = 600(0) + 100(5) - 400(10) + 500(0)$$
$$-1400y = -3500 \quad y = 2.50 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

De manera semejante, con momentos positivos en la dirección y sentido **+j**, puede escribirse una ecuación de momentos del eje y, usando brazos de palanca definidos por las abscisas (o coordenadas x) de cada fuerza.

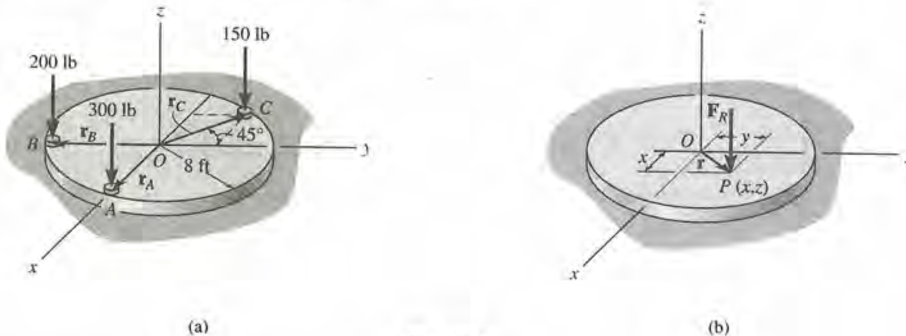
$$M_{R_y} = \Sigma M_y;$$
$$1400x = 600(8) - 100(6) + 400(0) + 500(0)$$
$$1400x = 4200 \quad x = 3.00 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Por tanto, una fuerza de $\mathbf{F}_R$= 1400 N situada en el punto P (3.00 m, 2.50 m) en la losa, figura 4.49*b*, es equivalente al sistema de fuerzas paralelas que actúa en la losa, figura 4.49*a*.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.21

Tres fuerzas paralelas se ejercen sobre la orilla de la placa circular de la figura 4.50*a*. Determine la magnitud y sentido de una fuerza resultante equivalente al sistema de fuerzas dado y localice su punto de aplicación, sobre la placa.



(a) (b)

Fig. 4.50

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

Suma de fuerzas. De la figura 4.50*a*, la resultante de fuerza $\mathbf{F}_R$ es

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}; \qquad \mathbf{F}_R = -300\mathbf{k} - 200\mathbf{k} - 150\mathbf{k}$$
$$= \{-650\mathbf{k}\}\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Suma de momentos. Si se elige el punto *O* como referencia para calcular momentos y suponiendo que $\mathbf{F}_R$ actúa en un punto *P* (*x*, *y*), figura 4.50*b*, requerimos

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M}_O;\ \ \mathbf{r} \times \mathbf{F}_R = \mathbf{r}_A \times (-300\mathbf{k}) + \mathbf{r}_B \times (-200\mathbf{k}) + \mathbf{r}_C \times (-150\mathbf{k})$$
$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (-650\mathbf{k}) = (8\mathbf{i}) \times (-300\mathbf{k}) + (-8\mathbf{j}) \times (-200\mathbf{k})$$
$$+ (-8 \text{ sen } 45°\mathbf{i} + 8 \cos 45°\mathbf{j}) \times (-150\mathbf{k})$$
$$650x\mathbf{j} - 650y\mathbf{i} = 2400\mathbf{j} + 1600\mathbf{i} - 848.5\mathbf{j} - 848.5\mathbf{i}$$

Al igualar las correspondientes componentes **j** e **i** se tendrá

$$650x = 2400 - 848.5 \qquad (1)$$
$$-650y = 1600 - 848.5 \qquad (2)$$

Al resolver estas ecuaciones, obtenemos las coordenadas del punto *P*

$$x = 2.39 \text{ ft} \quad y = -1.16 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}$$

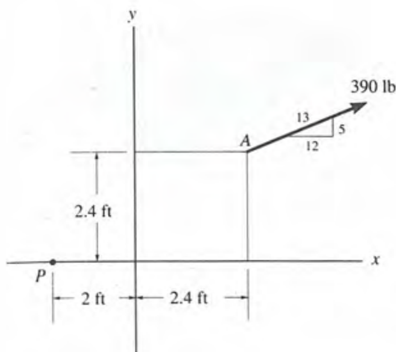
El signo negativo indica que fue erróneo suponer una posición $+y$ para $\mathbf{F}_R$ como se muestra en la figura 4.50*b*.

A manera de repaso, trátese de establecer las ecuaciones 1 y 2 usando un análisis escalar; es decir , aplíquese la suma de momentos sobre el eje *x*, y sobre el eje *y*, respectivamente.

http://librosysolucionarios.net

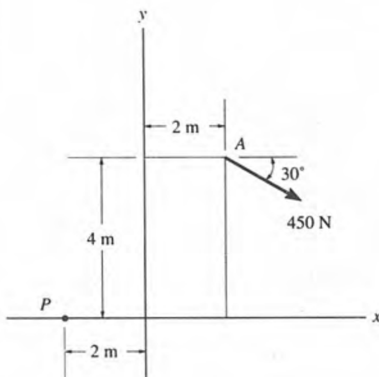
PROBLEMAS

4.82. Reemplace la fuerza en A por una fuerza y momento de un par en equivalentes en P.



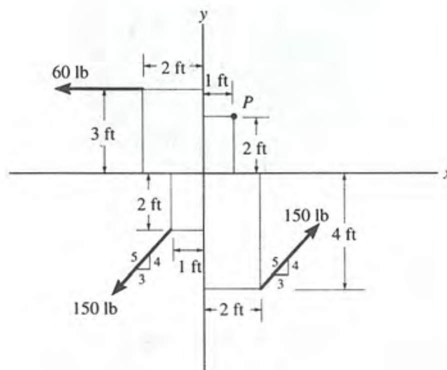
Prob. 4.82

4.83. Reemplace la fuerza en A por una fuerza y momento de un par equivalentes en P.



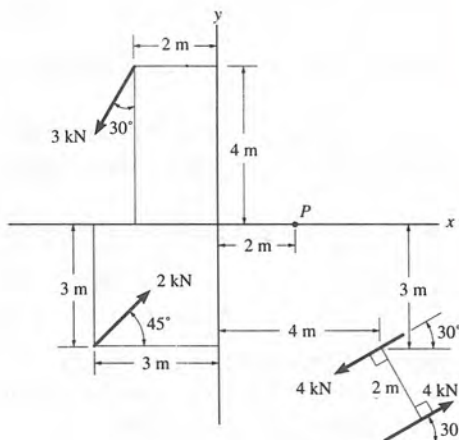
Prob. 4.83

***4.84.** Reemplace el sistema de fuerza y momento de un par por una fuerza y un momento de par equivalentes que actúen en P.



Prob. 4.84

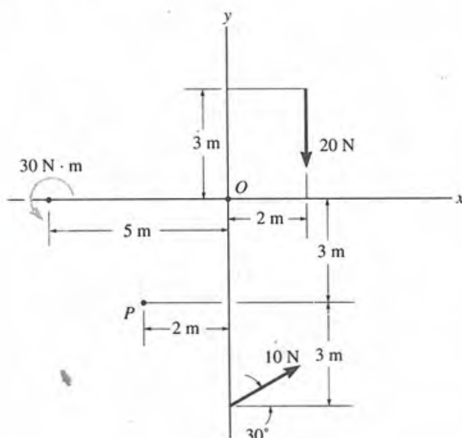
4.85. Reemplace el sistema de fuerza y momento de un par por una fuerza y un momento de par equivalente que actúen en P.



Prob. 4.85

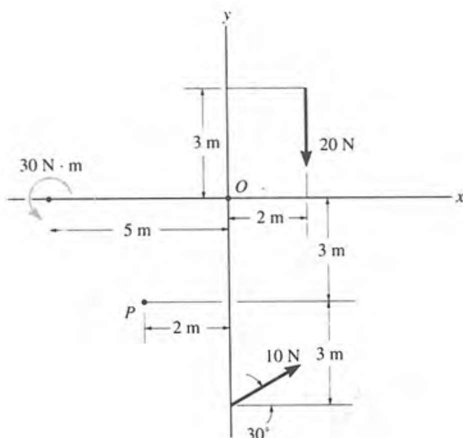
http://librosysolucionarios.net

4.86. Reemplace el sistema de fuerza y momento de un par por una fuerza y momento de un par equivalentes en el punto *O*.



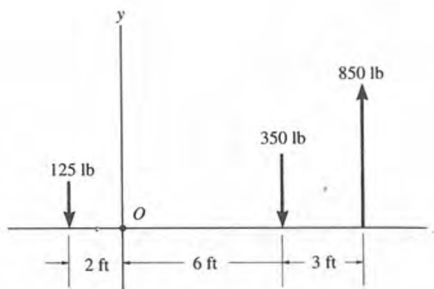
Prob. 4.86

4.87. Reemplace el sistema de fuerza y momento de un par por una fuerza y momento de un par equivalentes en el punto *P*.



Prob. 4.87

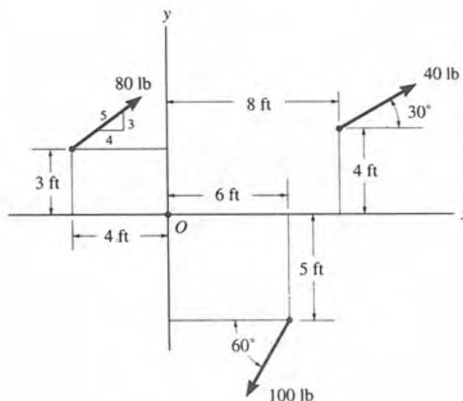
***4.88.** Reemplace el sistema de fuerzas por una fuerza resultante equivalente y especifique su punto de aplicación medido a lo largo del eje *x* desde el punto *O*.



Prob. 4.88

4.89. Reemplace el sistema coplanar de fuerzas por una fuerza resultante equivalente y especifique la intersección de su línea de acción con el eje x.

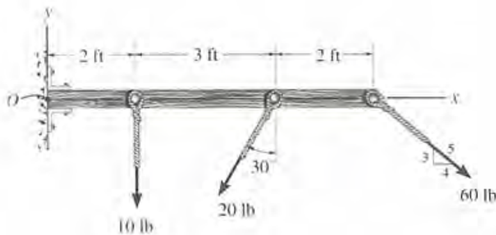
4.90. Reemplace el sistema coplanar de fuerzas por una fuerza resultante equivalente y especifique la intersección de su línea de acción con el eje y.



Prob. 4.89/4.90

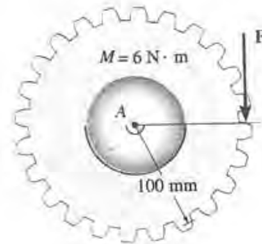
http://librosysolucionarios.net

4.91. Reemplace el sistema de cargas sobre la viga por una fuerza resultante equivalente y especifique su punto de aplicación en la viga, midiendo desde el punto O.



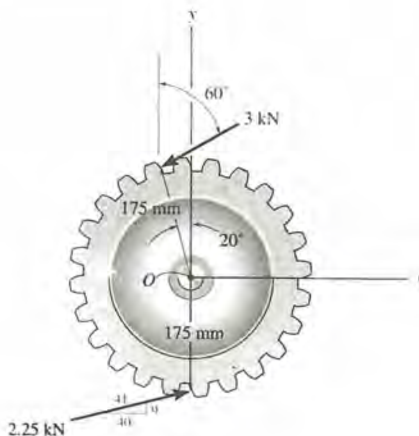
Prob. 4.91

4.93. Determine la magnitud de la fuerza vertical F que actue tangencialmente al engrane de modo que F y M se puedan reemplazar por una fuerza resultante equivalente que actúa en A.



Prob. 4.93

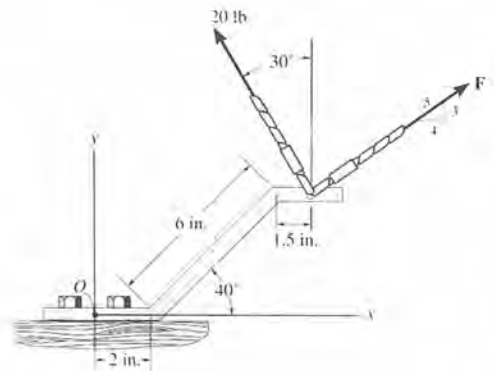
*** 4.92.** El engrane está sujeto a las dos fuerzas que se muestran. Reemplace estas fuerzas por una resultante y un momento de par que actúen en O.



Prob. 4.92

4.94. Reemplace las dos fuerzas por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto O. Establezca que F = 20 lb.

4.95. Reemplace las dos fuerzas por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto O. Establezca que F = 15 lb.

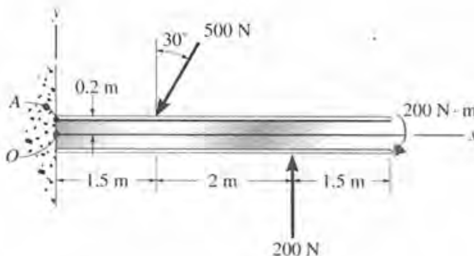


Probs. 4.94/4.95

http://librosysolucionarios.net

*4.96. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre la viga por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto A.

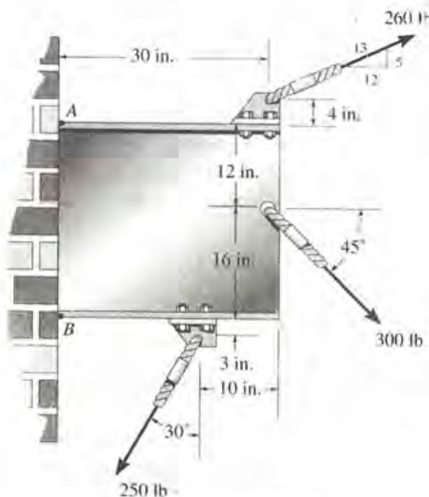
4.97. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre la viga por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto O.



Probs. 4.96/4.97

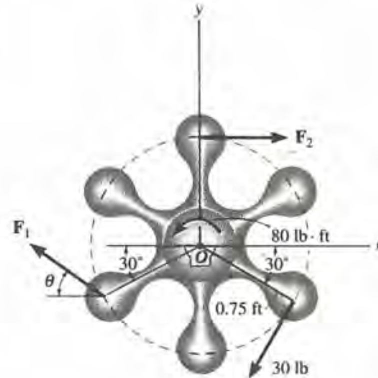
4.98. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre la viga por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto B.

4.99. Reemplace el sistema de fuerzas que se ejercen sobre la viga por una fuerza resultante y un momento de un par equivalentes en el punto A.



Probs. 4.98/4.99

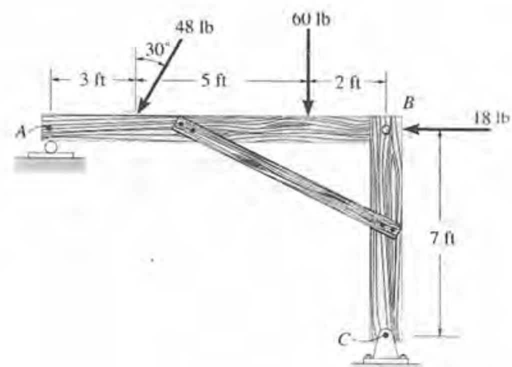
***4.100.** Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y el ángulo de $\mathbf{F}_1$ de modo que la carga produzca una fuerza resultante y momento de un par nulos sobre la manija.



Prob. 4.100

4.101. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa en la estructura por una fuerza resultante equivalente, y especifique la intersección de la línea de acción de la resultante en el miembro AB por su distancia medida desde A. Haga caso omiso del espesor de los elementos estructurales.

4.102. Reemplace el sistema de fuerzas ejercido sobre la estructura por una fuerza y momento de un par resultantes equivalentes ejercidos en el punto C. El grosor de los elementos de la estructura no se toma en cuenta.

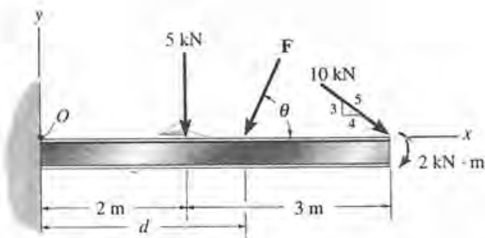


Probs. 4.101/4.102

http://librosysolucionarios.net

4.103. Determine la magnitud y la orientación θ de la fuerza **F** y su situación d sobre la viga, de modo que el sistema de cargas sea equivalente a una fuerza resultante de 15 kN que actúe verticalmente hacia abajo en el punto O, y un momento de par de sentido de las manecillas del reloj de 60 kN · m.

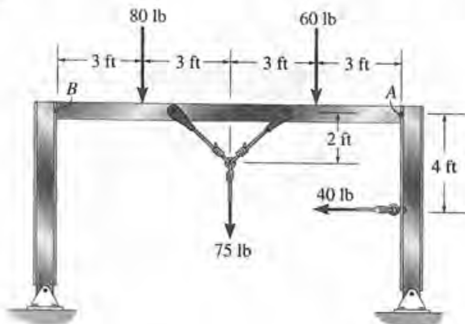
* **4.104.** Determine la magnitud y orientación θ de la fuerza **F** y su punto de aplicación a distancia d, de modo que el sistema de cargas sea equivalente a una fuerza resultante de 20 kN que actúe verticalmente hacia bajo en el punto O, y momento de un par en el sentido de las manecillas del reloj de 80 kN · m.



Probs. 4.103/4.104

4.105. El armazón está sujeto al sistema coplanar de cargas. Reemplace este sistema por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes, que actúe en A.

4.106. El armazón se encuentra sujeto al sistema de fuerzas coplanares. Reemplace este sistema por una fuerza y momento de un par equivalentes que actúen en B.

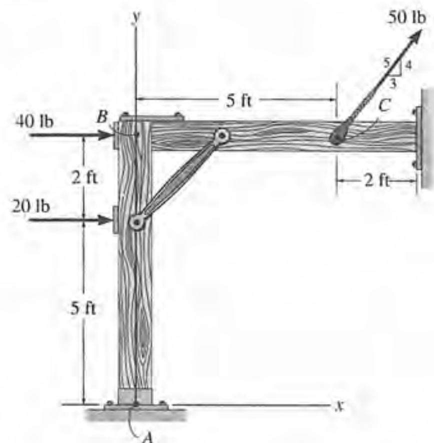


Probs. 4.105/4.106

4.107. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre el armazón por una fuerza y momento de un par equivalentes que actúa en A.

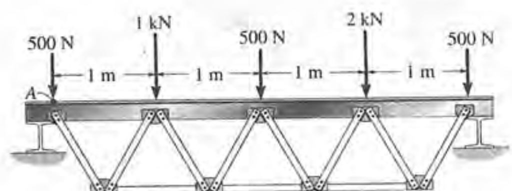
* **4.108.** Reemplace el sistema de fuerzas ejercido sobre la estructura por una fuerza resultante equivalente y especifique la intersección de la línea de acción de la fuerza resultante con el miembro AB, midiendo desde el punto A.

* **4.109.** Reemplace el sistema de fuerzas ejercido sobre la estructura por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto donde la línea de acción de la fuerza resultante interseca el miembro BC, midiendo desde el punto B.



Probs. 4.107/4.108/4.109

4.110. El sistema de fuerzas paralelas actúa sobre el cordón superior de la armadura. Determine la fuerza resultante equivalente del sistema y especifique su localización medida desde el punto A.

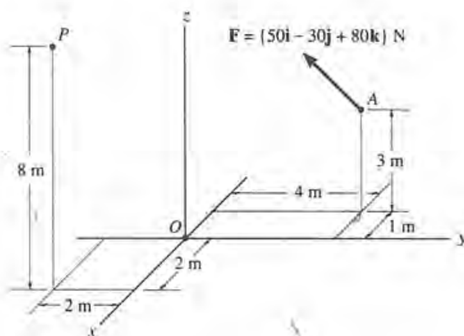


Prob. 4.110

http://librosysolucionarios.net

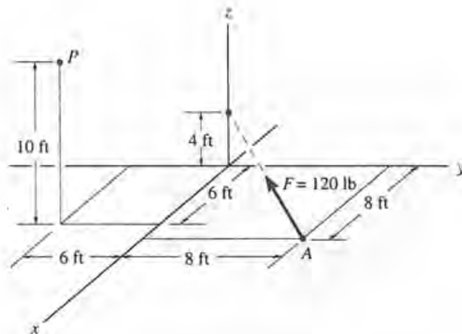
4.111. Reemplace la fuerza en A por una fuerza resultante y momento de un par en el punto O. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.

*** 4.112.** Reemplace la fuerza en A por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto P. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.



Probs. 4.111/4.112

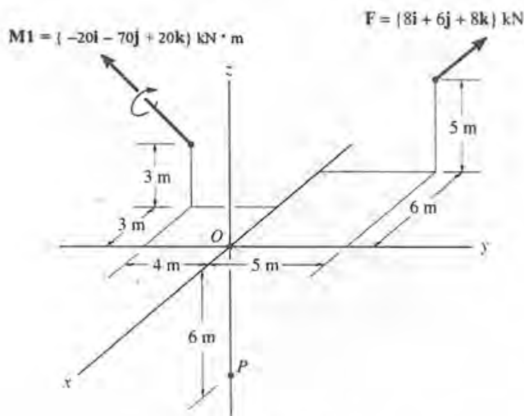
4.115. Reemplace la fuerza en A por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto P. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.



Prob. 4.115

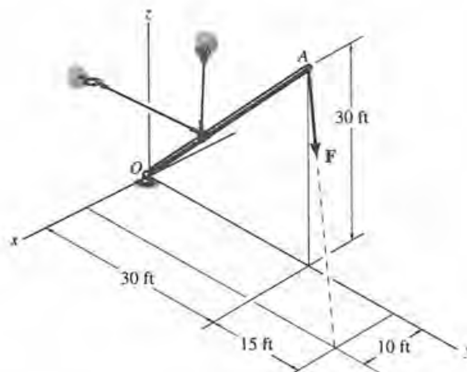
4.113. Reemplace el sistema de la fuerza y el momento de un par por una fuerza resultante y momento de un par en el punto O. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.

4.114. Reemplace el sistema de la fuerza y el momento de un par por una fuerza resultante y momento de un par en el punto O. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.



Probs. 4.113/4.114

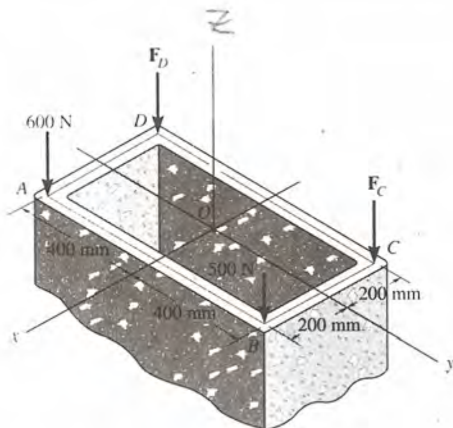
*** 4.116.** Reemplace la fuerza **F** de magnitud $F = 70$ lb que se ejerce en el punto A por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto O.



Prob. 4.116

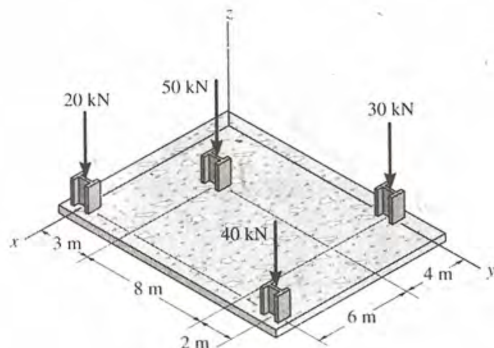
http://librosysolucionarios.net

4.117. El tubo soporta las cuatro fuerzas paralelas. Determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_C$ y $\mathbf{F}_D$ ejercidas en C y D, de manera que la fuerza resultante del sistema se ejerza en el punto medio del tubo, O.



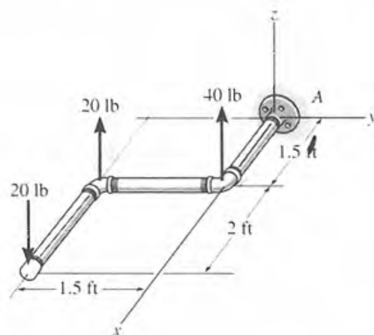
Prob. 4.117

4.118. La losa del edificio está sujeta a cuatro cargas de columnas paralelas. Determine la fuerza resultante equivalente y especifique su localización (x, y) en la losa.

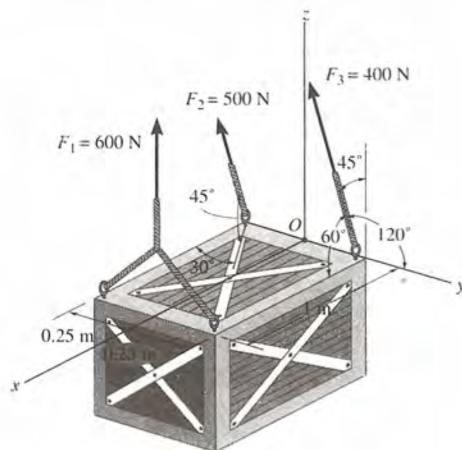


Prob. 4.118

4.119. El ensamble tubular está sujeto a la acción de una fuerza y un par. Reemplace este sistema por una fuerza resultante equivalente. Especifique la localización de la fuerza resultante a lo largo del eje x, medida desde A. El tubo se encuentra en el plano x–y, y las tres fuerzas son verticales.



*** 4.120.** El huacal debe ser levantado utilizando tres eslingas, como se muestra. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa en las eslingas por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto O. La fuerza $\mathbf{F}_1$ es vertical.

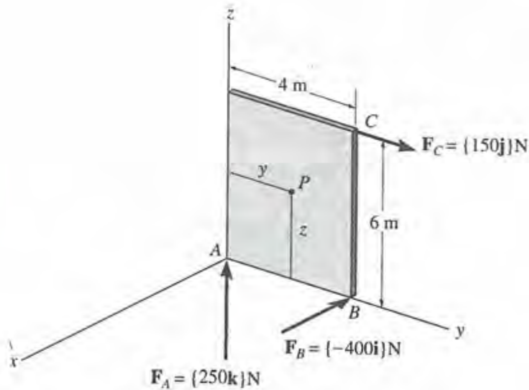


Prob. 4.120

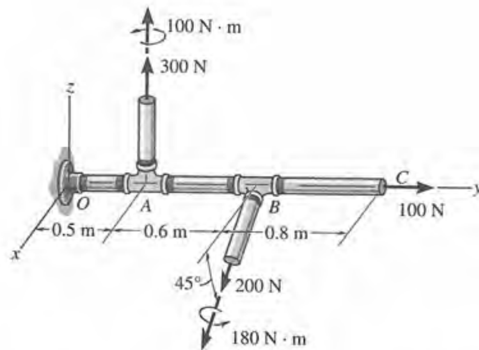
http://librosysolucionarios.net

4.121. Reemplace las fuerzas que actúan sobre la placa por una llave de torsión. Especifique la magnitud de la fuerza y del momento de un par para la llave de torsión y el punto P (y, z) donde su línea de acción corta el plano de la placa.

4.123. Reemplace los dos llaves de torsión y la fuerza que actúan sobre el ensamble tubular por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto O.



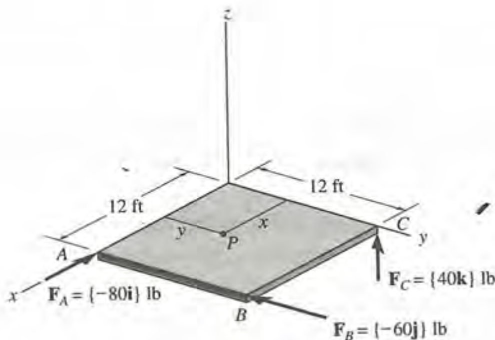
Prob. 4.121



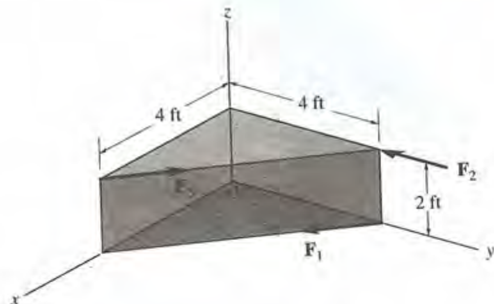
Prob. 4.123

4.122. Remplace las tres fuerzas que actúan sobre la placa por una llave de torsión. Especifique la fuerza y momento de un par del tornillo y el punto P (x, y) de intersección de la línea de acción de la llave de torsión con el plano de la placa.

* **4.124.** Las tres fuerzas que actúan sobre el bloque tienen cada una, una magnitud de 10 lb. Reemplace este sistema por una llave de torsión y especifique el punto en el cual se intersecan la llave de torsión y el eje z, midiendo desde el punto O.



Prob. 4.122



Prob. 4.124

http://librosysolucionarios.net

4.10. Reducción de una distribución de cargas simple

Frecuentemente, se presenta el caso de un cuerpo de gran área superficial, cuya superficie está sujeta a una *distribución de cargas* como las producidas por el viento, los fluidos o simplemente el peso de un material soportado por la superficie del cuerpo. La *intensidad* de estas cargas en cada punto de la superficie se define como la *presión p* (fuerza por unidad de área) que puede medirse en unidades de lb/ft^2 o en pascals (Pa), donde 1 Pa = 1 N/m^2.

En esta sección consideraremos el caso más común de una distribución de cargas de presión, que es *uniforme* a lo largo de un eje de un cuerpo plano rectangular sobre el cual se aplican las cargas.* La figura 4.51*a* presenta un ejemplo de una tal distribución de cargas de este tipo. La dirección de la *intensidad de la carga* de presión se indica por flechas mostradas en el *diagrama de intensidad de carga*. La carga entera sobre la placa es, por tanto, un sistema de fuerzas paralelas, en número infinito, y donde cada una actúa en un área diferencial separada de la placa. Por tanto, la *función de carga*, $p = p(x)$ Pa, es solamente función de x ya que la presión es uniforme a lo largo del eje y. Si multiplicamos $p = p(x)$ por el *ancho a* m de la placa, obtenemos $w = [p(x)\ N/m^2]a\ m = w(x)\ N/m$. Esta función de cargas mostrada en la figura 4.51*b* es una medida de la distribución de cargas a lo largo de la recta $y = 0$ que está en el plano de simetría de la distribución de cargas, figura 4.51*a*. Como se ha señalado, se mide como fuerza por unidad de longitud, en lugar de fuerza por unidad de área. En consecuencia, el diagrama de intensidad de cargas distribuidas para $w = w(x)$ se puede representar por un sistema de fuerzas paralelas coplanares, mostrado en dos dimensiones en la figura 4.51*b*. Si se usan los métodos de la sección 4.9, este sistema de fuerzas se puede simplificar a una sola fuerza resultante $\mathbf{F}_R$, cuya localización, $\bar{x}$, puede especificarse, figura 4.51*c*.

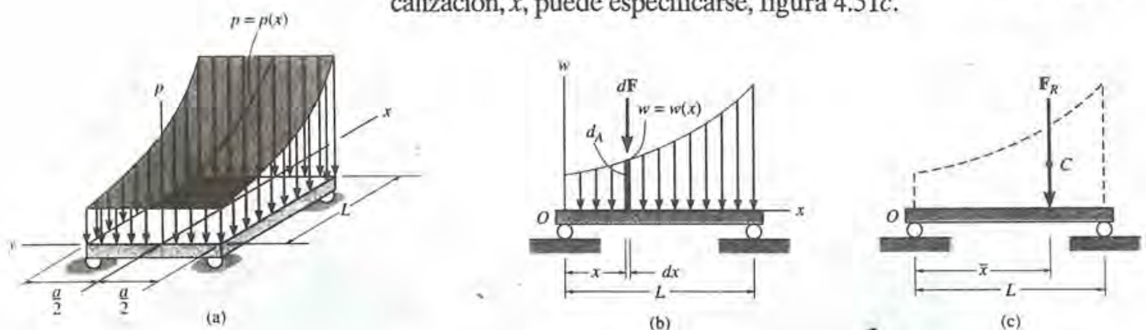


Fig. 4.51

Magnitud de la fuerza resultante. De la ecuación 4.19 ($F_R = \Sigma F$), la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es equivalente a la suma de todas

* El caso más general de una distribución no uniforme de cargas sobre la superficie de un cuerpo se considera en la sección 9.5.

http://librosysolucionarios.net

las fuerzas en el sistema. En este caso, debe usarse integración, ya que existe un número infinito de fuerzas paralelas $d\mathbf{F}$ que actúa a lo largo de la placa, figura 4.51*b*. Dado que $d\mathbf{F}$ actúa sobre un elemento de longitud, dx, y $w(x)$ es una fuerza por unidad de longitud tenemos que en el punto x, $dF = w(x)\,dx = dA$. En otras palabras, la magnitud de $d\mathbf{F}$ se determina a partir del área diferencial de color bajo la curva de distribución de cargas. Para la totalidad de la longitud de de la placa,

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A \qquad (4.21)$$

Por tanto, la magnitud de la fuerza resultante es igual al área bajo el diagrama de cargas $w = w(x)$.

Localización de la fuerza resultante. Si aplicamos la ecuación 4.20 ($M_{R_O} = \Sigma M_O$), la localización $\bar{x}$ de la línea de acción de $\mathbf{F}_R$ puede ser determinada igualando los momentos de la fuerza resultante y de la distribución de fuerzas alrededor de O (el eje y). Ya que $d\mathbf{F}$ produce un momento de $x\,dF = x\,w(x)\,dx$ respecto de O, figura 4.51*b*, entonces, para el plano en su totalidad, figura 4.51*c*,

$$\circlearrowleft + M_{R_O} = \Sigma M_O; \qquad \bar{x}F_R = \int_L x\,w(x)\,dx$$

Si se resuelve en $\bar{x}$, mediante la ecuación 4.21, podemos escribir

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,w(x)\,dx}{\int_L w(x)\,dx} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} \qquad (4.22)$$

Esta ecuación representa la abscisa, x, para el centro geométrico o *centroide* del *área* bajo el diagrama de distribución de cargas $w(x)$. *Por lo tanto, la fuerza resultante tiene una línea de acción que pasa por el centroide C (centro geométrico) del área definida por el diagrama de distribución de cargas* $w(x)$, figura 4.51*c*.

Una vez determinado $\bar{x}$, $\mathbf{F}_R$ por simetría pasa por el punto $(\bar{x}, 0)$ en la superficie de la placa, figura 4.51*d*. Si ahora consideramos la carga de presión en tres dimensiones $p(x)$ figura 4.51*a*, podemos, por tanto, concluir que *la fuerza resultante tiene una magnitud equivalente al volumen bajo la curva de cargas distribuídas* $p = p(x)$ *y una línea de acción que pase por el centroide (centro geométrico) de este volumen*. En el capítulo 9 se proporciona un tratamiento detallado de las técnicas de integración para el cálculo de los centroides de volúmenes o áreas. Sin embargo, en muchos casos, el diagrama de distribución de cargas tiene la forma de un triángulo, un rectángulo o alguna otra forma geométrica simple. Los centroides para estas formas comunes no deben determinarse a partir de ecuación 4.22; de preferencia, se les puede obtener directamente en las tablas del interior de la contratapa.

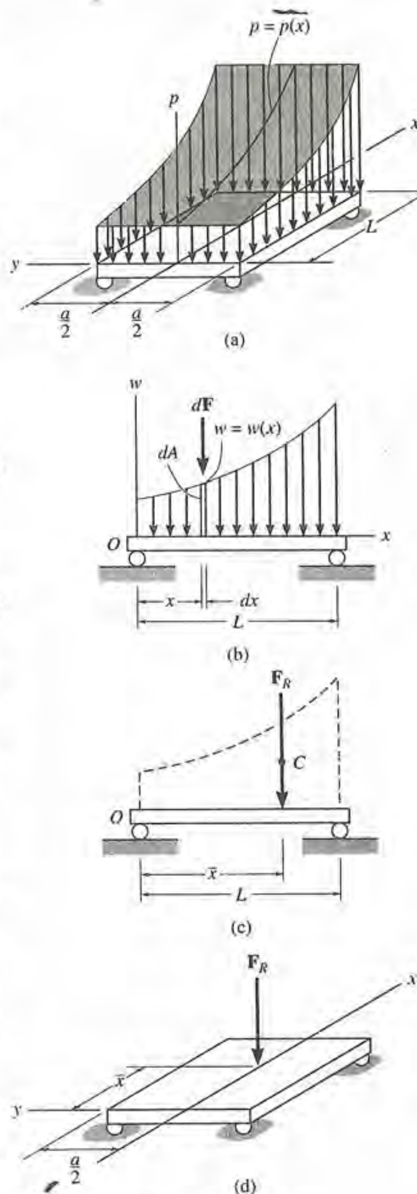


Fig. 4.51

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.22

En cada caso, determine la magnitud y la localización de la resultante de las cargas distribuidas que actúan sobre las vigas de la figura. 4.52.

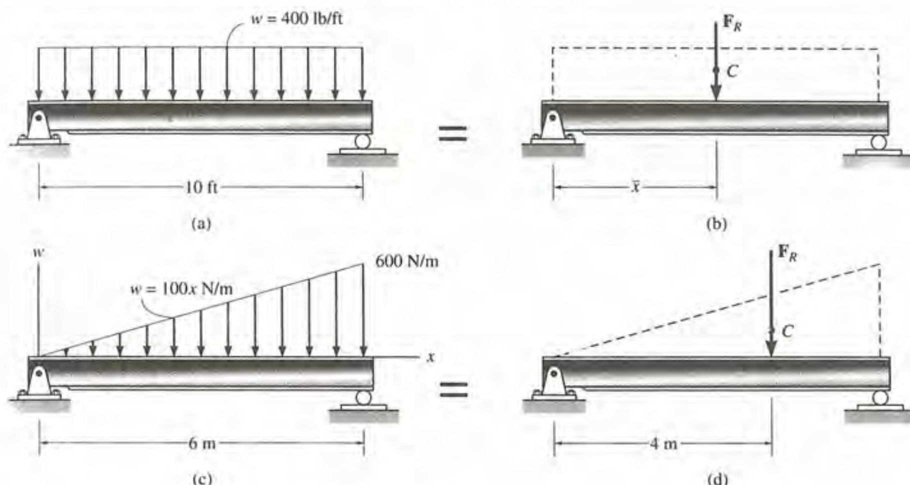


Fig. 4.52

SOLUCIÓN

Distribución uniforme. Como se indica, w = 400 lb/ft, que es constante sobre toda la viga, figura 4.52*a*. Esta distribución de cargas forma un rectángulo, cuya área es igual a la magnitud de la fuerza resultante, figura 4.52*b*; es decir,

$$F_R = (400 \text{ lb/ft})(10 \text{ ft}) = 4000 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

La localización de $\mathbf{F}_R$ pasa por el centro geométrico o centroide C de esta área rectangular, de modo que

$$\bar{x} = 5 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}$$

Distribución triangular de cargas. Aquí la carga varía uniformemente en intensidad de 0 a 600 N/m, figura 4.52*c*. Estos valores pueden verificarse por sustitución de $x = 0$ y $x = 6$ m en la fórmula para la función $w = 100x$ N/m. El área de esta distribución triangular de cargas es igual a $\mathbf{F}_R$, figura 4.52*d*. De la tabla de la parte interna de la contratapa, $A = \frac{1}{2}bh$, de modo que

$$F_R = \tfrac{1}{2}(6 \text{ m})(600 \text{ N/m}) = 1800 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

La línea de acción de $\mathbf{F}_R$ pasa a través del centroide C del triángulo. Si utilizamos la tabla de la parte interna de la contratapa, observamos que este punto se halla a una distancia de un tercio de la longitud de la viga, medida desde el lado derecho. Por tanto,

$$\bar{x} = 6\text{m} - \tfrac{1}{3}(6 \text{ m}) = 4 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

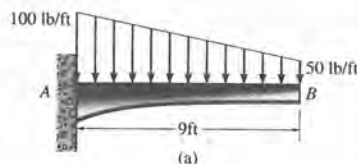
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.23

Determine la magnitud y localización de la resultante de las cargas distribuidas que actúan sobre la viga mostrada en la figura 4.53*a*.

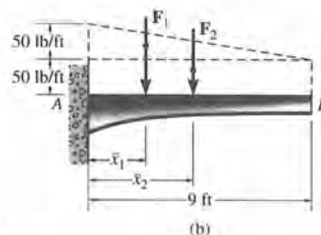
SOLUCIÓN

El área del diagrama de cargas es un *trapezoide*, y por tanto, la solución puede obtenerse directamente de las fórmulas de área y centroide para un trapezoide de la lista del interior de la contratapa. Ya que estas fórmulas no se memorizan fácilmente, resolveremos el problema usando áreas "compuestas". Con este fin, dividimos la distribución trapezoidal en una distribución triangular y una rectangular, como se ve en la figura 4.53*b*. La magnitud de la fuerza representada por cada una de estas distribuciones de cargas es igual a su *área* asociada,



$$F_1 = \tfrac{1}{2}(9\text{ ft})(50\text{ lb/ft}) = 225\text{ lb}$$
$$F_2 = (9\text{ ft})(50\text{ lb/ft}) = 450\text{ lb}$$

Las líneas de acción de estas fuerzas paralelas actúan por el *centroide* de sus áreas asociadas y, por tanto, cortan la viga en

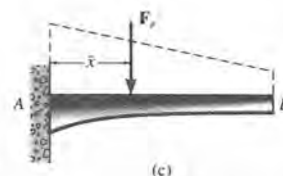


$$\bar{x}_1 = \tfrac{1}{3}(9\text{ ft}) = 3\text{ ft}$$
$$\bar{x}_2 = \tfrac{1}{2}(9\text{ ft}) = 4.5\text{ ft}$$

Las dos fuerzas paralelas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ pueden reducirse a una resultante $\mathbf{F}_R$. La magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$+\downarrow F_R = \Sigma F;$ $\qquad F_R = 225 + 450 = 675\text{ lb}$ ***Resp.***

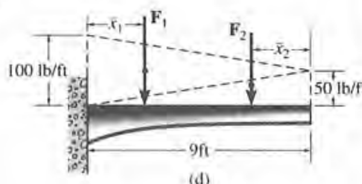
Con referencia al punto A, figura 4.53*b* y *c*, podemos definir la localización de $\mathbf{F}_R$. Requerimos



$\curvearrowleft + M_{R_A} = \Sigma M_A;$ $\qquad \bar{x}(675) = 3(225) + 4.5(450)$

$\bar{x} = 4\text{ ft}$ ***Resp.***

Nota: El área trapezoidal en la figura 4.53*a* puede también dividirse en dos áreas triangulares, como se muestra en la figura 4.53*d*. En este caso



$$F_1 = \tfrac{1}{2}(9\text{ ft})(100\text{ lb/ft}) = 450\text{ lb}$$
$$F_2 = \tfrac{1}{2}(9\text{ ft})(50\text{ lb/ft}) = 225\text{ lb}$$

y

$$\bar{x}_1 = \tfrac{1}{3}(9\text{ ft}) = 3\text{ ft}$$
$$\bar{x}_2 = \tfrac{1}{3}(9\text{ ft}) = 3\text{ ft}$$

Usando estos resultados, demuestre de nuevo que $\mathbf{F}_R = 675$ lb y $\bar{x} = 4$ ft.

Fig. 4.53

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.24

Determine la magnitud y localización de la fuerza resultante que actúa sobre la viga de la figura 4.54*a*.

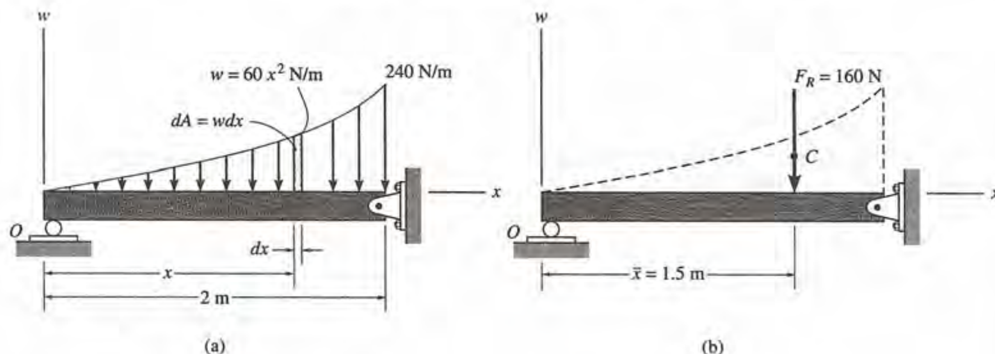


Fig. 4.54

SOLUCIÓN

Ya que se ha dado $w = w(x)$, este problema será resuelto por integración. El elemento diferencial de área, en sombreado, $dA = w\,dx = 60x^2\,dx$. Aplicando la ecuación. 4.21, al sumar estos elementos desde $x = 0$ hasta $x = 2$ m, obtenemos la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$,

$F_R = \Sigma F;$

$$F_R = \int_A dA = \int_0^2 60x^2\,dx = 60\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 60\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$= 160 \text{ N}$$ ***Resp.***

Como el elemento de área dA está localizado a una distancia arbitraria x de O, la localización $\bar{x}$ de $\mathbf{F}_R$ *medida desde O*, figura 4.54*b*, está determinada a partir de la ecuación 4.22.

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^2 x(60x^2)\,dx}{160} = \frac{60\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2}{160} = \frac{60\left[\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right]}{160}$$

$$= 1.5 \text{ m}$$ ***Resp.***

Estos resultados pueden verificarse usando la tabla de la parte interna de la contratapa, donde se muestra que para un área exparabólica de longitud a, altura b, y forma mostrada en la figura 4.54*a*,

$$A = \frac{ab}{3} = \frac{2(240)}{3} = 160 \text{ N} \;\text{ y }\; \bar{x} = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}(2) = 1.5 \text{ m}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4.25

Una distribución de cargas de $p = 800x$ Pa actúa sobre la superficie superior de la viga que se ve en la figura 4.55*a*. Determine la magnitud y localización de la fuerza resultante.

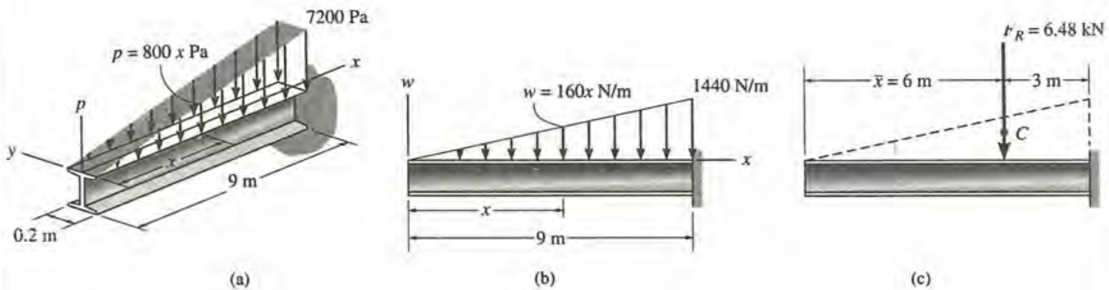


Fig. 4.55

SOLUCIÓN

La función de la distribución de las cargas $p = 800x$ Pa indica que la intensidad de la carga varía uniformemente de $p = 0$ en $x = 0$ a $p = 7200$ Pa en $x = 9$ m. Ya que la intensidad es uniforme sobre lo ancho de la viga (el eje y), las cargas pueden verse en dos dimensiones, como se muestra en la figura 4.55*b*. Aquí

$$\begin{aligned} w &= (800x \text{ N/m}^2)(0.2 \text{ m}) \\ &= (160x) \text{ N/m} \end{aligned}$$

En $x = 9$ m, nótese que $w = 1440$ N/m. Aunque podemos aplicar de nuevo las ecuaciones 4.21 y 4.22 como en el ejemplo 4.24, es más sencillo utilizar la tabla de la contratapa.

La magnitud de la fuerza resultante es

$$F_R = \tfrac{1}{2}(9 \text{ m})(1440 \text{ N/m}) = 6480 \text{ N} = 6.48 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

La línea de acción de $\mathbf{F}_R$ pasa por el *centroide* C del triángulo. Por tanto,

$$\bar{x} = 9 \text{ m} - \tfrac{1}{3}(9 \text{ m}) = 6 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Los resultados se muestran en la figura 4.55*c*.

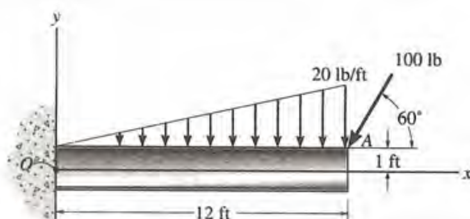
También podemos ver que la resultante $\mathbf{F}_R$ actúa por el *centroide* del *volumen* del diagrama de cargas $p = p(x)$ en la figura 4.55*a*. Así pues, $\mathbf{F}_R$ corta el plano $x-y$ en el punto (6 m, 0). Además, la *magnitud* de $\mathbf{F}_R$ es igual al volumen bajo el diagrama de cargas; o sea,

$$F_R = V = \tfrac{1}{2}(7200 \text{ N/m}^2)(9 \text{ m})(0.2 \text{ m}) = 6.48 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

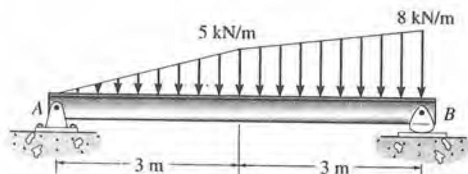
PROBLEMAS

4.125. Determine el momento resultante de la fuerza y las cargas distribuidas en forma triangular, alrededor de O.



Prob. 4.125

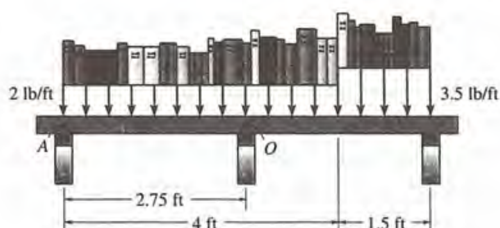
4.126. Reemplace las cargas por una fuerza resultante equivalente y especifique la localización de la fuerza sobre la viga, medida desde el punto B.



Prob. 4.126

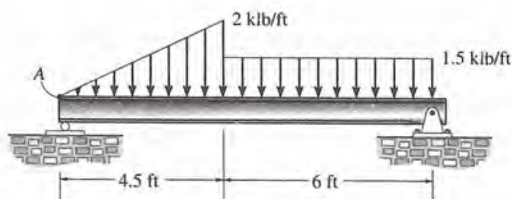
4.127. La distribución de las cargas de los libros sobre la repisa es como se muestra. Determine la magnitud de la fuerza resultante equivalente y especifique su localización, medida desde el punto O.

*** 4.128.** La carga de los libros en el anaquel es la que se muestra. Determine la magnitud de la fuerza resultante equivalente y especifique su localización, como su distancia a partir del punto A.



Probs. 4.127/4.128

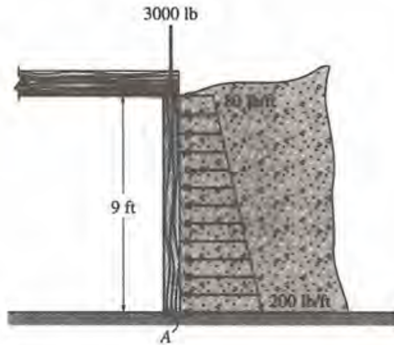
4.129. Determine la magnitud de la fuerza resultante equivalente de las cargas distribuidas y especifique su localización sobre la viga, midiendo la distancia que la separa del punto A.



Prob. 4.129

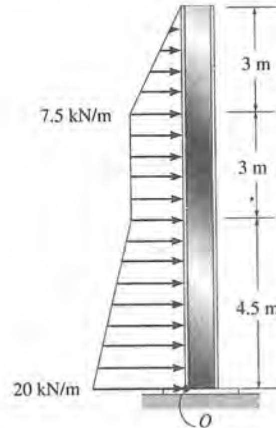
http://librosysolucionarios.net

4.130. La columna es usada para soportar las tierras que ejercen una fuerza de 3000 lb en lo alto de la columna. El efecto de la presión de las tierras sobre la parte lateral de la columna tiene la distribución que se muestra. Reemplace estas cargas distribuidas por una fuerza resultante equivalente y especifique dónde actúa sobre la columna, midiendo su distancia desde la base *A*.



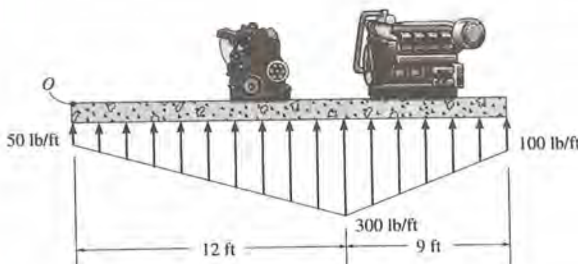
Prob. 4.130

*** 4.132.** Reemplace la carga por una fuerza resultante y un momento de un par equivalentes que actúen en el punto *O*.



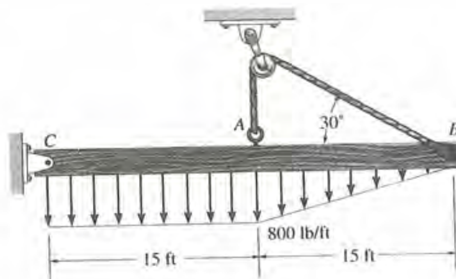
Prob. 4.132

4.131. La distribución del empuje de tierras sobre la cara inferior de la losa de un edificio es la que se muestra. Reemplace estos empujes por una fuerza resultante equivalente y especifique su localización, medida desde el punto *O*.



Prob. 4.131

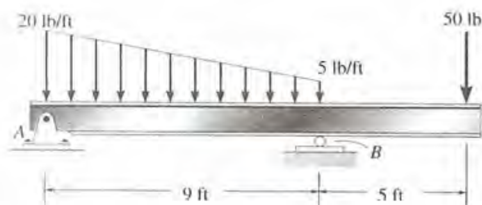
4.133. Reemplace las cargas distribuidas por una fuerza resultante equivalente y especifique su localización en la viga, medida desde la clavija en *C*.



Prob. 4.133

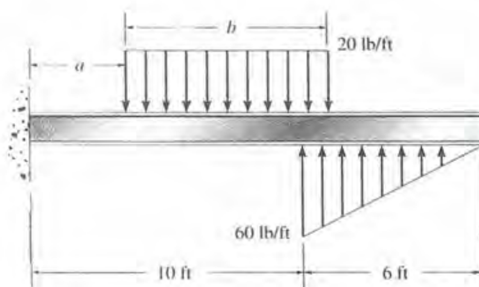
http://librosysolucionarios.net

4.134. Reemplace la carga por una fuerza resultante equivalente y especifique su localización, medida desde el punto A.



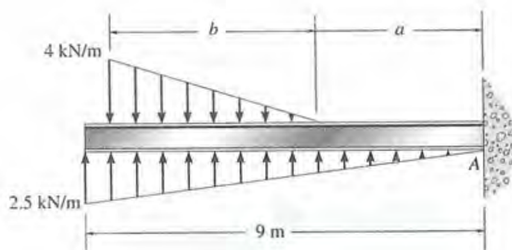
Prob. 4.134

4.135. La viga está sujeta a la distribución de cargas. Determine la longitud b de la carga uniforme y su posición a sobre la viga, de modo que la fuerza resultante y momento de un par que actúan sobre la viga sean cero.



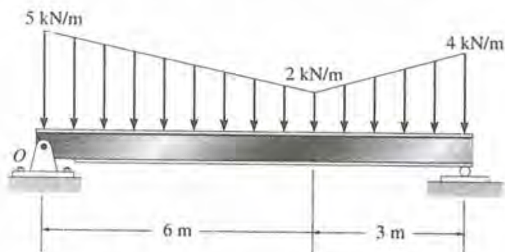
Prob. 4.135

***4.136.** Determine la longitud b de la carga de distribución triangular y su posición a sobre la viga, de modo que la fuerza resultante sea cero y el momento de un par que resultante sobre la viga sea 8 kN · m en el sentido de las manecillas del reloj.



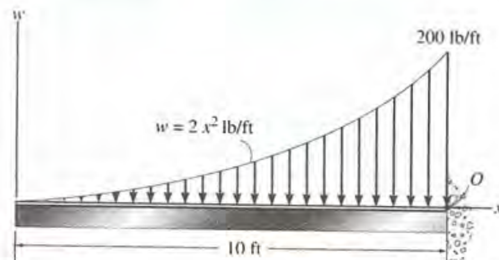
Prob. 4.136

4.137. Reemplace las cargas distribuidas por una fuerza resultante equivalente y especifique su localización en la viga, medida desde el punto O.



Prob. 4.137

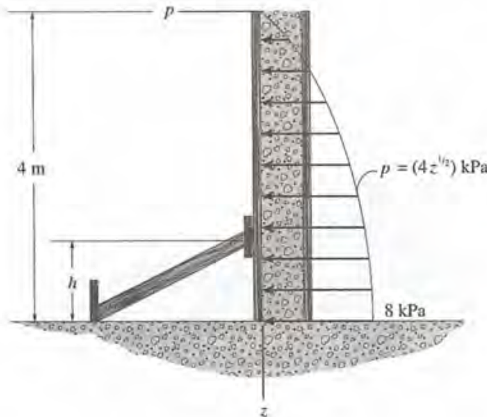
4.138. Reemplace la carga por una fuerza resultante y momento de par equivalentes que actúen sobre la viga en el punto O.



Prob. 4.138

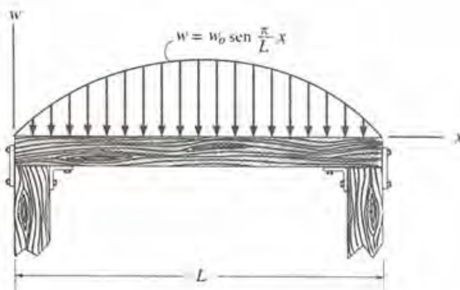
http://librosysolucionarios.net

4.139. El concreto húmedo ejerce una presión distribuida a lo largo de la pared del encofrado. Determine la fuerza resultante de esta distribución y especifique la altura a donde debiera colocarse el puntal para que se encuentre sobre la línea de acción de la fuerza resultante. La pared tiene 5 m de ancho.



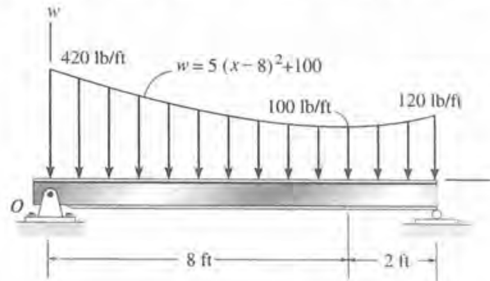
Prob. 4.139

***4.140.** Determine la fuerza resultante de las cargas que actúan sobre la viga.



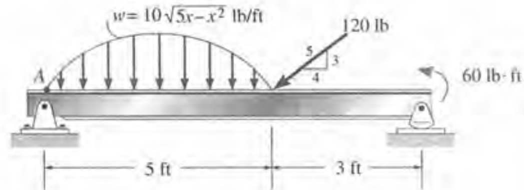
Prob. 4.140

4.141. Determine la magnitud de la fuerza resultante de la distribución de cargas y especifique la distancia del punto donde actúa, medida desde el punto O.



Prob. 4.141

4.142. Determine la fuerza resultante de las cargas distribuidas que actúan sobre la viga, y especifique su localización medida, desde el extremo A.



Prob. 4.142

4.143. El ala del avión de retropropulsión está sometido a la distribución de cargas que se muestra. Determine la fuerza resultante de estas cargas y especifique su localización medida, desde A.



Prob. 4.143

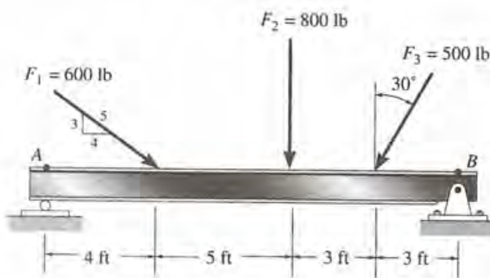
http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS DE REPASO

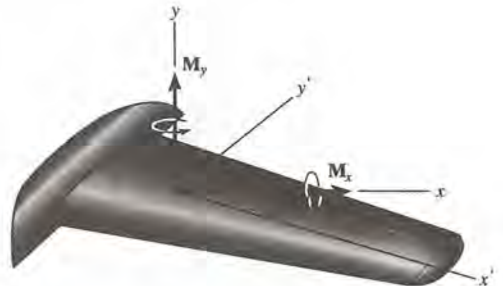
***4.144.** Determine el momento respecto del punto A de cada una de las tres fuerzas que actúan sobre la viga. ¿Cuál es el momento resultante de todas las fuerzas alrededor del punto A?

4.145. Determine el momento alrededor del punto B de cada una de las tres fuerzas que actúan sobre la viga. ¿Cuál es el momento resultante de todas las fuerzas alrededor del punto B?

***4.148.** La viga principal a lo largo del ala de un aeroplano se lleva hacia atrás un ángulo de 25°. A partir de cálculos de cargas, se determina que la viga está sujeta a momentos de pares M_x = 17 klb · ft y M_y = 25 klb · ft. Determine los momentos de un par resultantes creados alrededor de los ejes x' y y'. Los ejes están todos en el mismo plano horizontal.



Probs. 4.144/4.145



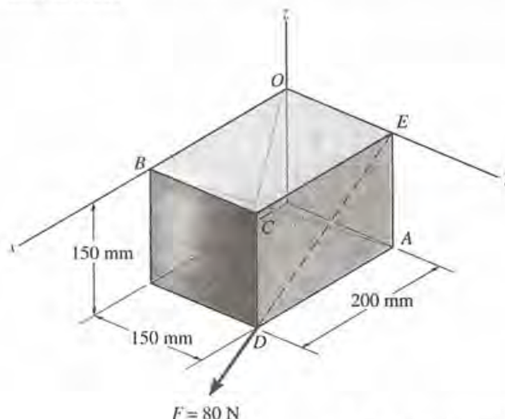
Prob. 4.148

4.146. Determine el momento de la fuerza **F** que se dirige por el segmento ED del bloque, alrededor de leje BA. Resuelva el problema usando dos vectores de posición **r** diferentes. Exprese el resultado como vector cartesiano.

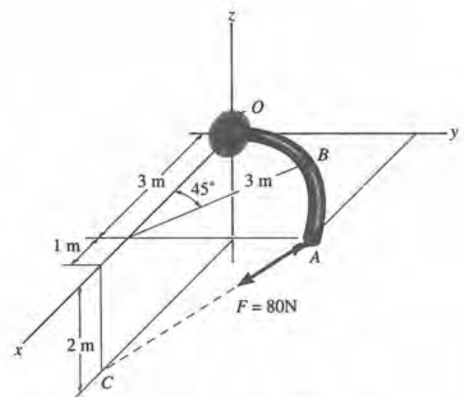
4.147. Determine el momento de la fuerza **F** dirigida por ED en la pared del bloque, alrededor del eje OC. Resuelva el problema usando dos vectores de posición, **r**, diferentes. Exprese el resultado como vector cartesiano.

4.149. La varilla curva se encuentra en el plano $x-y$ y tiene radio de 3 m. Si una fuerza de magnitud F = 80 N actúa en su extremo, como se muestra, determine el momento de esta fuerza respecto al punto O.

4.150. La varilla curva se encuentra en el plano $x-y$ y tiene radio de 3 m. Si una fuerza de magnitud F = 80 N actúa en su extremo, como se muestra, determine el momento de esta fuerza respecto al punto B.



Probs. 4.146/4.147



Probs. 4.149/4.150

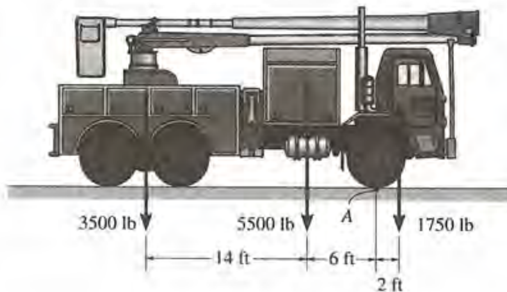
http://librosysolucionarios.net

4.151. Los pesos de las diversas partes componentes del camión se indican en la figura. Reemplace este sistema de fuerzas por una resultante y momento de un par equivalente, que actúen en el punto *A*.

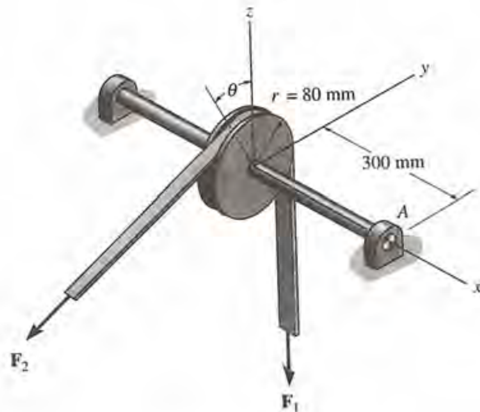
* **4.152.** Los pesos de las componentes del camión son los que se indican. Reemplace este sistema de fuerzas por una fuerza resultante equivalente y especifique su localización, medida desde el punto *A*.

4.153. La banda que pasa por la polea está sujeta a las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, cada una con magnitud de 40 N. $\mathbf{F}_1$ actúa en la dirección $-\mathbf{k}$. Reemplace estas fuerzas por una fuerza resultante y momento de un par equivalentes en el punto *A*. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana. Establezca $\theta = 0°$, de manera que $\mathbf{F}_2$ actúe en la dirección $-\mathbf{j}$.

4.154. La banda que pasa por la polea está sujeta a dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, con magnitud de 40 N cada una. $\mathbf{F}_1$ actúa en la dirección $-\mathbf{k}$. Reemplace esta fuerzas por una fuerza y momento de un par equivalentes en el punto *A*. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana. Considere que $\theta = 45°$



Probs. 4.151/4.152



Probs. 4.153/4.154

http://librosysolucionarios.net





http://librosysolucionarios.net

5 Equilibrio de un cuerpo rígido

En este capítulo se tratará de los conceptos fundamentales del equilibrio de un cuerpo rígido. Se demostrará que el equilibrio requiere tanto la *igualdad de fuerzas* encontradas para impedir que el cuerpo se traslade con movimiento acelerado, como igualdad de *momentos* encontrados para evitar la rotación del cuerpo.

En muchos problemas de ingeniería intervienen cargas simétricas y pueden resolverse proyectando todas las fuerzas que actúan en un cuerpo, en un solo plano. Por tanto, en la primera parte de este capítulo, se considerará el equilibrio de un cuerpo sometido a un *sistema de dos dimensiones o coplanar de fuerzas*. La geometría de tales problemas no suele ser complicada, de manera que se impone la conveniencia del análisis escalar. El estudio más general de los cuerpos rígidos sometidos a *sistemas de fuerzas de tres dimensiones* se hará en la segunda parte del capítulo. Podrá verse que numerosos tipos de problemas de esta clase se resuelven mejor mediante el análisis vectorial.

5.1 Condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido

En el capítulo 3 se afirmó que una partícula está en equilibrio si permanece en reposo o se mueve con velocidad constante. Para tener esta situación es necesario y suficiente que la fuerza resultante que actúe sobre la partícula sea igual a cero. Utilizando este hecho, desarrollaremos las condiciones requeridas para mantener el equilibrio para un cuerpo rígido. Con este fin, consideremos el cuerpo rígido en la figura 5.1*a*, fijo en el sistema

http://librosysolucionarios.net

de referencia x, y, z, y que se encuentra en reposo o bien se mueve a velocidad constante con el sistema de referencia. La figura 5.1*b* muestra un diagrama de cuerpo libre de una partícula arbitraria del cuerpo. Hay dos tipos de fuerzas que actúan sobre la partícula. Las *fuerzas internas* simbólicamente representadas como

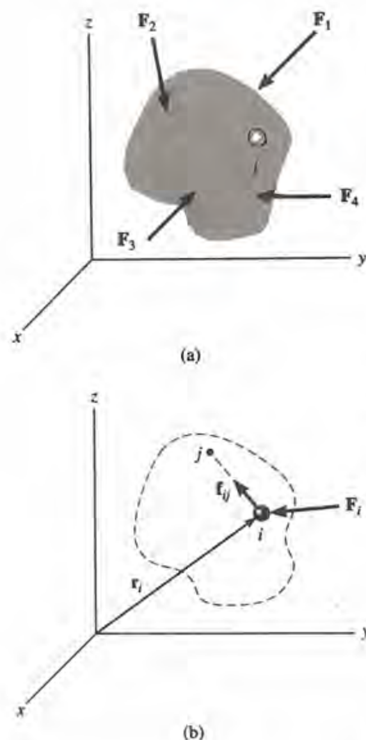


Fig. 5.1

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq 1)}}^{n} \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_i$$

son fuerzas que todas las demás partículas ejercen sobre la partícula *i*ésima y producen la resultante $\mathbf{f}_i$. Aunque sólo una de estas partículas se muestra en la figura 5.1*b*, la suma se extiende a todas las n partículas de que se compone el cuerpo. En esta suma, se observará que $i = j$ no tendría sentido porque la partícula no ejerce fuerza sobre sí misma. La *fuerza externa* $\mathbf{F}_i$ resultante representa, por ejemplo, los efectos de fuerzas gravitacionales, eléctricas, magnéticas o de contacto entre la partícula *i*ésima y cuerpos adyacentes o partículas no incluidas en el cuerpo. Si la partícula está en equilibrio, entonces, aplicando la primera ley de Newton tenemos

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

Cuando se aplica la ecuación de equilibrio a cada una de las demás partículas del cuerpo, se encuentra ecuaciones semejantes. Si se suman *vectorialmente* todas estas ecuaciones, se obtiene

$$\Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

La suma de las fuerzas internas da cero, ya que las fuerzas internas entre las partículas dentro del cuerpo ocurren en pares de fuerzas opuestas de la misma magnitud, tercera ley de Newton. Por tanto, sólo queda la suma de las *fuerzas externas*; por lo que, escribiendo $\Sigma\mathbf{F}_i = \Sigma\mathbf{F}$, la ecuación precedente se puede escribir

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

http://librosysolucionarios.net

Consideremos ahora los momentos de las fuerzas que actúan sobre la partícula *i*ésima respecto al punto arbitrario *O*, figura 5.1*b*. Usando la ecuación de equilibrio de una partícula y la ley distributiva del producto vectorial se tendrá

$$\mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_i\, \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

Para las demás partículas del cuerpo, pueden escribirse ecuaciones semejantes y, al sumarlas vectorialmente, obtendremos

$$\Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

El segundo término es cero, ya que, como antes se dijo, las fuerzas internas ocurren en pares iguales en magnitud, colineales pero de sentido opuesto y, por la transmisibilidad de una fuerza, como se vio en la sección 4.4, el momento de cada par de fuerzas alrededor del punto *O* es, por tanto, cero. Así pues, usando la notación $\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Por tanto, las *ecuaciones de equilibrio* para un cuerpo rígido se resumen como sigue:

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Estas ecuaciones establecen que un cuerpo rígido estará en equilibrio siempre y cuando la suma de todas las *fuerzas externas* que actúan sobre el cuerpo sea cero y la suma de los momentos de las fuerzas externas respecto a un punto sea cero. Se acaba de demostrar que estas condiciones son *necesarias* para que haya equilibrio. También son condiciones *suficientes*. Para demostrarlo, supongamos que el cuerpo no se encuentra en equilibrio y, sin embargo el sistema de fuerzas que actúa sobre él satisface las ecuaciones 5.1. Supongamos que se requiere una *fuerza adicional* $\mathbf{F}'$ para mantener el cuerpo en equilibrio. En consecuencia, las ecuaciones de equilibrio vienen a ser

http://librosysolucionarios.net

$$\Sigma \mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_O + \mathbf{M}'_O = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{M}'_O$ es el momento de $\mathbf{F}'$ alrededor de O. Ya que $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$, entonces requerimos $\mathbf{F}' = \mathbf{0}$ (también $\mathbf{M}'_O = \mathbf{0}$). En consecuencia, la fuerza adicional $\mathbf{F}'$ no se requiere para sujetar el cuerpo y, de hecho, las ecuaciones 5.1 también son condiciones suficientes de equilibrio.

Equilibrio en dos dimensiones

5.2 Diagramas de cuerpo libre

Para una aplicación exitosa de las ecuaciones de equilibrio se necesita una especificación completa de *todas* las fuerzas externas conocidas y desconocidas que actúan *sobre* el cuerpo. La mejor forma de tomarlas en cuenta a todas consiste en trazar el diagrama del cuerpo libre. Este diagrama es un croquis de la forma del cuerpo que lo representa como *aislado* o "libre" de su entorno. En este bosquejo es necesario mostrar *todas* las fuerzas y momentos de pares que el entorno ejerce *sobre el cuerpo*. Usando este diagrama, los efectos de todas las fuerzas aplicadas y todos los momentos de pares que actúan sobre el cuerpo serán tomados en cuenta, cuando se apliquen las ecuaciones de equilibrio. Por esta razón, *es de primordial importancia entender cabalmente el diagrama de cuerpo libre y su trazado para resolver los problemas de la mecánica*.

http://librosysolucionarios.net

Tabla 5.1 Soportes para cuerpos rígidos sujetos a sistemas de fuerzas en dos dimensiones

Tipos de conexiones	*Reacción*	*Número de incógnitas*
(1) θ cable	θ F	Una incógnita. La reacción es una fuerza de tensión que actúa en la dirección y sentido del cable y hacia fuera del miembro.
(2) θ eslabón sin peso	θ F or θ F	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa a lo largo del eje del eslabón.
(3) θ rodillo	θ F	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(4) θ rodillo o clavija en ranura lisa	F θ o F θ	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la ranura.
(5) θ balancín	θ F	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(6) θ superficie de contacto lisa	θ F	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(7) θ miembro conectado a un collarín sobre barra lisa	F θ or F θ	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.

http://librosysolucionarios.net

Tabla 5.1 (continuación)

Tipos de conexiones	*Reacción*	*Número de incógnitas*
(8) articulación	F_y, F_x or F, ϕ	Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza o la magnitud y dirección Φ de la fuerza resultante. Debe observarse que Φ y θ no necesariamente son iguales [generalmente no, a menos que la varilla mostrada sea un eslabón como en (2)].
(9) miembro fijo conectado a un collarín sobre barra lisa	F, M	Dos incógnitas. Las reacciones son el momento de par y la fuerza que actúa perpendicularlarmente a la barra.
(10) soporte fijo ó empotrado	F_y, F_x, M o F, ϕ, M	Tres incógnitas. Las reacciones son el momento de par y las dos componentes de fuerza, o el momento de par y la magnitud y la dirección Φ de la fuerza resultante.

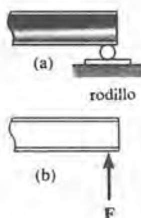


Fig. 5.2

Reacciones de soporte. Antes de presentar un procedimiento formal de cómo trazar un diagrama de cuerpo libre, consideremos los tipos de reacciones que ocurren en los puntos de apoyo entre cuerpos sujetos a sistemas de fuerzas coplanares.

Los principios implicados para determinar estas reacciones se pueden ilustrar considerando tres maneras en que un miembro horizontal, como una viga, suele apoyarse en su extremo. El primer método de soporte consiste en un *rodillo* o cilindro, figura 5.2*a*. Ya que este tipo de soporte sólo impide la traslación de la viga en dirección vertical, es necesario que el rodillo ejerza una fuerza sobre la viga en esta dirección, figura 5.2*b*.

http://librosysolucionarios.net

La viga puede soportarse de manera más restrictiva usando un pasador ó perno como en la figura 5.3*a*. El pasador pasa por agujeros en la viga y dos hojas fijas en el piso. Aquí, el pasador impedirá la traslación de la viga en *cualquier dirección* Φ, figura 5.3*b*, y, por tanto, debe ejercer una fuerza **F** sobre la viga en esta dirección. Para fines de análisis, es generalmente más fácil representar este efecto por sus dos componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, figura 5.3*c*.

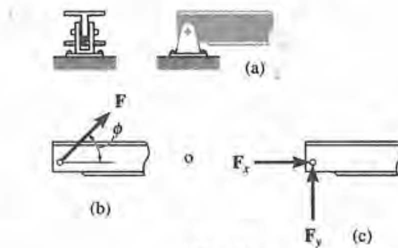


Fig. 5.3

La manera más restrictiva de apoyar la viga sería con la utilización de un *apoyo fijo*, como se muestra en la figura 5.4*a*. Este apoyo impedirá tanto la traslación como la rotación de la viga y, por tanto, para hacerlo deben desarrollarse una fuerza y un momento de un par sobre la viga en su punto de unión, figura 5.4 *b*. Como en el caso del pasador, la fuerza suele representarse por sus componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$.

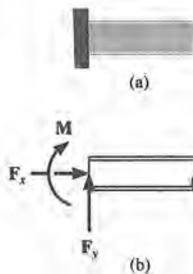


Fig. 5.4

A partir de lo expuesto podemos ahora formular un enunciado general relativo a los tipos de reacciones que se desarrollan en un miembro de contacto por *cualquier tipo* de apoyo. A este respecto, *si un soporte impide traslación en una dirección dada, entonces se desarrolla una fuerza en el miembro de contacto en esa dirección. Asimismo, si se impide la rotación, un momento de par se ejercerá en el miembro*. La tabla 5.1 ofrece una lista de tipos comunes de soportes usados para soportar cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas. (En cada caso se supone conocido

http://librosysolucionarios.net

el ángulo θ). Se recomienda estudiar con mucha atención los símbolos empleados para representar estos soportes y los tipos de reacciones que ejercen sobre sus miembros de contacto. Aunque en esta tabla se muestran fuerzas y momentos de pares concentrados, representan de hecho las *resultantes de cargas superficiales distribuidas* que existen entre cada apoyo y su miembro de contacto. Son estas *resultantes* las que se determinan en la práctica y, en general, no es importante determinar la distribución real de las cargas, ya que el área superficial sobre la que actúa es considerablemente *menor* que el *área superficial total* del miembro conectado.

Fuerzas externas e internas. Puesto que un cuerpo rígido es una composición de partículas, pueden actuar sobre él tanto las cargas *externas* como las *internas*. Pero es importante darse cuenta de que, si se traza el diagrama del cuerpo libre, *no se representarán en* él las fuerzas que sean internas. Como se dijo en la sección 5.1, estas fuerzas siempre ocurren en parejas colineales de la misma magnitud, pero opuestas, y por tanto, su *efecto neto* sobre el cuerpo es cero.

En algunos problemas, puede usarse en el análisis un diagrama de cuerpo libre para un "sistema" de cuerpos unidos. Como ejemplo, tenemos el diagrama de cuerpo libre de un automóvil completo (sistema) compuesto de sus numerosas partes. Obviamente, las fuerzas de unión entre sus partes representarían *fuerzas internas* que *no* se incluirían en el diagrama de cuerpo libre del automóvil. Para resumir, las fuerzas internas actúan entre partículas localizadas *dentro* de un sistema especificado, contenido dentro de los límites del diagrama de cuerpo libre. Las partículas o los cuerpos fuera de estos límites ejercen fuerzas externas sobre el sistema, y solamente éstas deberán mostrarse en el diagrama de cuerpo libre.

El peso y el centro de gravedad. Cuando un cuerpo se sujeta a un campo gravitacional, cada una de sus partículas tiene un peso específico definido por la ley de Newton de la gravitación, $F = Gm_1m_2/r^2$, ecuación. 1.2. Si suponemos "pequeño" el tamaño del cuerpo en comparación con el tamaño de la Tierra, entonces es apropiado considerar que estas fuerzas gravitacionales se representen como un *sistema de fuerzas paralelas* que actúe sobre las partículas contenidas dentro de la frontera del cuerpo. Se mostró en la sección. 4.9 que un sistema tal puede reducirse a una sola fuerza resultante que actúe por un punto especificado. A esta resultante de fuerzas nos referimos como al *peso* **W** del cuerpo, y a la localización de su punto de aplicación nos referimos con el nombre de *centro de gravedad G*. En el capítulo 9 se desarrollarán los métodos para calcularlo.

En los ejemplos y problemas que siguen, si el peso del cuerpo es importante para el análisis, esta fuerza se reportará en el

http://librosysolucionarios.net

enunciado del problema. También, cuando es *uniforme* o está hecho de un material homogéneo, el centro de gravedad se situará en el *centro geométrico* o *centroide* del cuerpo; sin embargo, si el cuerpo es no homogéneo o tiene forma inusual, entonces se dará su centro de gravedad.

PROCEDIMIENTO PARA TRAZAR UN DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Para construir un diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido o un grupo de cuerpos considerados como un solo sistema, deberán efectuarse los pasos siguientes:

Paso 1. Imagine el cuerpo como *aislado* o "cortado" y libre de sus restricciones y conexiones, y trazar (bosquejar) la forma de su contorno.

Paso 2. Identifique todas las fuerzas externas y momentos de pares que actúan sobre el cuerpo. Las que se encuentran, por lo general se deben a (1) cargas aplicadas, (2) reacciones que se dan en los apoyos o puntos de contacto con otros cuerpos (véase la tabla 5.1), y (3) el peso del cuerpo. Para darse cuenta de todos estos efectos, puede ser útil calcar la frontera, y anotar con cuidado cada fuerza o momento de un par que se ejerza.

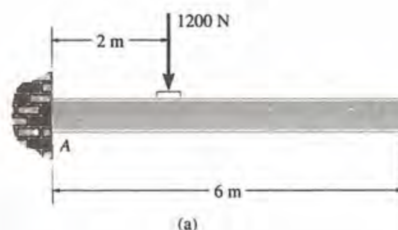
Paso 3. Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de fuerzas. Las fuerzas y momentos de pares que se conozcan deberán etiquetarse con sus magnitudes y direcciones apropiadas. Se usan letras para representar las magnitudes y ángulos de dirección de las fuerzas y momentos de pares que se *desconozcan*. En particular, si una fuerza o momento de par tiene línea de acción conocida, pero *magnitud* desconocida, puede suponerse la punta de flecha que define el sentido del vector. Lo acertado de la suposición se verá después de resolver las ecuaciones de equilibrio para obtener la magnitud desconocida. Por definición, la *magnitud* de un vector es *siempre positiva*, de modo que si la solución da un escalar "negativo", el *signo menos* indica que el sentido del vector es *opuesto* al que fue supuesto inicialmente.

Antes de continuar, se recomienda revisar esta sección; y luego, estudiar con mucha atención los ejemplos que siguen. Después, trátese de trazar los diagramas de cuerpo libre para los objetos de las figuras 5.5 a 5.9 "sin ver" las soluciones. Para practicar en el trazo de diagramas de cuerpo libre se recomienda resolver *todos* los problemas al final de esta sección.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.1

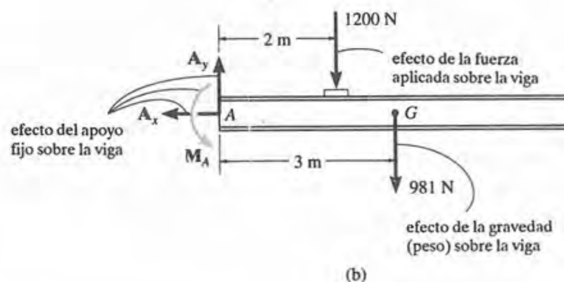
Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga uniforme mostrada en la figura 5.5*a*. La viga tiene una masa de 100 kg.



(a)

SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre de la viga se muestra en la figura 5.5*b*. Puesto que el apoyo en *A* es una pared fija, son tres las reacciones que actúan sobre la viga en *A*, denotadas $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, y $\mathbf{M}_A$. Las magnitudes de estos vectores son desconocidas, y se ha supuesto el sentido de los vectores. (¿Cómo obtener su sentido correcto?). El peso de la viga, $W = 100\,(9.81) = 981$ N, actúa por el centro de gravedad de la viga *G*, a 3 m de *A* puesto que la viga es uniforme.



(b)

Fig. 5.5

http://librosysolucionarios.net

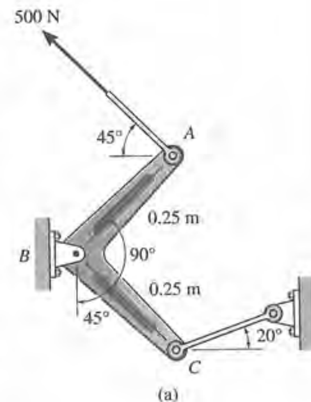
Ejemplo 5.2

Trace el diagrama de cuerpo libre para la palanca *ABC* mostrada en la figura 5.6*a*.

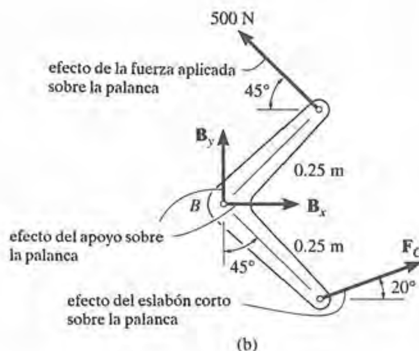
SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 5.6*b*. El apoyo de pasador en *B* ejerce componentes de fuerza $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$ *sobre la palanca*; cada componente tiene una línea de acción conocida, pero magnitud desconocida. El eslabón en *C* ejerce una fuerza $\mathbf{F}_C$ que actúa en la dirección del eslabón y tiene una magnitud desconocida. Las dimensiones de la palanca se indican también en el diagrama de cuerpo libre, ya que esta información será de utilidad para calcular los momentos de las fuerzas. Como de costumbre, los sentidos de las tres fuerzas desconocidas han sido supuestos. El sentido correcto se verá claramente después de resolver las ecuaciones de equilibrio.

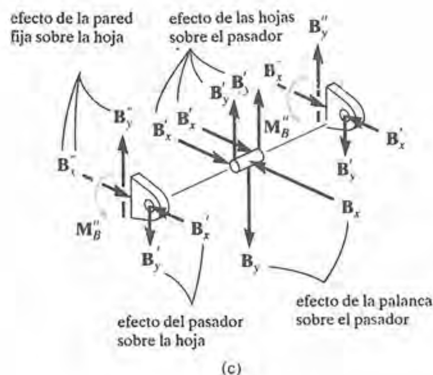
Aunque no son parte de este problema, en la figura 5.6*c* se muestran las imágenes en tres dimensiones de los diagramas de cuerpo libre del pasador y las dos hojas del pasador que se encuentran en *B*. Dado que las hojas están fijamente unidas a la pared, hay tres incógnitas que la pared ejerce sobre cada hoja; a saber, $\mathbf{B}''_x$, $\mathbf{B}''_y$, $\mathbf{M}''_B$. Se muestran que estas reacciones son iguales en magnitud y dirección en cada hoja debido a la simetría de las cargas y de la geometría. Obsérvese con atención cómo el principio de acción-reacción igual, colineal y opuesta se usa al aplicar las fuerzas $\mathbf{B}'_x$ y $\mathbf{B}'_y$ a cada hoja y al pasador. Todas estas incógnitas se pueden obtener de las ecuaciones de equilibrio una vez que se hayan obtenido $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$.



(a)



(b)



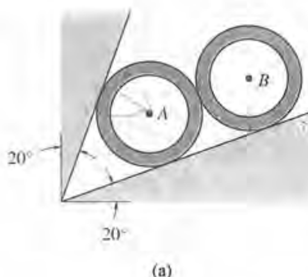
(c)

Fig. 5.6

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.3

Dos tubos lisos, *A* y *B*, cada uno de masa 2 kg, se encuentran en reposo entre los planos inclinados mostrados en la figura 5.7*a*. Trace los diagramas de cuerpo libre para los tubos *A*, *B*, y los tubos *A* y *B* en conjunto.



(a)

SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre para el tubo *A* aparece en la figura 5.7*b*. Su peso es $W = 2(9.81) = 19.62$ N. Dado que todas las superficies en contacto son *lisas*, las fuerzas reactivas **T**, **F**, **R** actúan en dirección *normal* a la tangente en las superficies de contacto.

El diagrama de cuerpo libre del tubo *B* se muestra en la figura 5.7*c*. ¿Puede el lector identificar cada una de las tres fuerzas que *actúan sobre el tubo*? En particular, obsérvese que **R**, que representa la fuerza del tubo *A* sobre el tubo *B*, figura 5.7*c*, es igual y opuesta a **R** que representa la fuerza del tubo *B* sobre el tubo *A*, figura 5.7*b*. Ésta es una consecuencia de la tercera ley de Newton del movimiento.

El diagrama de cuerpo libre de la combinación de los dos tubos ("sistema"), se muestra en la figura 5.7*d*. Aquí la fuerza de contacto **R** que actúa entre *A* y *B* se considera como fuerza *interna* y, por tanto, no mostrada en el diagrama de cuerpo libre. Esto es, representa un par de fuerzas colineales de la misma magnitud, pero opuestas, que se cancelan mutuamente.

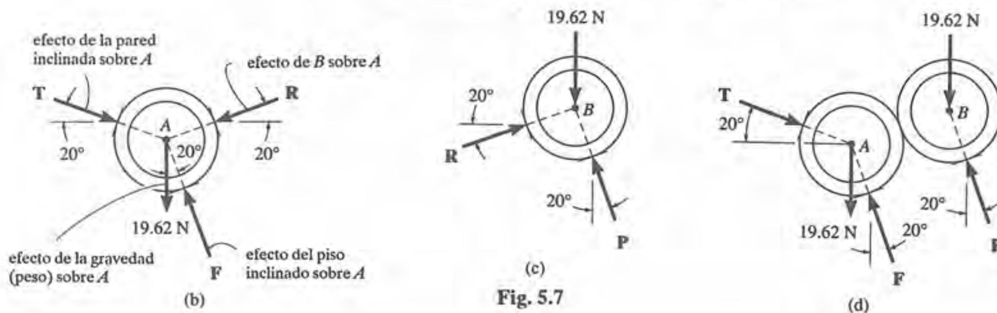


Fig. 5.7

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.4

El diagrama de cuerpo libre de cada objeto en la figura 5.8 ha sido trazado e identificadas las fuerzas que actúan en el objeto. El peso de los objetos será ignorado donde se indique.

SOLUCIÓN

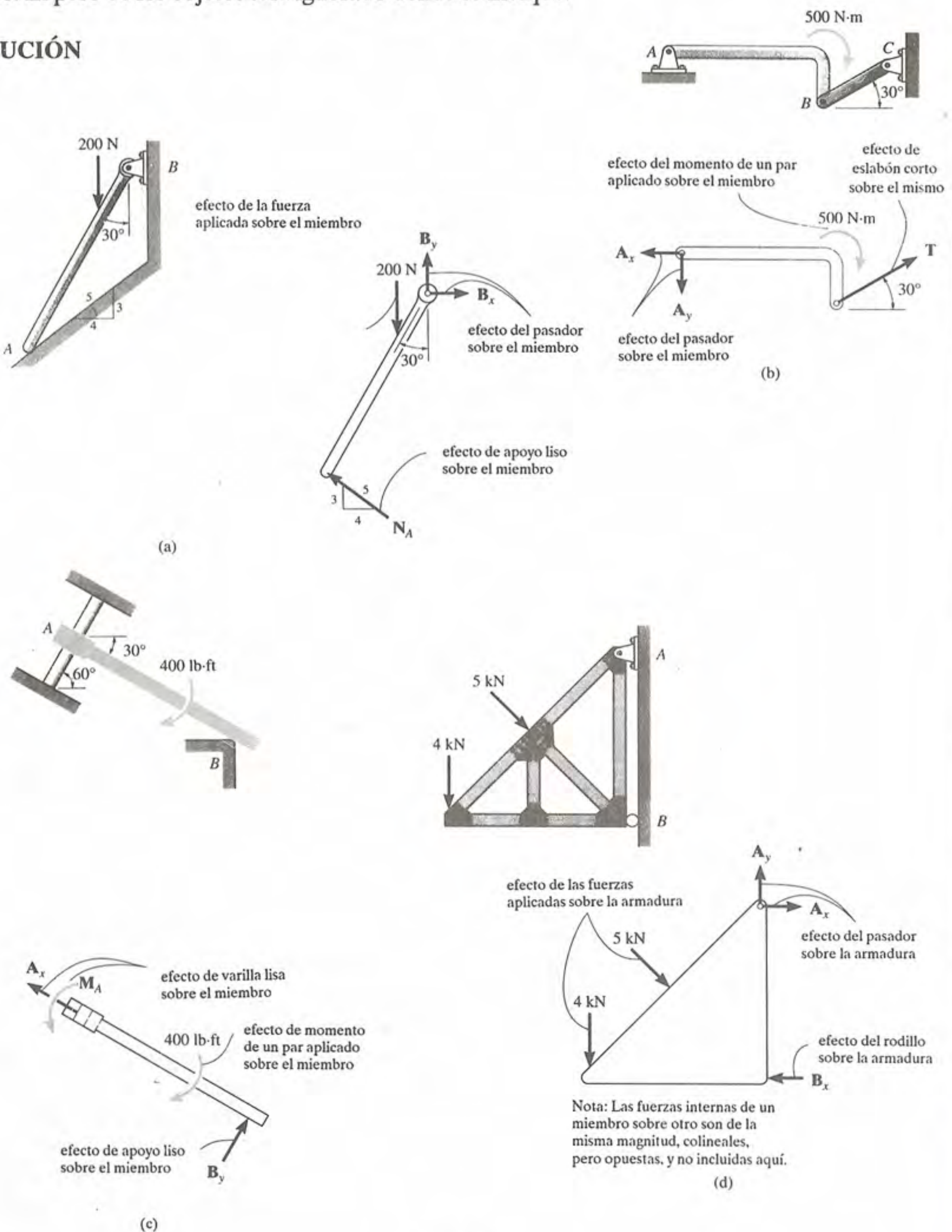


Fig. 5.8

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.5

La señal de autopista mostrada en la figura 5.9*a* tiene una masa de 100 kg con centro de gravedad en *G*. Está sostenida por los pasadores en *C* y *D* y el cable *AB*. Trace un diagrama de cuerpo libre del letrero y su estructura de apoyo. Ignore el peso de la estructura.

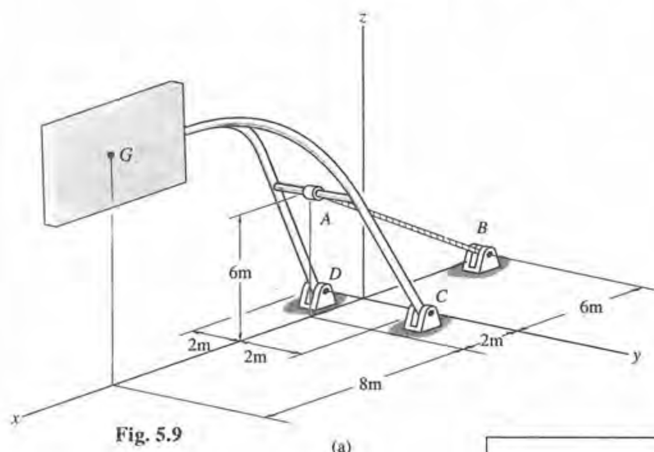
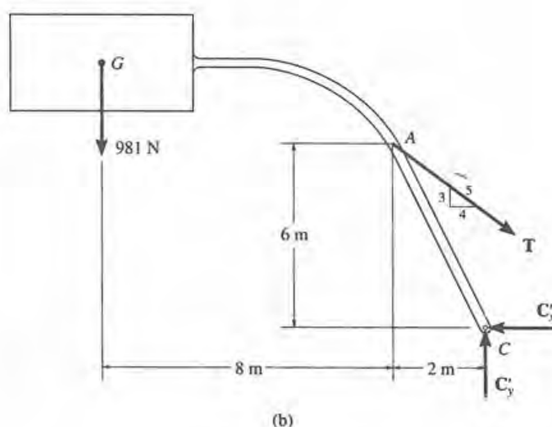


Fig. 5.9

(a)



(b)

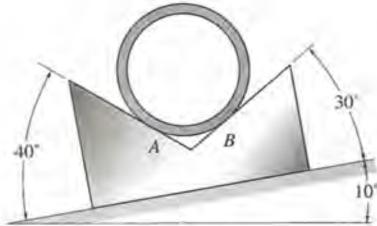
SOLUCIÓN

Se observa fácilmente que la estructura, la señal y las cargas son simétricas respecto al *plano* vertical *x* — *y*, por lo tanto el problema puede analizarse usando un sistema de *fuerzas coplanares*. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 5.9*b*. Nótese que la fuerza **T** que ejerce el cable sobre la estructura tiene línea de acción conocida e indicada por el triángulo de pendiente 3 – 4 – 5. Las componentes de fuerza $\mathbf{C}'_x$ y $\mathbf{C}'_y$ representan las reacciones horizontal y vertical de *ambos* pasadores *C* y *D*, respectivamente. En consecuencia, después de obtener la solución para estas reacciones se aplicará la *mitad* de su magnitud en *C* y la mitad en *D*.

http://librosysolucionarios.net

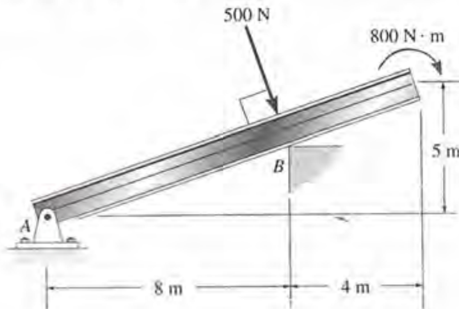
PROBLEMAS

5.1. Trace el diagrama de cuerpo libre del tubo de 50 kg soportado por los contactos lisos en *A* y *B*. Explique el significado de cada fuerza en el diagrama. (véase la figura 5.2*b*).



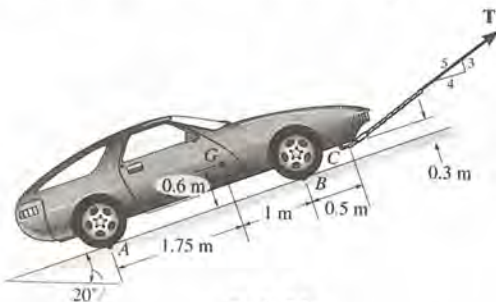
Prob. 5.1

5.2. Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga. El soporte en *B* es liso. Explique el significado de cada fuerza en el diagrama.



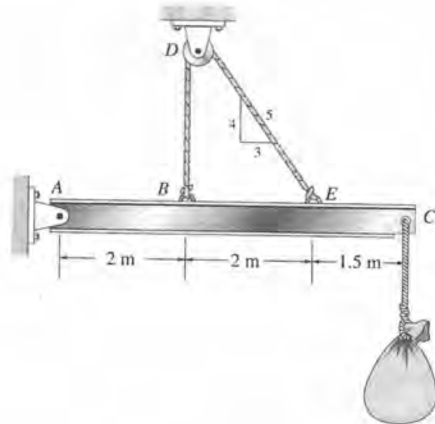
Prob. 5.2

5.3. Trace el diagrama de cuerpo libre del automóvil que tiene masa de 5 Mg y centro de masa en *G*. Las ruedas giran libremente de modo que puede ignorarse la resistencia al rodamiento. Explique el significado de cada una de las fuerzas en el diagrama.



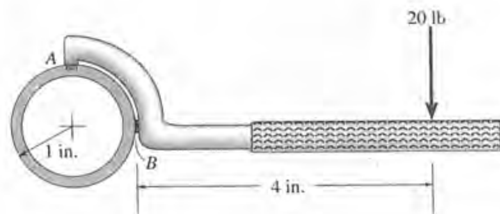
Prob. 5.3

***5.4.** Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga que soporta la carga de 80 kg, la cual se apoya por el pasador en *A*, y está sostenida por un cable que pasa por la polea en *D*. Explique el significado de cada fuerza en el diagrama. (Véase la figura 5.5*b*).



Prob. 5.4

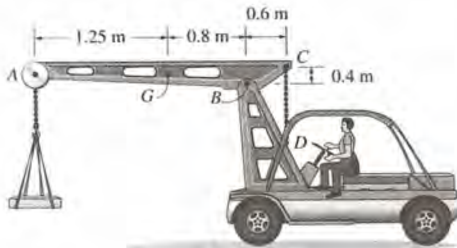
5.5. Trace el diagrama de cuerpo libre de la llave de gancho que está sometida a una fuerza de 20 lb en la empuñadura. La llave está sujeta en *A* y la superficie de contacto en *B* es lisa. Explique el significado de cada fuerza en el diagrama. (Véase la figura 5.2*b*).



Prob. 5.5

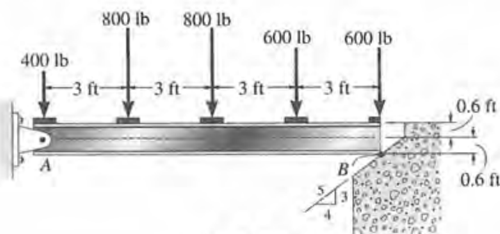
http://librosysolucionarios.net

5.6. Trace el diagrama de cuerpo libre de la pluma *ABC*, que tiene masa de 45 kg, centro de gravedad en *G* y soporta una carga de 30 kg. La pluma está unida por medio de un pasador a la estructura en *B* y a una cadena vertical *CD*. La cadena que sostiene la carga está sujeta a la pluma en *A*.



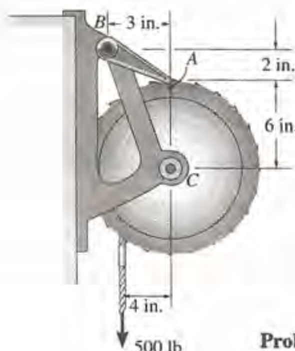
Prob. 5.6

5.7. Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga. El plano inclinado en *B* es liso.



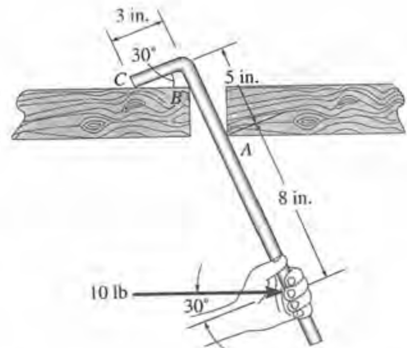
Prob. 5.7

*5.8. Trace el diagrama de cuerpo libre del montacargas que consiste en un tambor de radio de 4 in. Está sujeto con un pasador en su centro *C* y en su borde exterior tiene un mecanismo de trinquete con radio promedio de 6 in. El retén *AB* sirve como un miembro de dos fuerzas (eslabón corto) e impide la rotación del tambor.



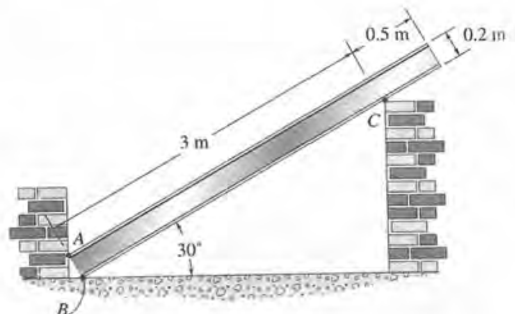
Prob. 5.8

5.9. Trace el diagrama de cuerpo libre de la barra lisa que tiene puntos de contacto en *A*, *B* y *C*.



Prob. 5.9

5.10. Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga uniforme, que tiene una masa de 100 kg y se apoya por contacto en las superficies lisas en *A*, *B* y *C*.



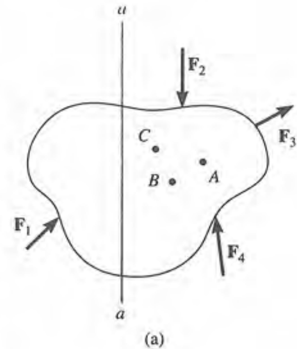
Prob. 5.10

http://librosysolucionarios.net

5.3 Ecuaciones de equilibrio

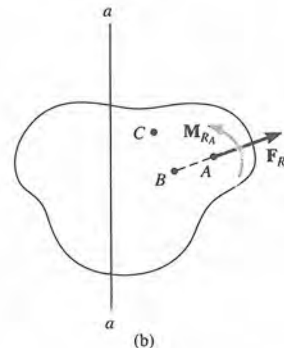
En la sección. 5.1 desarrollamos las dos ecuaciones que son necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido, a saber, $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$. Cuando el cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas que están todas contenidas en el plano $x-y$, entonces las fuerzas se pueden resolver en sus componentes x, y. En consecuencia, las condiciones para el equilibrio en dos dimensiones son

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0 \end{aligned} \qquad (5.2)$$



Aquí ΣF_x y ΣF_y representan, respectivamente, las sumas algebraicas de las componentes x, y de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, ΣM_O representa la suma algebraica de los momentos de par y los momentos de todas las componentes de fuerzas alrededor de un eje perpendicular al plano $x-y$ que pasa por el punto arbitrario O que puede encontrarse en el cuerpo o fuera de él.

Conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio. Aunque las más utilizadas son las ecuaciones 5.2 para resolver problemas de equilibrio que incluyen sistemas coplanares de fuerzas, pueden usarse dos conjuntos alternativos más. Uno de ellos es



$$\begin{aligned} \Sigma F_a &= 0 \\ \Sigma M_A &= 0 \\ \Sigma M_B &= 0 \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Cuando se usan estas ecuaciones se requiere que los puntos de momento A y B *no* estén sobre una recta *perpendicular* al eje a. Para demostrar que las ecuaciones 5.3 proporcionan las condiciones de equilibrio, consideremos el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo de forma arbitraria, figura 5.10*a*. Si se usan los métodos de la sección. 4.8, la acción de las cargas sobre el cuerpo puede reemplazarse por una sola fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$, que actúe en el punto A, y un momento de un par resultante $\mathbf{M}_{R_A} = \Sigma \mathbf{M}_A$, figura 5.10 *b*. Para el equilibrio se requiere que $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$ y $\mathbf{M}_{R_A} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, si se satisface $\Sigma M_A = \mathbf{0}$ será necesario que $\mathbf{M}_{R_A} = \mathbf{0}$. Además, para que $\mathbf{F}_R$ satisfaga $\Sigma F_a = 0$, debe no tener componente a lo largo del eje a y, por lo tanto, su línea de acción debe ser perpendicular al eje a, figura 5.10*c*. Finalmente, si se requiere que $\Sigma M_B = \mathbf{0}$, donde B no está en la línea de acción de $\mathbf{F}_R$, entonces $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$ y, de hecho, el cuerpo que se ve en la figura 5.10*a* debe estar en equilibrio.

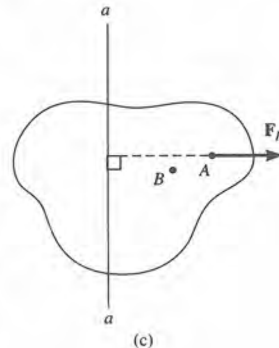


Fig. 5.10

http://librosysolucionarios.net

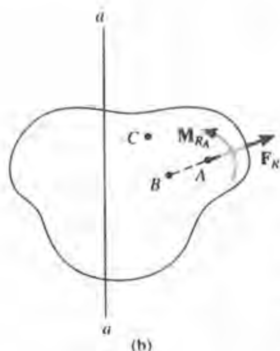


Fig. 5.10

El otro conjunto alternativo de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma M_A = 0$$
$$\Sigma M_B = 0 \tag{5.4}$$
$$\Sigma M_C = 0$$

Aquí es necesario que los puntos A, B y C no se encuentren en la misma recta. Para demostrar que cuando estas ecuaciones son satisfechas implican el equilibrio, consideremos nuevamente el diagrama de cuerpo libre en la figura 5.10*b*. Si $\Sigma M_A = 0$ debe satisfacerse, entonces, el momento de un par resultante $\mathbf{M}_{R_A} = \mathbf{0}$. $\Sigma M_B = 0$ se satisface si la recta de acción de $\mathbf{F}_R$ pasa por el punto B como se muestra y, finalmente, si requerimos $\Sigma M_C = 0$, donde C no se encuentra sobre la recta AB, es necesario que $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$, y el cuerpo de la figura 5.10*a* debe estar entonces en equilibrio.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento proporciona un método para resolver problemas de equilibrio de fuerzas coplanares:

Diagrama de cuerpo libre. Trace un diagrama de cuerpo libre del cuerpo, como se explicó en la sección 5.2. En pocas palabras, esto requiere mostrar todas las fuerzas externas y momentos de par que actúan *sobre el cuerpo*. Las magnitudes de estos vectores se etiquetarán y se especificarán sus direcciones. Las dimensiones del cuerpo requeridas para calcular los momentos de las fuerzas se incluirán también en el diagrama de cuerpo libre. Identifique las incógnitas. Se puede *suponer* el sentido de cada fuerza o momento de par que tenga una magnitud *desconocida*, pero línea de acción conocida.

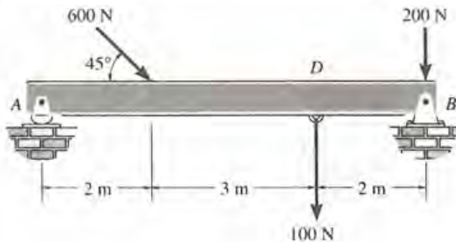
Ecuaciones de equilibrio. Establezca los ejes x, y, z, y aplique las ecuaciones de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_O = 0$ (o, como alternativa, los conjuntos de ecuaciones 5.3 o 5.4). Para *evitar* tener que resolver ecuaciones simultáneas, aplique la ecuación de momentos $\Sigma M_O = 0$ alrededor de un punto (O) que *esté en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas*. En esta forma, los momentos de estas incógnitas son *cero* alrededor de O y uno puede obtener una *solución directa* para la tercera incógnita. Cuando se apliquen las ecuaciones de fuerza $\Sigma F_x = 0$, y $\Sigma F_y = 0$, oriente los ejes x y y a lo largo de las líneas que proporcionen la resolución más simple de las fuerzas en sus componentes x, y. Si la solución de las ecuaciones de equilibrio diera un escalar *negativo* para una fuerza o momento de un par desconocido, esto indicaría que el sentido es *contrario* al supuesto en el diagrama de cuerpo libre.

Los siguientes ejemplos ilustran numéricamente este procedimiento.

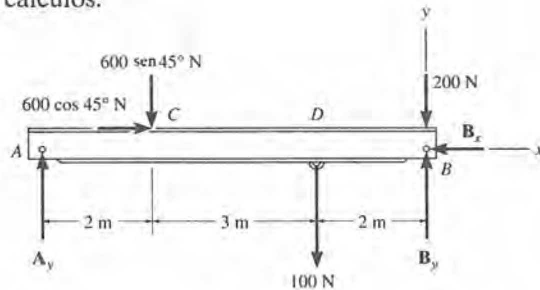
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.6

Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción para la viga cargada que se muestra en la figura 5.11*a*. Se ignorarán el peso y el grosor de la viga en los cálculos.



(a)



(b)

Fig. 5.11

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. ¿Puede identificar el lector cada una de las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 5.11*b*? Por sencillez en la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, la fuerza de 600 N se representa por sus componentes *x*, *y*, como se muestra en esa ilustración. También, debe observarse que en *B* actúa sobre la viga una fuerza de 200 N y que es independiente de las componentes de fuerza $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$ que representan el efecto del pasador sobre la viga.

Ecuaciones de equilibrio. Al Sumar fuerzas en la dirección *x*, se obtiene

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 600 \cos 45° \text{ N} - B_x = 0$$
$$B_x = 424 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Puede obtenerse una solución directa para $\mathbf{A}_y$ y aplicando la ecuación de momentos $\Sigma M_B = 0$ alrededor del punto *B*. Para llevar a cabo los cálculos se ve de inmediato que las fuerzas de 200 N, de 600 cos 45° N, y las reacciones $\mathbf{B}_x$, $\mathbf{B}_y$ producen momentos nulos alrededor de *B*. Con la rotación de sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de *B*, definida como positiva (en la dirección +**k**), figura 5.11*b*, tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 100 \text{ N}(2 \text{ m}) + (600 \text{ sen } 45° \text{ N})(5 \text{ m}) - A_y(7 \text{ m}) = 0$$
$$A_y = 332 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

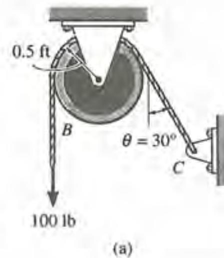
Si se suman fuerzas en la dirección, y, se utiliza el resultado $A_y = 332$ N, obtenemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 332 \text{ N} - 600 \text{ sen } 45° \text{ N} - 100 \text{ N} - 200 \text{ N} + B_y = 0$$
$$B_y = 393 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.7

La cuerda que se ve en la figura 5.12*a* soporta una fuerza de 100 lb y pasa por la polea sin fricción. Determine la tensión en la cuerda en *C* y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador *A*.



(a)

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Los diagramas de cuerpo libre para la cuerda y la polea se muestra en la figura 5.12*b*. Debe tenerse cuidado con el principio de la acción y la reacción al trazar estos diagramas; igual en magnitud y dirección, pero en sentido opuesto: la cuerda ejerce una presión distribuida *p* que se desconoce a lo largo de una parte de la superficie de la polea, en tanto que la polea ejerce un efecto de la misma magnitud, pero en sentido opuesto sobre la cuerda. Para la solución, sin embargo, es más simple *combinar* los diagramas de cuerpo libre de la polea y una parte de la cuerda, de modo que la distribución de presiones se convierte en *interna* al sistema y, por tanto, se elimina del análisis, figura 5.12*c*.

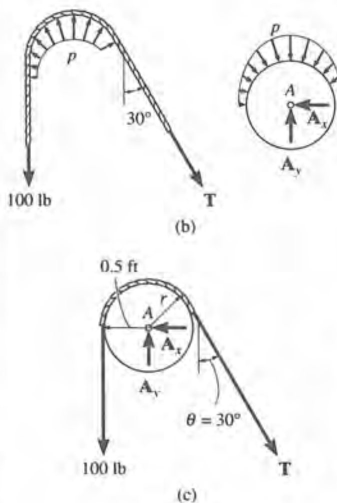


Fig. 5.12

Ecuaciones de equilibrio. Al sumar momentos alrededor del punto *A* para eliminar $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$, figura 5.12 *c*, tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad 100\text{ lb}(0.5\text{ ft}) - T(0.5\text{ ft}) = 0$$

$$T = 100\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Se ve que la tensión permanece constante al pasar la cuerda por la polea. (Esto, desde luego, es verdad para *cualquier ángulo θ* de dirección de la cuerda y para *cualquier radio r* de la polea). Si se usa el resultado para *T*, se hace una suma para determinar las componentes de la reacción en la articulación *A*.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad -A_x + 100 \text{ sen } 30° \text{ lb} = 0$$

$$A_x = 50.0\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

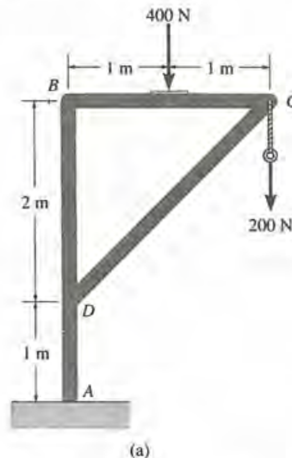
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 100\text{ lb} - 100\cos 30°\text{ lb} = 0$$

$$A_y = 187\ lb \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.8

Determine las reacciones en el apoyo fijo A para la estructura cargada en la figura 5.13 a.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre para la estructura total es como se muestra en la figura 5.13 b. Existen tres incógnitas en el apoyo fijo, representadas por las magnitudes $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{M}_A$.

Ecuaciones de equilibrio

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;$ $\quad A_x = 0$ ***Resp.***

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$ $\quad A_y - 400\text{ N} - 200\text{ N} = 0$

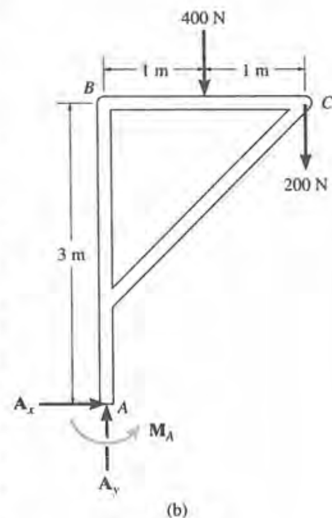
$A_y = 600\text{ N}$ ***Resp.***

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;$ $\quad M_A - 400\text{ N}(1\text{ m}) - 200\text{ N}(2\text{ m}) = 0$

$M_A = 800\text{ N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

El punto A fue elegido para sumar momentos, ya que las líneas de acción de las fuerzas *desconocidas* $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ pasan por este punto y, por tanto, estas fuerzas no se incluyeron para la suma de momentos. Es importante darse cuenta, sin embargo, de que $\mathbf{M}_A$ debe ser *incluido* en la suma de momentos. Este momento de un par es un vector libre y representa el efecto del soporte fijo sobre la estructura.

Aunque sólo pueden escribirse *tres* ecuaciones de equilibrio independientes para un cuerpo rígido, es una buena costumbre *verificar* los cálculos usando una cuarta ecuación de equilibrio. Por ejemplo, los cálculos precedentes pueden verificarse sumando momentos alrededor del punto C:



(b)

Fig. 5.13

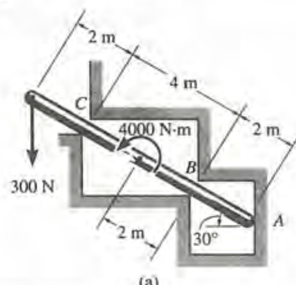
$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$ $\quad 400\text{ N}(1\text{ m}) - 600\text{ N}(2\text{ m}) + 800\text{ N}\cdot\text{m} = 0$

$400\text{ N}\cdot\text{m} - 1200\text{ N}\cdot\text{m} + 800\text{ N}\cdot\text{m} = 0$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.9

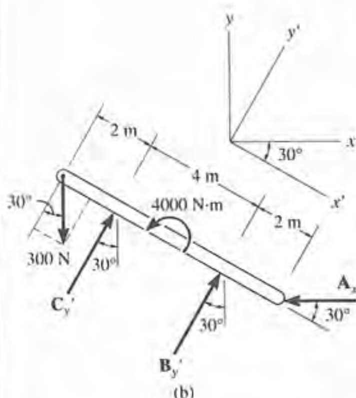
La barra uniforme que se muestra en al figura 5.14 *a* está sujeta a una fuerza y un momento de un par. Si la barra se apoya en A sobre una pared lisa y en B y en C, por contactos lisos, arriba y abajo, determine las reacciones en estos apoyos. Deberá ignorarse el peso de la varilla.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 5.14 *b*, todas las reacciones de apoyo actúan normalmente a la superficie de contacto, dado que las superficies en cuestión son lisas. Las reacciones en B y en C se muestran cuando actúan en la dirección positiva y'. De esta manera, se supone que sólo los contactos de la parte inferior de la barra se usan de apoyo.



(b)

Fig. 5.14

Ecuaciones de equilibrio. Si se usa el sistema de coordenadas x, y en la figura 5.14 *b*, tenemos

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad C_{y'} \text{ sen } 30° + B_{y'} \text{ sen } 30° - A_x = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -300 \text{ N} + C_{y'} \cos 30° + B_{y'} \cos 30° = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \qquad -B_{y'}(2 \text{ m}) + 4000 \text{ N}\cdot\text{m} - C_{y'}(6 \text{ m}) + (300 \cos 30° \text{ N})(8 \text{ m}) = 0 \qquad (3)$$

Al escribir la ecuación de momentos, se observará que la línea de acción de la componente de fuerza 300 sen 30° N pasa por el punto A y, por tanto, esta fuerza no se considera en la formación de la ecuación de momentos.

Al resolver simultáneamente las ecuaciones 2 y 3, obtenemos

$$B_{y'} = -1000.0 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$C_{y'} = 1346.4 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Puesto que $B_{y'}$ es un escalar negativo, el sentido de $B_{y'}$ es opuesto al que se mostró en el diagrama de cuerpo libre en la figura 5.14 *b*. Por tanto, el contacto superior en B sirve de apoyo en lugar del inferior. Si se conserva el signo negativo para $B_{y'}$ (¿Por qué?) y sustituyen los resultados en la ecuación 1, obtenemos

$$1346.4 \text{ sen } 30° \text{ N} - 1000.0 \text{ sen } 30° \text{ N} - A_x = 0$$

$$A_x = 173.2 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.10

La viga que se muestra en la figura 5.15 *a* está articulada en A y descansa sobre un apoyo liso en B. Calcule las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A.

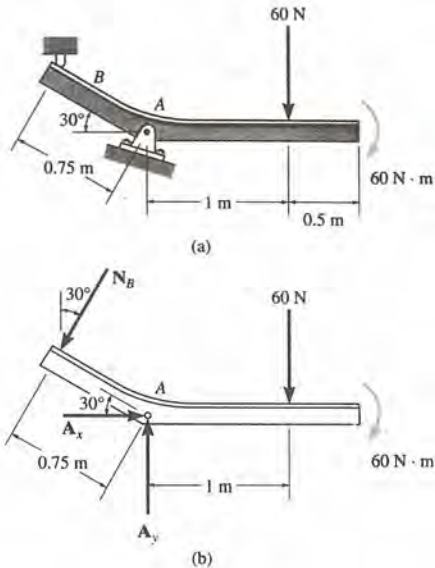


Fig. 5.15

SOLUCIÓN

Diagrama del cuerpo libre. Como se muestra en la figura 5.15*b*, la reacción $\mathbf{N}_B$ es perpendicular a la viga en B. También, las componentes horizontal y vertical de la reacción se representan en A, aunque la base de la articulación esté inclinada.

Ecuaciones de equilibrio. Al sumar momentos alrededor de A, obtenemos una solución directa para N_B,

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad -60 \text{ N} \cdot \text{m} - 60 \text{ N}(1 \text{ m}) + N_B(0.75 \text{ m}) = 0$$
$$N_B = 160 \text{ N}$$

Con este resultado

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad A_x - 160 \text{ sen } 30° \text{ N} = 0$$
$$A_x = 80.0 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 160 \cos 30° \text{ N} - 60 \text{ N} = 0$$
$$A_y = 199 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.11

Una fuerza de 150 lb actúa en el extremo de la viga que se muestra en la figura 5.16*a*. Determine la magnitud y el sentido de la reacción en la articulación *A* y la tensión del cable.

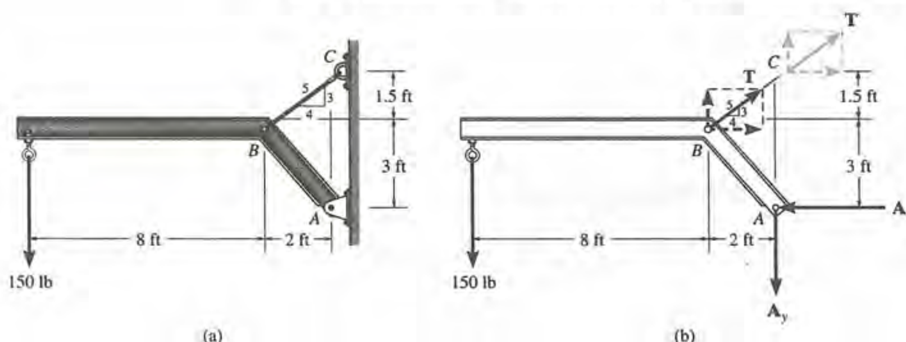


Fig. 5.16

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas que actúan en la viga se muestran en la figura 5.16*b*.

Ecuaciones de equilibrio. La suma de momentos alrededor de *A* para obtener una solución directa para la tensión del cable dará

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \; -(\tfrac{3}{5}T)(2\text{ ft}) - (\tfrac{4}{5}T)(3\text{ ft}) + 150\text{ lb}(10\text{ ft}) = 0$$

$$-3.6T + 150\text{ lb}(10\text{ ft}) = 0 \qquad (1)$$

$$T = 416.7\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Si se usa el principio de transmisibilidad también es posible localizar **T** en *C*, aunque este punto no se encuentre en la viga, figura 5.16*b*. En este caso, la componente vertical de **T** crea *momento cero* alrededor de *A*, y el brazo de momento de la componente horizontal ($\frac{4}{5}T$) viene a ser 4.5 ft. Por tanto, $\Sigma M_A = 0$ da directamente la ecuación 1, pues $(\frac{4}{5}T)(4.5) = 3.6T$.

Al sumar fuerzas para obtener A_x y A_y, si se usa el resultado para *T*, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad -A_x + (\tfrac{4}{5})(416.7\text{ lb}) = 0$$

$$A_x = 333.3\text{ lb} \rightarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad (\tfrac{3}{5})416.7\text{ lb} - 150\text{ lb} - A_y = 0$$

$$A_y = 100\text{ lb} \downarrow$$

Así,

$$F_A = \sqrt{(333.3\text{ lb})^2 + (100\text{ lb})^2}$$

$$= 348.0\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{100\text{ lb}}{333.3\text{ lb}} = 16.7° \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.12

La viga uniforme *AB* de 100 kg que se muestra en la figura 5.17*a* se apoya en una articulación de pasador en *A* y se sostiene en *B* y *C*, mediante un cable que pasa por una polea sin fricción situada en *D*. Si en el cable puede desarrollarse una fuerza de tensión máxima de 800 N antes de la ruptura, determine la distancia máxima *d* a la que puede aplicarse una fuerza de 6 kN sobre la viga. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la reacción en *A* justo antes de la ruptura? Ignore el espesor de la viga en el cálculo.

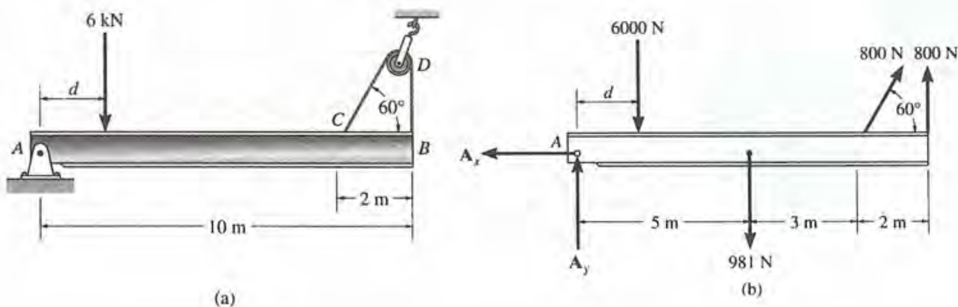


Fig. 5.17

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Puesto que el cable es continuo y pasa por una polea sin fricción, todo el cable estará sujeto a su tensión máxima de 800 N cuando la fuerza de 6 kN actúe en *d*. Por tanto, el cable ejerce una fuerza de 800 N en los puntos *C* y *B*, *en la viga* y en la dirección del cable, figura 5.17*b*.

Ecuaciones de equilibrio. Al sumar los momentos del sistema de fuerzas alrededor de *A* es posible obtener una solución directa para la dimensión *d*. ¿Por qué?

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;$

$-(6000 \text{ N})(d) - 981 \text{ N}(5 \text{ m}) + (800 \text{ sen } 60° \text{ N})(8 \text{ m}) + 800 \text{ N}(10 \text{ m}) = 0$

$d = 1.44 \text{ m}$ ***Resp.***

Si se suman las fuerzas en las direcciones *x* y *y*, tenemos

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $\quad -A_x + 800 \cos 60° \text{ N} = 0$

$A_x = 400 \text{ N}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad A_y - 6000 \text{ N} - 981 \text{ N} + 800 \text{ sen } 60° \text{ N} + 800 \text{ N} = 0$

$A_y = 5.49 \text{ kN}$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

5.4 Miembros de dos y de tres fuerzas

La solución de algunos problemas de equilibrio puede simplificarse si es posible reconocer miembros sujetos tan sólo a dos o a tres fuerzas.

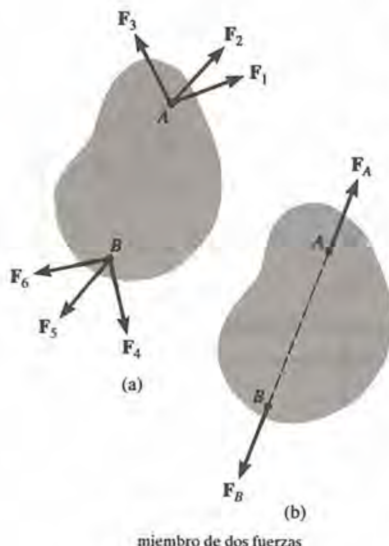


Fig. 5.18

Miembros de dos fuerzas. Cuando un miembro no se halla sometido a *ningún momento de un par* y las fuerzas se aplican solamente en dos puntos del miembro, éste se denominará *miembro de dos fuerzas*. La figura 5.18*a* representa un ejemplo de esta situación. Lo primero es sumar las fuerzas en A y en B para obtener sus respectivas *resultantes* $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$, figura 5.18*b*. Estas dos fuerzas mantendrán el *equilibrio de fuerzas o equilibrio translacional* ($\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$) a condición de que $\mathbf{F}_A$ sea de igual magnitud y dirección opuesta a $\mathbf{F}_B$. Además, el *equilibrio de momentos o equilibrio rotacional* ($\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$) se tendrá si $\mathbf{F}_A$ es *colineal* con $\mathbf{F}_B$. Como consecuencia, la línea de acción de las dos fuerzas será conocida, porque es la que pasa por A y por B. Por tanto, solamente habrá que determinar o establecer la magnitud de la fuerza. La figura 5.19 presenta otros ejemplos de miembros de dos fuerzas mantenidos en equilibrio.

Miembros de tres fuerzas. Si un miembro está sujeto a tres fuerzas coplanares, entonces es necesario que las fuerzas sean, *concurrentes o paralelas*, si el miembro va a estar en equilibrio. Para demostrarlo, consideremos el cuerpo de la figura 5.20 y supongamos que dos cualesquiera de las tres fuerzas que actúan sobre el cuerpo tienen líneas de acción que se intersecan en el punto O. Para satisfacer el equilibrio de momentos de par con respecto a O, es decir, $\Sigma M_O = O$, la tercera fuerza también debe pasar por O, lo que hace que el sistema de fuerzas sea *concurrente*. Si dos de las tres fuerzas son paralelas, el punto de concurrencia, O, se considera que está en el "infinito" y la tercera fuerza debe ser paralela a las otras dos para intersecarse en este "punto". Si las tres fuerzas son concurrentes en un punto, solamente debe satisfacerse el equilibrio de fuerzas ($\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$).

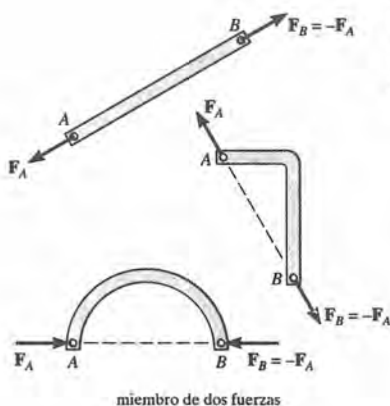


Fig. 5.19

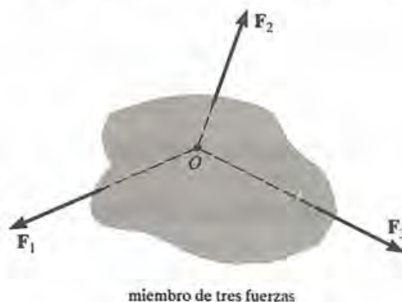


Fig. 5.20

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.13

La palanca ABC está articulada en A y unida a un eslabón corto BD como se indica en la figura 5.21a. Si los pesos de los miembros son despreciables, determine la fuerza desarrollada sobre la palanca por la articulación A.

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Como se indica en el diagrama de cuerpo libre, figura 5.21b, el eslabón corto BD es *un miembro de dos fuerzas*, de modo que las *fuerzas resultantes* en las articulaciones B y D deben ser iguales, opuestas y colineales. Aunque la magnitud de la fuerza es desconocida, la línea de acción se conoce, ya que pasa por B y D.

La palanca ABC es un *miembro de tres fuerzas* y, por consiguiente, para satisfacer el equilibrio de momentos, las tres fuerzas no paralelas que actúan sobre él deben ser concurrentes en O, figura 5.21c. En particular, nótese que la fuerza $\mathbf{F}$ sobre la palanca es igual, pero opuesta a la $\mathbf{F}$ que actúa en B sobre el eslabón. ¿Por qué? La distancia CO debe ser de 0.5 m, ya que se conocen las líneas de acción de la fuerza $\mathbf{F}$ y la de 400 N.

Ecuaciones de equilibrio. Al requerirse que el sistema de fuerzas sea concurrente en O, de modo que $\Sigma M_O = 0$, el ángulo θ que define la línea de acción de $\mathbf{F}_A$ puede determinarse por trigonometría,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{0.4}\right) = 60.3^\circ \quad \angle^{\theta} \qquad \textit{Resp.}$$

Si se aplican las ecuaciones de equilibrio de fuerzas podemos obtener F y F_A.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad F_A \cos 60.3^\circ - F\cos 45^\circ + 400 \text{ N} = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_A \operatorname{sen} 60.3^\circ - F \operatorname{sen} 45^\circ = 0$$

al resolver, obtenemos

$$F_A = 1075 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$F = 1320 \text{ N}$$

Nota: También podemos resolver este problema representando la fuerza en A mediante sus dos componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$, y aplicando $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma \mathbf{F}_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$. Una vez que se han determinado A_x y A_y, ¿cómo podrían encontrarse F_A y θ?

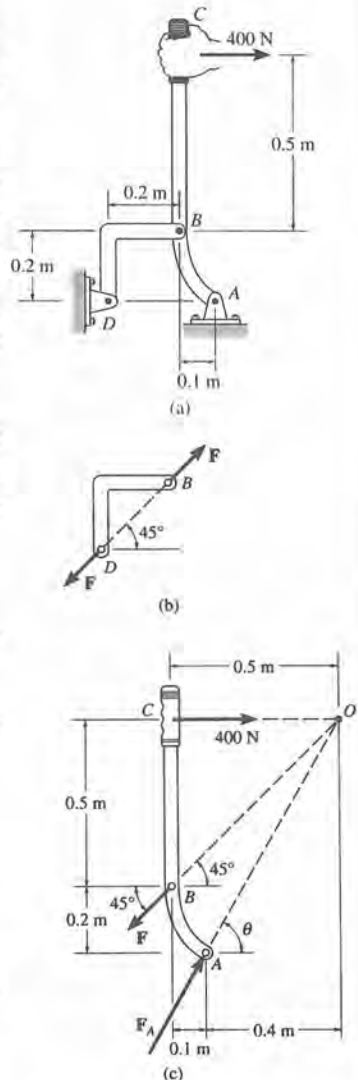


Fig. 5.21

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

5.11. Determine las reacciones en los apoyos de la viga en el problema 5.2. El apoyo en B es liso.

* **5.12**. Determine la fuerza **T** en el cable de remolque en C y la reacción en *cada una* de las cuatro llantas del automóvil del problema 5.3.

5.13. Determine la tensión en el cable y las componentes horizontal y vertical de reacción en la articulación A de la viga en el problema 5.4. La polea en D no tiene fricción. Ignore el espesor de la viga.

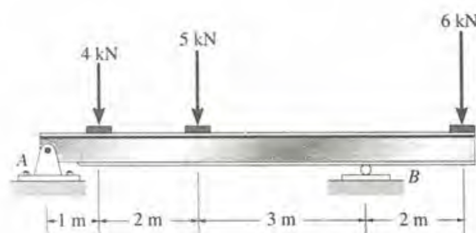
5.14. Determine la reacción en la articulación en A y la fuerza en la superficie lisa de contacto en B de la llave de gancho del problema 5.5.

5.15. Determine las reacciones en los apoyos de la viga del problema 5.7.

* **5.16**. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador C del malacate del problema 5.8.

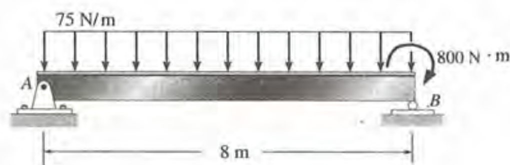
5.17. Determine las reacciones en los puntos A, B, y C de la barra del problema 5.9, requeridas para soportar la fuerza horizontal de 10 lb. Ignórese el espesor de la barra para los cálculos.

5.18. Determine las reacciones en los apoyos.



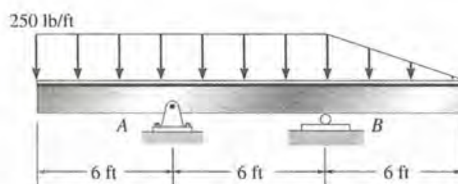
Prob. 5.18

5.19. Determine las reacciones en los apoyos.



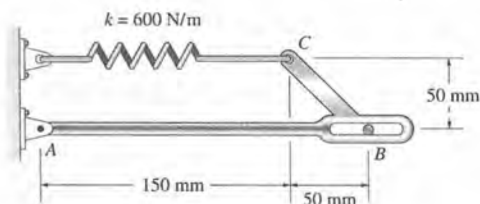
Prob. 5.19

* **5.20**. Determine las reacciones en los apoyos.



Prob. 5.20

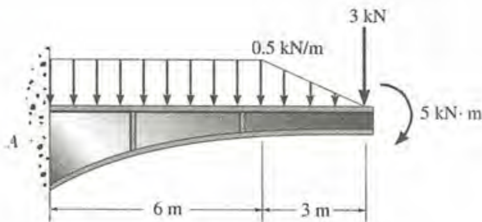
5.21. Determine las reacciones en los pasadores en A y B. El resorte tiene longitud inextendida de 80 mm.



Prob. 5.21

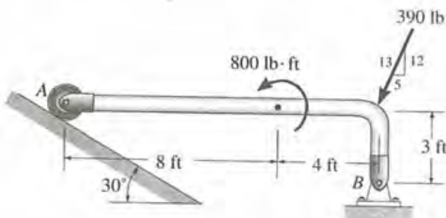
http://librosysolucionarios.net

5.22. Determine las reacciones en el apoyo fijo A.



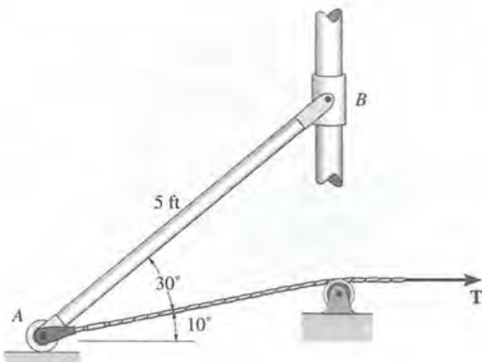
Prob. 5.22

5.23. Determine las reacciones en el rodillo y en el pasador en B.



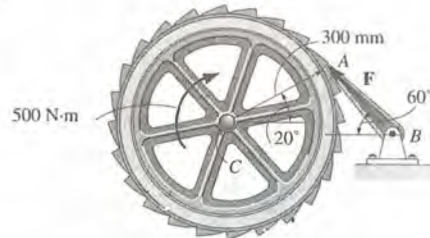
Prob. 5.23

*** 5.24.** La varilla uniforme en AB tiene un peso de 15 lb. Determine la fuerza en el cable cuando la varilla esté en la posición mostrada.



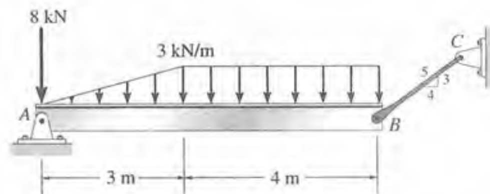
Prob. 5.24

5.25. La rueda está sujeta a un torque (par de torsión) de 500 N · m. Determine la fuerza **F** que actúa a lo largo del eje AB del fijador atravesado para impedir el movimiento. También, determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa en el eje pasador que está en C.



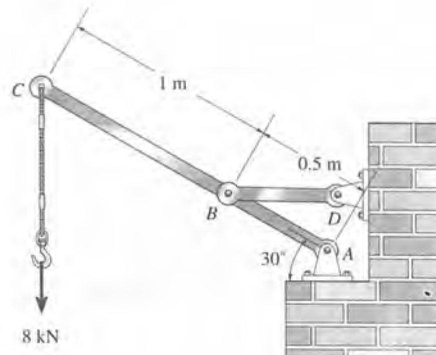
Prob. 5.25

5.26. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A y la fuerza en el cable BC.



Prob. 5.26

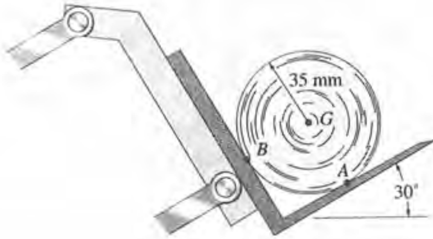
5.27. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A y la fuerza en el eslabón corto BD.



Prob. 5.27

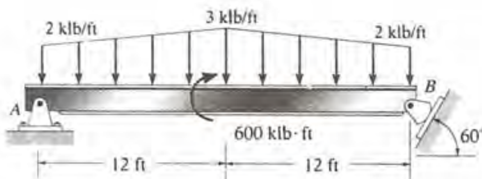
http://librosysolucionarios.net

*** 5.28**. Determine las reacciones en A y en B que actúan sobre el rollo de papel de 50 kg, con centro de masa en G y que descansa en la hoja lisa del acarreador.



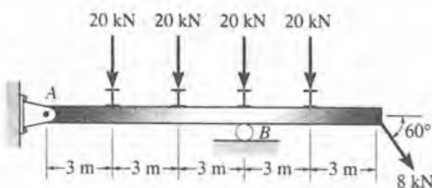
Prob. 5.28

5.29. Determine las reacciones de apoyo sobre la viga.



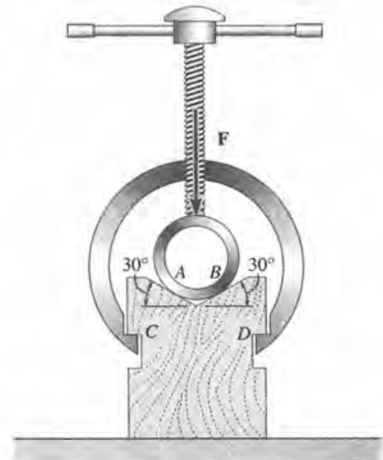
Prob. 5.29

5.30. Determine las reacciones de soporte sobre la viga.



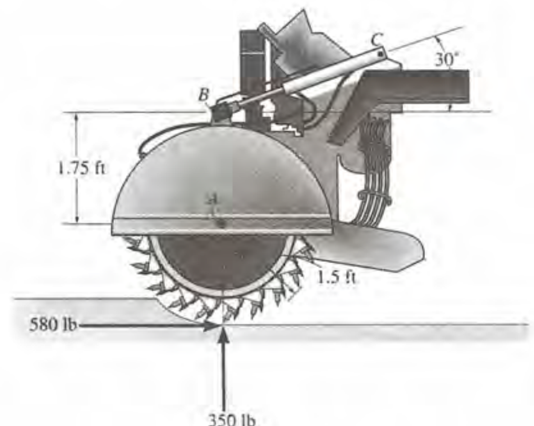
Prob. 5.30

5.31. Para sujetar el tubo se utiliza la abrazadera en V. Si la fuerza que ejerce el tornillo sobre el tubo es $F = 85$ N como se muestra, determine las fuerzas normales que ejerce la abrazadera sobre el tubo en A y en B. Trace un diagrama de cuerpo libre del anillo y calcule las reacciones verticales en C y D. Suponga que todos los puntos de contacto son lisos.



Prob. 5.31

*** 5.32**. El cortador está sujeto a una fuerza horizontal de 580 lb y una fuerza normal de 350 lb. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre el pasador en A y la fuerza a lo largo del cilindro hidráulico BC (miembro de dos fuerzas).



Prob. 5.32

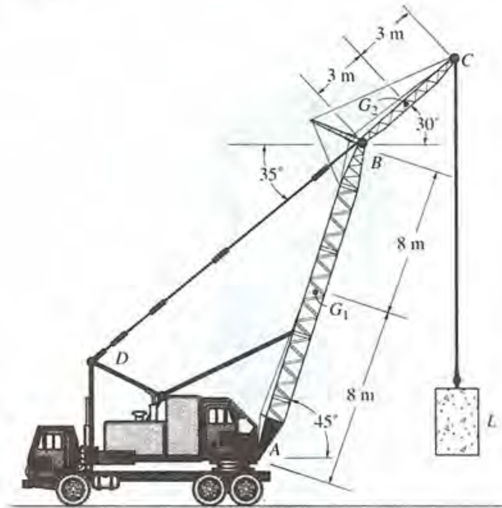
http://librosysolucionarios.net

5.33. La grúa tiene tres partes, que pesan respectivamente $W_A = 3500$ lb, $W_B = 900$ lb, $W_C = 1500$ lb y centros de gravedad en A, B y C, respectivamente. Sin tomar en cuenta el peso de la pluma, determine (*a*) las reacciones en cada una de las cuatro llantas si la carga se levanta a velocidad constante y tiene un peso de 800 lb, y (*b*) con la pluma en la posición que se muestra, la carga máxima que puede levantar la grúa sin bascularse.



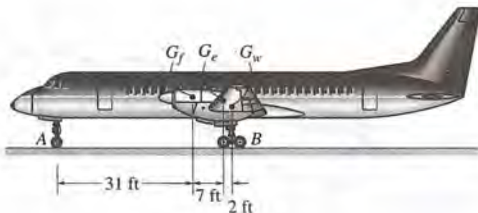
Prob. 5.33

5.35. Una grúa levanta una carga L de 400 kg. Si la pluma principal AB tiene una masa de 1.20 Mg y centro de masa en G_1, en tanto que la pluma secundaria BC tiene una masa de 0.6 Mg y centro de masa en G_2, determine la tensión en el cable BD y las componentes horizontal y vertical de reacción en la articulación A.



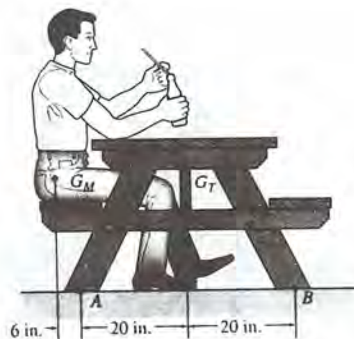
Prob. 5.35

5.34. Determine la fuerza normal resultante que actúa sobre cada juego de ruedas del aeroplano. Hay un juego de ruedas al frente, A, y otro bajo cada una de las alas B. Las dos alas tienen un peso total de 50 klb y centro de gravedad en G_w, el fuselaje tiene un peso de 180 klb y centro de gravedad en G_f, y ambos motores (uno de cada lado) tienen un peso de 22 klb y centro de gravedad en G_e.



Prob. 5.34

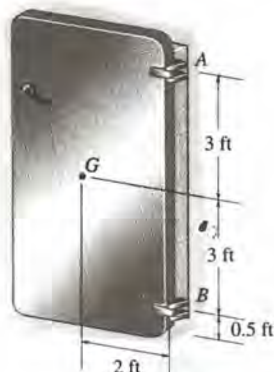
* **5.36**. Una mesa de campo tiene un peso de 50 lb y centro de gravedad en G. Si un hombre que pesa 225 lb tiene centro de gravedad en G_M y está sentado en la posición centrada que se muestra, determine la reacción vertical en cada una de las dos patas de la mesa en B. Ignore el espesor de las patas ¿Qué se puede concluir de los resultados?



Prob. 5.36

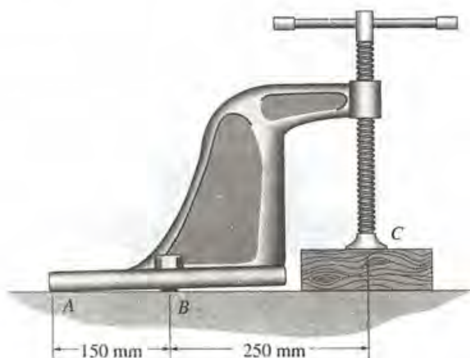
http://librosysolucionarios.net

5.37. Una puerta uniforme tiene un peso de 100 lb y centro de gravedad en G. Determine las reacciones en las bisagras, si la que está en A soporta solamente una reacción horizontal sobre la puerta; mientras que la de B ejerce reacciones horizontal y vertical.



Prob. 5.37

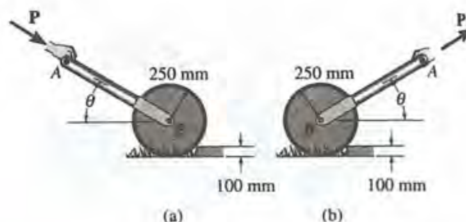
5.38. Una prensa ejerce una fuerza de compresión de 400 N en el bloque de madera en C. Si la prensa se sujeta con dos tornillos flojos B simétricamente situados (de los cuales puede verse uno), determine la fuerza a lo largo del eje de cada perno y la reacción vertical de la mesa sobre la prensa en A.



Prob. 5.38

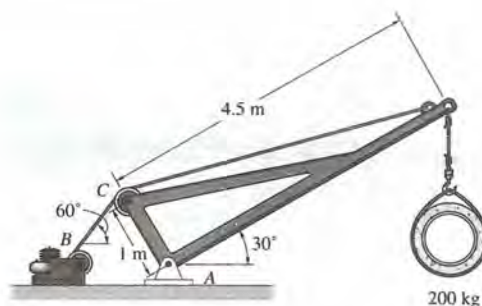
5.39. Un rodillo de 25 kg deberá ser subido al escalón de 100 mm. Compare las magnitudes de las fuerzas **P** requeridas para (a) empujarlo y (b) jalarlo para subirlo al escalón, si en cada caso la fuerza se dirige a $\theta = 30°$ a lo largo del miembro AB, como se muestra.

* **5.40.** Determine la magnitud mínima de la fuerza **P** y su ángulo asociado θ requerida para jalar el rodillo de 25 Hg sobre el escalón de 100 mm.



Probs. 5.39/5.40

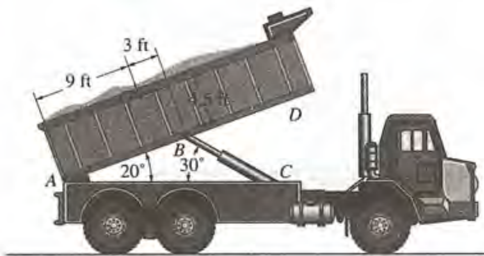
5.41. Calcule la tensión del cable en B requerida para soportar la carga de 200 kg. El cable pasa por la polea sin fricción situada en C. Ignore el tamaño de esta polea y el peso de la pluma.



Prob. 5.41

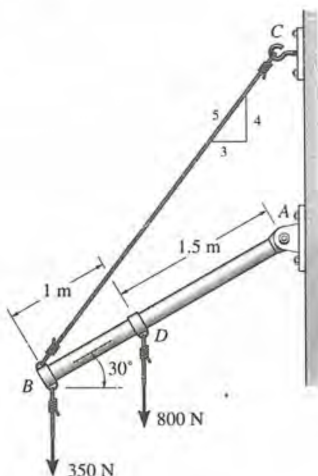
http://librosysolucionarios.net

5.42. La caja del camión de volteo, D, tiene un peso de 5000 lb y centro de gravedad en G. Determine las componentes vertical y horizontal de la reacción en la articulación A y a lo largo del cilindro hidráulico BC (miembro de dos fuerzas).



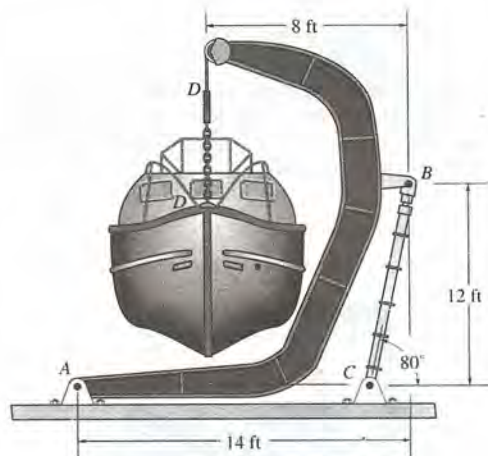
Prob. 5.42

5.43. El aguilón soporta las dos cargas verticales. Ignore el tamaño de los collares en D y en B y el grosor del aguilón, y determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza en la articulación A y la fuerza en el cable CB.



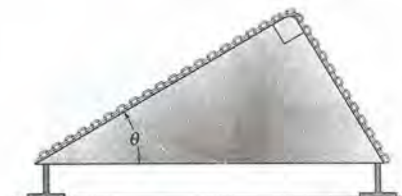
Prob. 5.43

* **5.44**. El pescante sirve para suspender el bote salvavidas en la parte lateral de un barco. Si el bote ejerce una fuerza de 800 lb en el cable en D, determine la fuerza que actúa a lo largo del cilindro hidráulico BC (miembro de dos fuerzas) y las componentes horizontal y vertical de la reacción en la articulación en A.



Prob. 5.44

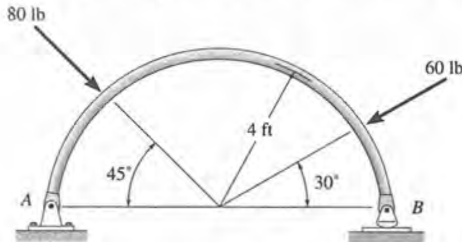
5.45. Una cadena descansa sobre los planos inclinados lisos, que hacen un ángulo recto. Si la cadena tiene peso/longitud de w, demuéstrese que no resbalará.



Prob. 5.45

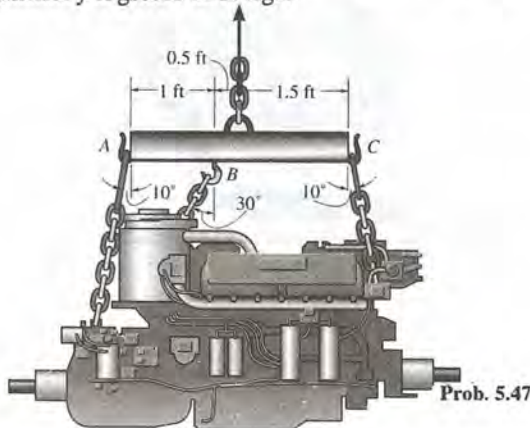
http://librosysolucionarios.net

5.46. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en la articulación A y la reacción en el rodillo B para soportar el arco semicircular.



Prob. 5.46

* **5.47**. Un motor tiene un peso de 850 lb. Determine la fuerza que cada una de las cadenas debe ejercer en los ganchos en A, B, y C. Ignore el tamaño de los ganchos y el grosor de la viga.



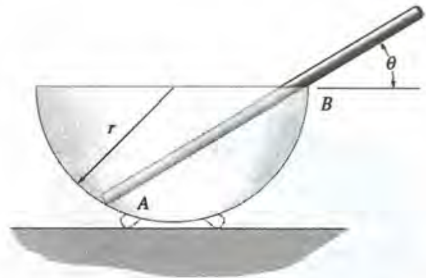
Prob. 5.47

* **5.48**. Un hombre tiene un peso W y se encuentra parado en el centro del tablón. Si los planos en A y B son lisos, determine la tensión en la cuerda en términos de W y θ.



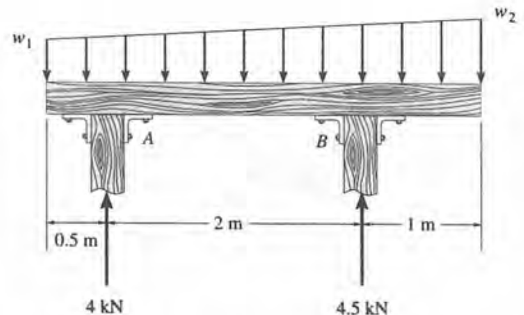
Prob. 5.48

5.49. Una varilla de vidrio uniforme de longitud L se coloca en el tazón hemisférico liso de radio r. Determine el ángulo de inclinación θ para el equilibrio.



Prob. 5.49

5.50. Determine la intensidad w_1 y w_2 de la distribución trapezoidal de cargas si los apoyos en A y en B ejercen fuerzas de 4 kN y 4.5 kN, respectivamente, sobre la viga.

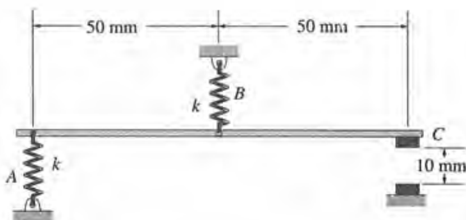


Prob. 5.50

http://librosysolucionarios.net

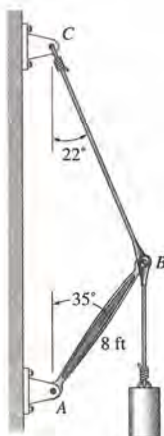
5.51. La tira de metal rígida y de peso insignificante es utilizada como parte de un interruptor electromagnético. Si los resortes en A y en B tienen constante de rigidez k = 5 N/m, y la tira está horizontal originalmente con los resortes inextendidos, determine la fuerza vertical mínima que es necesaria para cerrar la separación en C.

* **5.52**. La tira de metal rígida de peso insignificante se usa como parte de un interruptor electromagnético. Determine la rigidez máxima k de los resortes en A y B, de modo que el contacto en C se cierre cuando la fuerza vertical desarrollada sea de 0.5 N. La tira metálica es horizontal originalmente, como se muestra.



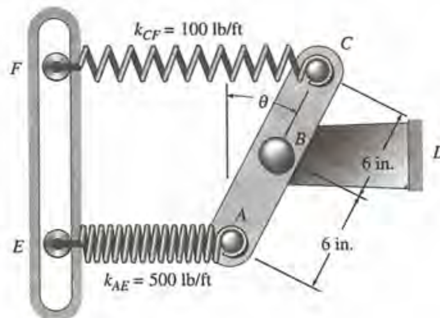
Prob. 5.51/5.52

5.53. Determine la magnitud de la fuerza en la articulación A y en el cable BC requerida para sostener el peso de 500 lb. Debe ignorarse el peso del aguilón AB.



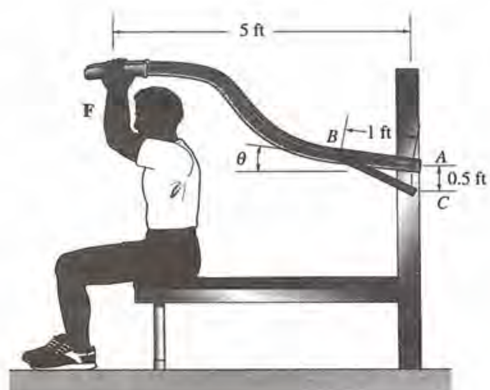
Prob. 5.53

5.54. Determine el ángulo θ en que el eslabón ABC se mantiene en equilibrio si el miembro BD se mueve dos pulgadas a la derecha. Los resortes están sin elongación originalmente cuando $\theta = 0°$. Cada resorte tiene la rigidez que se indica. Los resortes permanecen horizontales porque se sujetan a guías rodantes.



Prob. 5.54

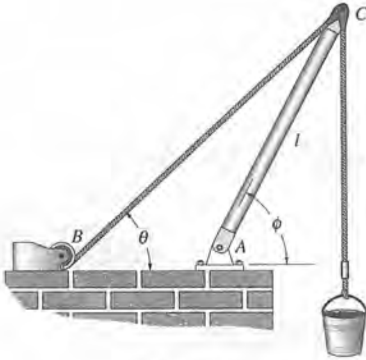
5.55. Una máquina de ejercicio consiste en una barra rígida articulada a la estructura en A. Al empujar la barra hacia arriba estira la banda de hule BC. Si la rigidez de la banda elástica es k = 500 lb/ft, determine la fuerza vertical aplicada **F** necesaria para mantener la barra en la posición $\theta = 30°$. La banda de hule está inextendida cuando $\theta = 0°$.



Prob. 5.55

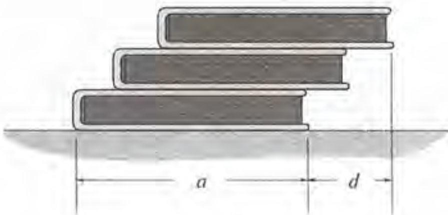
http://librosysolucionarios.net

* **5.56**. Determine la tensión en el cable de soporte BC y las componentes horizontal y vertical de la reacción en la articulación A para sostener el cubo de peso W. Exprese los resultados en términos de W y los ángulos θ y Φ.



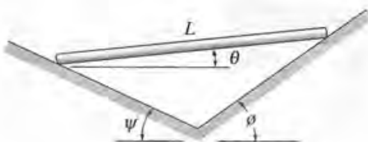
Prob. 5.56

5.57. Tres libros uniformes de peso W y longitud a cada uno están apilados como se muestra. Determine la distancia máxima posible, d, del libro superior hacia fuera del inferior sin que caiga la pila.



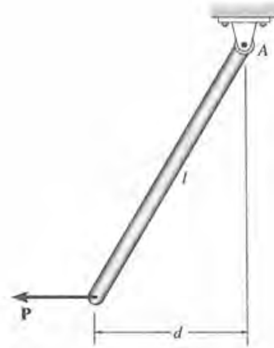
Prob. 5.57

5.58. La varilla uniforme de longitud L y peso W está apoyada en los planos lisos orientados con ángulos ψ y Φ. Determine la posición de la varilla θ para el equilibrio. Se debe ignorar el espesor de la varilla.



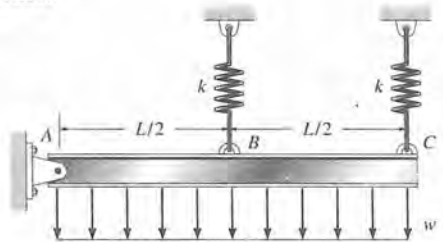
Prob. 5.58

5.59. Una fuerza horizontal **P** se aplica al extremo de la barra uniforme de peso W. Cuando la barra está en equilibrio, la fuerza se desplaza a distancia d, como se muestra. Determine la magnitud de la reacción en la articulación A en términos de W, d, y l.



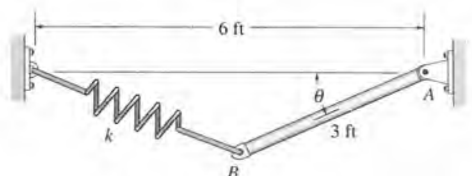
Prob. 5.59

* **5.60**. La viga rígida de peso insignificante es soportada horizontalmente por dos resortes y un pasador. Si los resortes están inextendidos, al retirar la carga, determine la fuerza en cada resorte cuando se aplica la carga distribuida. Calcule también la deflexión vertical del extremo C. Suponga que la rigidez de los resortes es tan grande que sólo ocurren pequeñas deflexiones.



Prob. 5.60

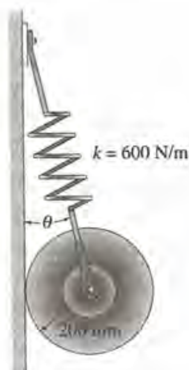
5.61. La varilla uniforme AB tiene un peso de 15 lb y el resorte está inextendido cuando $\theta = 0°$. Si $\theta = 30°$, determine la rigidez k del resorte.



Prob. 5.61

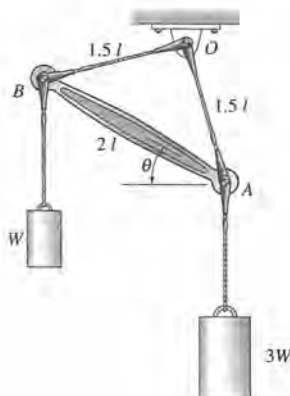
http://librosysolucionarios.net

*5.62. Un disco tiene una masa de 10 kg. Si está suspendido de un resorte de longitud inextendida de 400 mm, determine el ángulo θ para equilibrio.



Prob. 5.62

5.63. La varilla ligera de longitud $2l$ se encuentra suspendida de un punto fijo O utilizando dos cuerdas OA y OB cada una con longitud de $1.5l$. Si se suspenden pesos de $3W$ y W de los extremos A y B, respectivamente, determine el ángulo de inclinación θ.



Prob. 5.63

Equilibrio en tres dimensiones

5.5 Diagramas de cuerpo libre

El primer paso en la resolución de los problemas de equilibrio en tres dimensiones consiste, como para el caso de dos dimensiones, en trazar un diagrama de cuerpo libre del cuerpo (o del conjunto de cuerpos considerado como sistema). Antes de demostrar esto, sin embargo, es necesario estudiar los tipos de reacciones que pueden darse en los apoyos.

Reacciones de soporte. Las fuerzas y momentos de par reactivos que actúan en los diversos apoyos y conexiones, cuando se consideran los miembros en tres dimensiones, pueden verse en la lista de la tabla 5.2. Es importante reconocer los símbolos que se usan para representar cada uno de los apoyos, así como entender claramente cómo se desarrollan las fuerzas y los pares en cada apoyo. Como en el caso bidimensional, *la fuerza se desarrolla en un apoyo, que restringe la traslación del miembro conectado, mientras que el par se desarrolla cuando se impide la rotación del miembro conectado*. Por ejemplo, en la tabla 5.2 la articulación de rótula (4) impide cualquier traslación del miembro conectado; por consiguiente, debe actuar una fuerza sobre el miembro en el punto de conexión. Esta fuerza posee tres componentes que tienen magnitudes desconocidas, F_x, F_y, y F_z. Siempre que se conozcan estas componentes, se puede obtener la magnitud de la fuer-

http://librosysolucionarios.net

za, $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, y la orientación de la fuerza definida por los ángulos directores coordenados α, β, γ, ecuación 2.7*.Como el miembro conectado puede girar libremente alrededor de *cualquier* eje, en este tipo de apoyo no se opone resistencia a ningún momento de par.

Debe observarse que los apoyos de chumacera individual (5) y (7), la articulación individual (8) y la bisagra individual (9) se muestra que soportan componentes de fuerza y de momento de par. Sin embargo, si estos apoyos se utilizan conjuntamente con otras chumaceras, pasadores o bisagras para mantener el cuerpo en equilibrio, y a condición de que el cuerpo físico mantenga su *rigidez* bajo la carga y de que los apoyos estén *debidamente alineados* al conectarlos al cuerpo, entonces las *reacciones de fuerza* en estos apoyos pueden *por sí solas* ser adecuadas para soportar el cuerpo. Dicho de otra forma, los momentos de un par se hacen redundantes y pueden ser omitidos en el diagrama de cuerpo libre. La razón de esto quedará clara después de estudiar los ejemplos que siguen; pero en esencia, no se desarrollarán los momentos de un par en estos apoyos, ya que la rotación del cuerpo es impedida por las reacciones desarrolladas en los otros apoyos y no por los momentos de par de apoyo.

Tabla 5.2 Apoyos para cuerpos rígidos sujetos a sistemas de fuerzas en tres dimensiones.

Tipos de conexiones	*Reacción*	*Número de incógnitas*
(1) cable	F	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa hacia afuera del miembro en la dirección del cable.
(2) apoyo de superficie lisa	F	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(3) rodillo	F	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.

* Las tres incógnitas también pueden quedar representadas por la magnitud F desconocida de la fuerza, y dos ángulos directores coordenados. El tercer ángulo director puede obtenerse usando la identidad $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, ecuación 2.10.

http://librosysolucionarios.net

Tabla 5.2 (continuación)

Reacción	*Número de incógnitas*	*Tipos de conexiones*
(4) articulación de rótula	F_z, F_y, F_x	Tres incógnitas. Las reacciones son tres componentes rectangulares de una fuerza.
(5) chumacera lisa individual	M_z, F_z, M_x, F_x	Cuatro incógnitas. Las reacciones son dos fuerzas y dos componentes de momento de un par que actúan perpendicularmente a la flecha.
(6) chumacera individual de flecha cuadrada	M_z, F_z, M_y, M_x, F_x	Cinco incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza y tres componentes de momento de un par.
(7) chumacera individual de empuje	M_z, F_y, F_z, M_x, F_x	Cinco incógnitas. Las reacciones son tres componentes de fuerza y dos componentes de momento de un par.
(8) articulación lisa individual	M_z, F_z, F_y, M_y, F_x	Cinco incógnitas. Las reacciones son tres componentes de fuerza y dos componentes de momento de un par.
(9) bisagra individual	M_z, F_z, F_y, F_x, M_x	Cinco incógnitas. Las reacciones son tres componentes de fuerza y dos componentes de momento de un par
(10) soporte fijo	M_z, F_z, F_x, F_y, M_y, M_x	Seis incógnitas. Las reacciones son tres componentes de fuerza y tres componentes de momento de un par.

http://librosysolucionarios.net

Diagramas de cuerpo libre. El procedimiento general para establecer el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido fue indicado en la sección 5.2. Requiere, en esencia, que se "aísle" el cuerpo trazando el contorno de su forma. Después, se *etiquetan* con cuidado *todas* las fuerzas y momentos de par con referencia a un sistema establecido de coordenadas *x*, *y*, *z*. En términos generales, *las componentes de reacción* de *magnitud desconocida*, como se muestra en el diagrama, actúan en el *sentido positivo*. Siendo así, los escalares negativos que resulten indicarán que las componentes correspondientes actúan en sentido negativo de los ejes de coordenadas.

Ejemplo 5.14

La figura 5.22 muestra varios ejemplos de objetos con diagramas de cuerpo libre asociados. Se establecen ejes de coordenadas *x*, *y*, *z*, en cada caso, y las componentes de las fuerzas de reacción desconocidas se ponen con sentido positivo. Se desatiende el peso de los objetos.

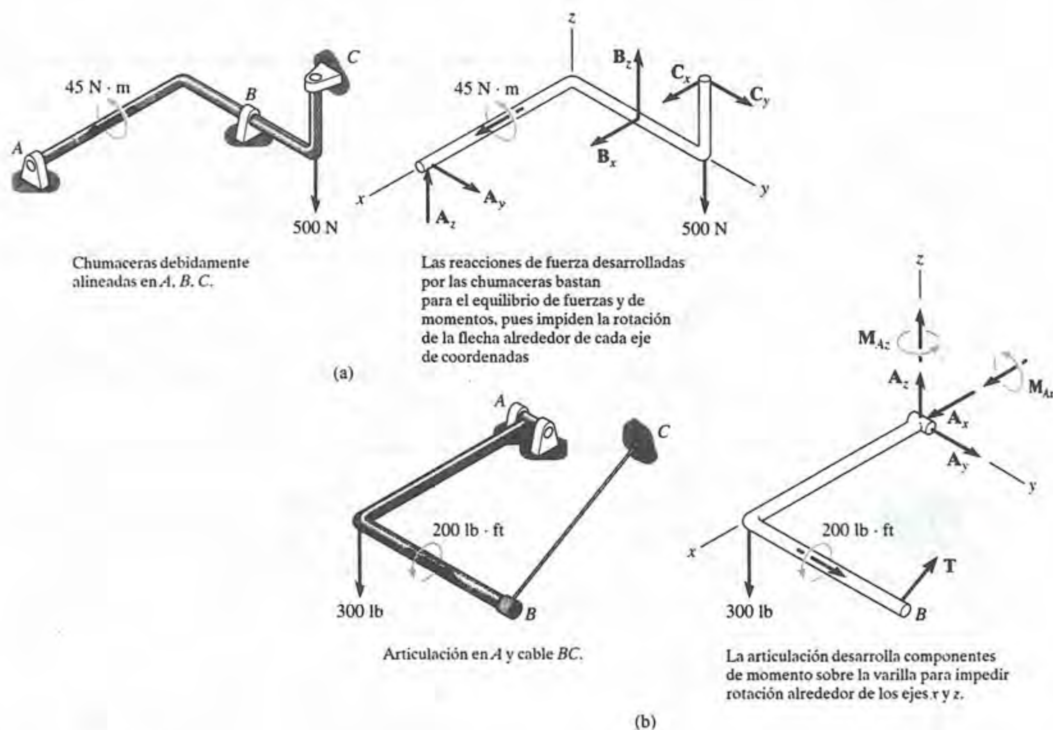
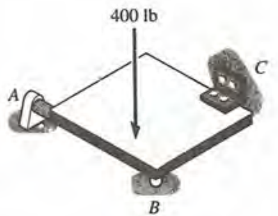
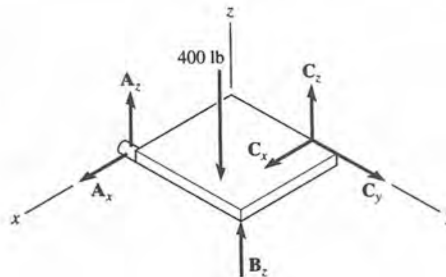


Fig. 5.22

http://librosysolucionarios.net

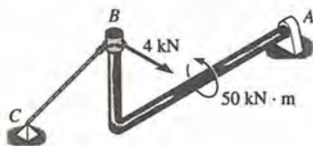


Chumacera en *A* y bisagra en *C* debidamente alineadas. Rodillo en *B*.

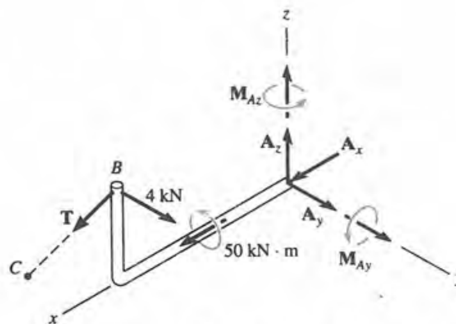


La chumacera y la bisagra sólo desarrollan reacciones de fuerza sobre la palanca para impedir la rotación respecto a cada eje de coordenadas.

(c)



Chumacera de empuje en *A* y cable *BC*



La chumacera desarrolla componentes de momento sobre la varilla para impedir la rotación respecto a los ejes *y* y *z*.

(d)

http://librosysolucionarios.net

5.6 Ecuaciones de equilibrio

Como se dijo en la sección 5.1, las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido sujeto a un sistema de fuerzas de tres dimensiones requieren que tanto la fuerza *resultante* como el momento de un par *resultante* que actúan en el cuerpo sean iguales a *cero*.

Ecuaciones vectoriales de equilibrio. Las dos condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido pueden expresarse matemáticamente en forma vectorial como

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \qquad (5.5)$$

donde $\Sigma \mathbf{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan en el cuerpo y $\Sigma \mathbf{M}_O$ es la suma de los momentos de pares y momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier punto O situado en el cuerpo o fuera de él.

Ecuaciones escalares de equilibrio. Si todas las fuerzas externas aplicadas y los momentos de un par son expresados en forma vectorial cartesiana y sustituidos en las ecuaciones. 5.5, tenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma M_x \mathbf{i} + \Sigma M_y \mathbf{j} + \Sigma M_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Ya que las componentes correspondientes a las direcciones de **i**, **j**, **k** son independientes entre sí, las ecuaciones de arriba se satisfacen a condición de que

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad (5.6a)$$
$$\Sigma F_z = 0$$

y

$$\Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \qquad (5.6b)$$
$$\Sigma M_z = 0$$

Las *seis ecuaciones de equilibrio escalares* pueden usarse para resolver y determinar a lo más seis incógnitas mostradas en el diagrama de cuerpo libre. Las ecuaciones 5.6*a* expresan el hecho de que la suma de las componentes de las fuerzas externas que actúan en las tres direcciones coordenadas deben ser cero, y las ecuacione. 5.6*b* requieren que la suma de componentes de momentos en las tres direcciones de coordenadas sean iguales a cero.

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento proporciona un método para resolver problemas de equilibrio en tres dimensiones.

Diagrama de cuerpo libre. Construya el diagrama de cuerpo libre para el cuerpo. Es importante que se incluyan todas las fuerzas y momentos de pares que actúan sobre el cuerpo. Estas interacciones son causadas comúnmente por las cargas aplicadas exteriormente, las fuerzas de contacto que ejercen los cuerpos adyacentes, las reacciones de apoyo y el peso del cuerpo, si es de consideración en comparación con las magnitudes de las otras fuerzas aplicadas. Establezca el origen de las coordenadas x, y, z en un punto conveniente, y oriente los ejes de coordenadas de modo que sean paralelos al mayor número posible de fuerzas externas y momentos. Identifique las incógnitas y asigne, en general, sentido positivo a las componentes desconocidas, si no es posible determinar el sentido. También se incluyen en el diagrama las dimensiones del cuerpo, pues son necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

Ecuaciones de equilibrio. Aplique las ecuaciones de equilibrio. En muchos casos, los problemas pueden resolverse por *aplicación directa* de las seis ecuaciones escalares $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$, ecuaciones 5.6; sin embargo, si las fuerzas componentes o los brazos de palanca parecen difíciles de determinar, se recomienda que la solución se obtenga usando ecuaciones vectoriales: $\Sigma \mathbf{F} = 0$, $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$, ecuaciones 5.5. En cualquier caso, *no* es *necesario* que el sistema de ejes escogido para la suma de fuerzas *coincida* con el sistema de ejes escogidos para la suma de momentos. En vez de ello, se recomienda *escoger la dirección de un eje de momentos de tal manera que corte la línea de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible*. Los momentos de las fuerzas que pasan a través de puntos situados sobre este eje o las fuerzas que son paralelas al eje serán cero. Además, *cualquier conjunto de tres ejes no ortogonales* puede escogerse tanto para suma de fuerzas como para suma de momentos. Mediante la elección adecuada de los ejes, puede ser posible resolver y determinar directamente una cantidad desconocida o, por lo menos, reducir la necesidad de resolver un gran número de ecuaciones simultáneas en las incógnitas.

5.7 Restricciones para un cuerpo rígido

Para asegurar el equilibrio de un cuerpo rígido, no sólo es necesario que se satisfagan las ecuaciones de equilibrio, sino también que el cuerpo esté adecuadamente sujeto o restringido por sus

http://librosysolucionarios.net

soportes. Algunos cuerpos pueden tener más soportes que los necesarios para el equilibrio, en tanto que otros pueden no tener los suficientes o estar dispuestos en una forma que puede causar la destrucción del cuerpo. A continuación se tratarán estos aspectos del equilibrio de un cuerpo rígido.

Restricciones redundantes. Cuando un cuerpo tiene apoyos redundantes, es decir, más apoyos que los necesarios para mantenerlo en equilibrio, se convierte en estáticamente indeterminado. *Estáticamente indeterminado* significa que habrá más cargas desconocidas sobre el cuerpo que ecuaciones de equilibrio disponibles para su solución. Por ejemplo, el problema de dos dimensiones, figura 5.23*a*, y el de tres dimensiones, figura 5.23*b*, que se exhiben con sus diagramas de cuerpo libre, ambos son estáticamente indeterminados debido a reacciones de soporte adicionales. En el caso de dos dimensiones, existen cinco incógnitas, es decir, M_A, A_y, A_x, B_y, y C_y, para las cuales solamente pueden escribirse tres ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, y $\Sigma M_O = 0$, ecuaciones 5.2). El problema de tres dimensiones tiene ocho incógnitas para las que sólo pueden escribirse seis ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones 5.6. Las ecuaciones adicionales requeridas para resolver problemas indeterminados del tipo que se muestra en la figura 5.23 suelen obtenerse de las condiciones de deformación en los puntos de apoyo. Estas ecuaciones incluyen las propiedades físicas del cuerpo que se estudian en temas que tratan de mecánica de las deformaciones, como la "mecánica de materiales".*

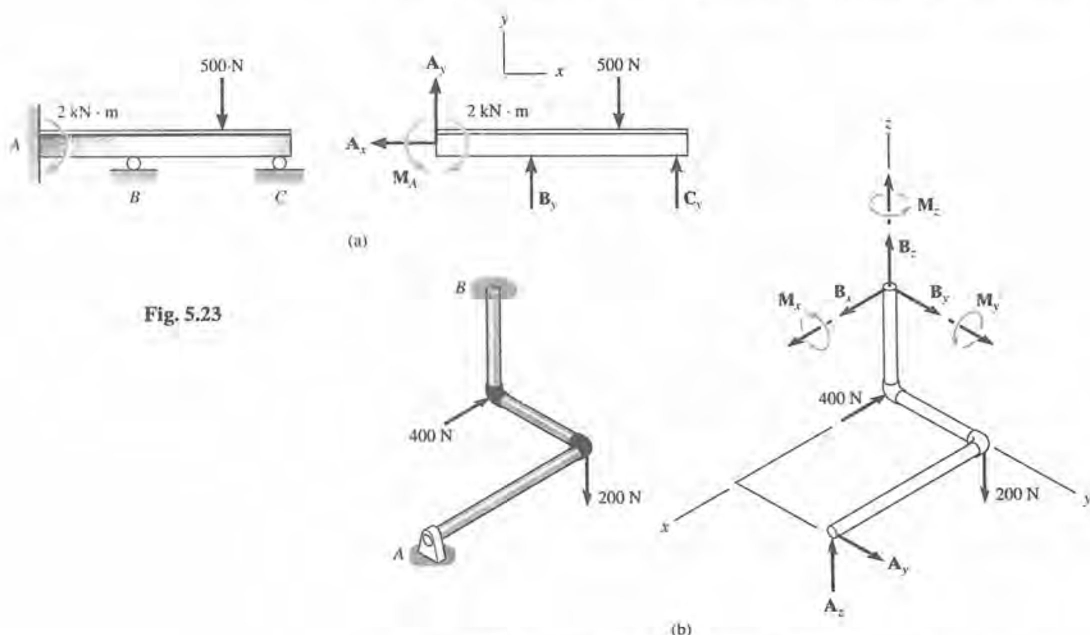


Fig. 5.23

*Véase R. C. Hibbeler, Mecánica de materiales (CECSA, 1993).

http://librosysolucionarios.net

Restricciones impropias. En algunos casos, puede haber tantas fuerzas desconocidas sobre el cuerpo como ecuaciones de equilibrio; sin embargo, puede desarróllarse *inestabilidad* del cuerpo debido a restricciones inapropiadas por los apoyos. En el caso de problemas en tres dimensiones, el cuerpo está impropiamente restringido si las reacciones de apoyo *intersecan todas un mismo eje*. Para problemas de dos dimensiones, este eje es *perpendicular* al plano de las fuerzas y, por tanto, aparece como un punto. Entonces, cuando todas las fuerzas restrictivas *concurren* en este punto, el cuerpo está impropiamente restringido. Ejemplos de ambos casos se dan en la figura 5.24*a*. A partir de los diagramas de cuerpo libre se ve que la suma de los momentos respecto al eje x, figura 5.24*a*, o el punto O, figura 5.24*b*, no serán iguales a cero; de modo que habrá rotación respecto al eje x o al punto O.* En ambos casos, además, se hace *imposible* resolver *completamente* y obtener todas las incógnitas, ya que es posible escribir una ecuación de momentos *que no* contenga ninguna de las reacciones de apoyo desconocidas y, como resultado, esto viene a reducir el número de ecuaciones de equilibrio disponibles en uno.

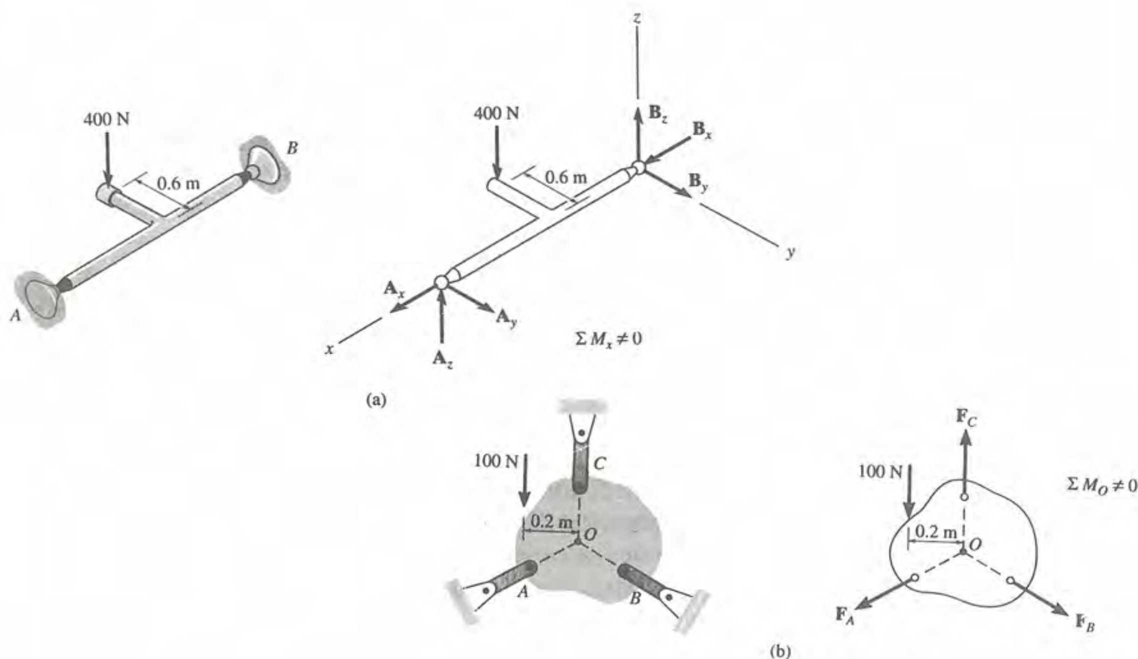
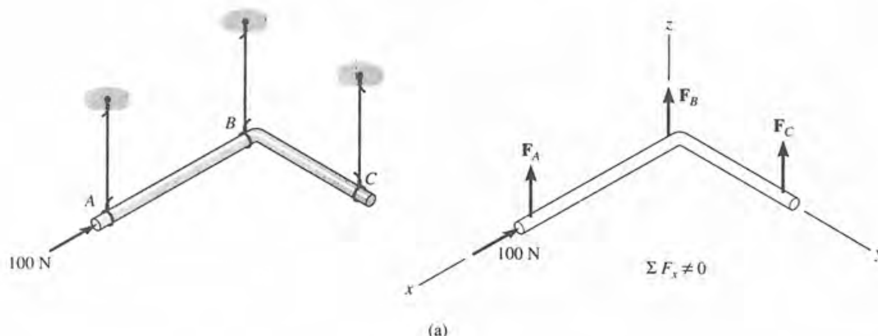


Fig. 5.24

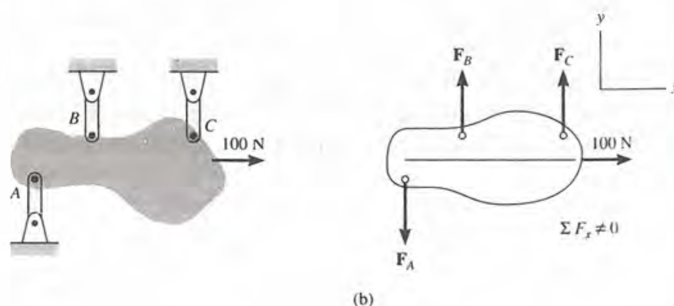
* Para el problema de tres dimensiones, $\Sigma M_x = (400 \text{ N})(0.6 \text{ m}) \neq 0$, y para el problema de dos dimensiones, $\Sigma M_O = (100 \text{ N})(0.2 \text{ m}) \neq 0$.

http://librosysolucionarios.net

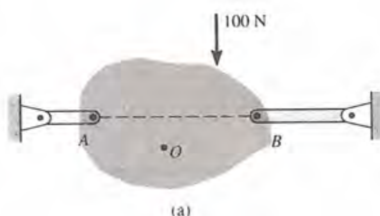


(a)

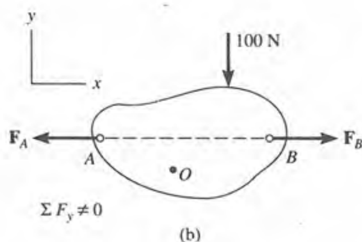
Fig. 5.25



(b)



(a)



(b)

Fig. 5.26

Otra forma en que las restricciones impropias conducen a la inestabilidad se da cuando las *fuerzas de reacción* son todas *paralelas*. Las figuras 5.25*a* y 5.25*b* son ejemplos de ello en dos y en tres dimensiones. En ambos casos, la suma de fuerzas a lo largo del eje *x* no da cero.

En ciertos casos, un cuerpo puede tener *menos* fuerzas de reacción que ecuaciones de equilibrio por satisfacer. El cuerpo se convierte así en cuerpo *parcialmente restringido*. Por ejemplo, considérese el cuerpo de la figura 5.26*a* con su correspondiente diagrama de cuerpo libre en la figura 5.26*b*. Si *O* es un punto no localizado en la línea *AB*, las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma M_O = 0$ se satisfarán mediante una elección apropiada de las reacciones $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$. La ecuación $\Sigma F_y = 0$, sin embargo, no será satisfecha para las condiciones de carga y, por tanto, no se mantendrá el equilibrio.

La restricción propia requiere, por tanto, que (1) las líneas de acción de las fuerzas de reacción no corten puntos de un determinado eje, (2) las fuerzas de reacción no deben ser paralelas entre sí. Cuando el número de fuerzas de reacción necesarias para restringir propiamente el cuerpo en cuestión es un *mínimo*, el problema estará estáticamente determinado y, por tanto, las ecuaciones de equilibrio pueden usarse para determinar *todas* las fuerzas de reacción.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.15

La placa homogénea que se ve en la figura 5.27*a* tiene una masa de 100 kg y está sujeta a una fuerza y momento de un par a lo largo del borde. Si está soportada en el plano horizontal por medio de un rodillo en *A*, por una articulación de rótula en *B* y una cuerda en *C*, determine las componentes de reacción en los apoyos.

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS ESCALAR*)

Diagrama de cuerpo libre. Hay cinco reacciones desconocidas que actúan sobre la placa, como se ve en la figura 5.27*b*. Cada una de estas reacciones se supone que actúa en una dirección de coordenadas positiva.

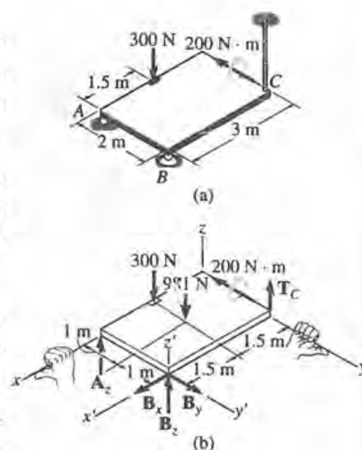


Fig. 5.27

Ecuaciones de equilibrio. Ya que la geometría en tres dimensiones en este caso es un tanto simple, con análisis escalar obtendremos una solución directa del problema. Una suma de fuerzas a lo largo de cada eje dará

$\Sigma F_x = 0;\qquad B_x = 0$ *Resp.*

$\Sigma F_y = 0;\qquad B_y = 0$ *Resp.*

$\Sigma F_z = 0;\qquad A_z + B_z + T_C - 300\text{ N} - 981\text{ N} = 0$ (1)

Recuérdese que el momento de una fuerza alrededor de un eje es igual al producto de la magnitud de la fuerza y la distancia perpendicular (brazo de palanca) desde la línea de acción de la fuerza hasta el eje *x*. El sentido del momento está determinado por la regla de la mano derecha. Por tanto, si se suman los momentos de las fuerzas del diagrama de cuerpo libre con los momentos positivos que actúen por los ejes *x*, *y* positivos, tenemos

$\Sigma M_x = 0;\qquad T_C(2\text{ m}) - 981\text{ N}(1\text{ m}) + B_z(2\text{ m}) = 0$ (2)

$\Sigma M_y = 0;$

$300\text{ N}(1.5\text{ m}) + 981\text{ N}(1.5\text{ m}) - B_z(3\text{ m}) - A_z(3\text{ m}) - 200\text{ N}\cdot\text{m} = 0$ (3)

Las componentes de la fuerza en *B* pueden eliminarse si se utilizan los ejes *x'*, *y'*, *z'* Obtenemos

$\Sigma M_{x'} = 0;\qquad 981\text{ N}(1\text{ m}) + 300\text{ N}(2\text{ m}) - A_z(2\text{ m}) = 0$ (4)

$\Sigma M_{y'} = 0;$

$-300\text{ N}(1.5\text{ m}) - 981\text{ N}(1.5\text{ m}) - 200\text{ N}\cdot\text{m} + T_C(3\text{ m}) = 0$ (5)

Al resolver las ecuaciones 1 a 3 o las más convenientes ecuaciones 1, 4, y 5 se tiene

$A_z = 790\text{ N}\qquad B_z = -217\text{ N}\qquad T_C = 707\text{ N}$ *Resp.*

El signo negativo indica que $\mathbf{B}_z$ actúa hacia bajo.

Debe observarse que la solución de este problema no requiere usar una suma de momentos alrededor del eje *z*. La placa está parcialmente restringida, dado que los apoyos no impedirán que gire alrededor del eje *z* si se le aplica una fuerza en el plano *x*—*y*.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.16

El malacate indicado en la figura 5.28*a* está apoyado en dos chumaceras lisas *A* y *B*, que están debidamente alineadas con la flecha. Determine la magnitud de la fuerza vertical **P** que debe aplicarse a la manija, para mantener en equilibrio el cubo de 100 kg. Calcule también las reacciones en las chumaceras.

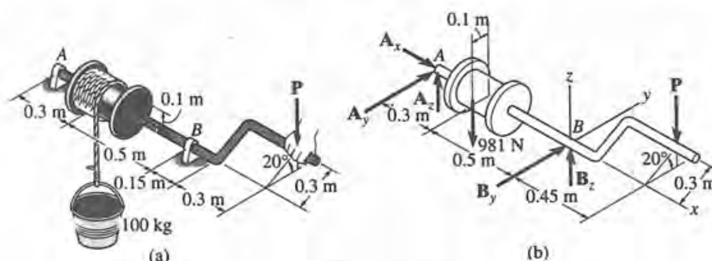


Fig. 5.28

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS ESCALAR*)

Diagrama de cuerpo libre. Como las chumaceras en *A* y *B* están bien alineadas, solamente aparecen fuerzas de reacción en estos apoyos, figura 5.28*b*. ¿Por qué no hay momentos de reacción?

Ecuaciones de equilibrio. Si se suman momentos con respecto al eje *x*, se obtiene como resultado una solución directa para **P**. ¿Por qué? Para esta suma escalar de momentos, es necesario calcular el momento de cada fuerza como el producto de la magnitud de la fuerza por la *distancia perpendicular* desde el eje *x* a la línea de acción de la fuerza. Si se aplica la regla de la mano derecha y se supone que los momentos positivos actúan en la dirección +**i**, tenemos

$\Sigma M_x = 0;\quad 981\text{ N}(0.1\text{ m}) - P(0.3\cos 20^\circ\text{ m}) = 0$

$P = 348.0\text{ N}$ ***Resp.***

Al usar este resultado y sumar momentos con respecto a los ejes *y* y *z*, se llega a

$\Sigma M_y = 0;$

$-981\text{ N}(0.5\text{ m}) + A_z(0.8\text{ m}) + (348.0\text{ N})(0.45\text{ m}) = 0$

$A_z = 417.4\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma M_z = 0;\quad -A_y(0.8\text{ m}) = 0 \quad A_y = 0$ ***Resp.***

Las reacciones en *B* se obtienen mediante una suma de fuerzas, usando los resultados calculados anteriormente:

$\Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_y = 0;\quad 0 + B_y = 0 \quad B_y = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_z = 0;\quad 417.4 - 981 + B_z - 348.0 = 0 \quad B_z = 911.6\text{ N}$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.17

Determine las tensiones en los cables BC y BD y las reacciones en la articulación de rótula A para el mástil indicado en la figura 5.29*a*.

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

Diagrama de cuerpo libre. Hay cinco magnitudes de fuerzas desconocidas indicadas en el diagrama de cuerpo libre, figura 5.29*b*.

Ecuaciones de equilibrio. Si se expresa cada fuerza en forma vectorial cartesiana, tenemos

$$\mathbf{F} = \{-1000\mathbf{j}\}\ \text{N}$$
$$\mathbf{F}_A = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_C = 0.707T_C\mathbf{i} - 0.707T_C\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_D = T_D\left(\frac{\mathbf{r}_{BD}}{r_{BD}}\right) = -0.333T_D\mathbf{i} + 0.667T_D\mathbf{j} - 0.667T_D\mathbf{k}$$

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas nos da

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F} + \mathbf{F}_A + \mathbf{T}_C + \mathbf{T}_D = \mathbf{0}$$
$$(A_x + 0.707T_C - 0.333T_D)\mathbf{i} + (-1000 + A_y + 0.667T_D)\mathbf{j} + (A_z - 0.707T_C - 0.667T_D)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma F_x = 0; \qquad A_x + 0.707T_C - 0.333T_D = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad A_y + 0.667T_D - 1000 = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad A_z - 0.707T_C - 0.667T_D = 0 \qquad (3)$$

Al sumar momentos alrededor al punto A, tenemos

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{r}_B \times (\mathbf{F} + \mathbf{T}_C + \mathbf{T}_D) = 0$$
$$6\mathbf{k} \times (-1000\mathbf{j} + 0.707T_C\mathbf{i} - 0.707T_C\mathbf{k} - 0.333T_D\mathbf{i} + 0.667T_D\mathbf{j} - 0.667T_D\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

Si se evalúa el producto vectorial y se combinan términos da por resultado

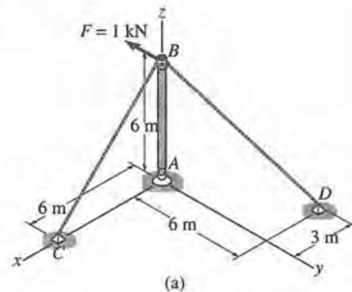
$$(-4T_D + 6000)\mathbf{i} + (4.24T_C - 2T_D)\mathbf{j} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma M_x = 0; \qquad -4T_D + 6000 = 0 \qquad (4)$$
$$\Sigma M_y = 0; \qquad 4.24T_C = 2T_D = 0 \qquad (5)$$

La ecuación de momentos alrededor del eje z, $\Sigma M_z = 0$, se satisface automáticamente. ¿Por qué? al resolver las ecuaciones 1 a 5 se llega a

$T_C = 707$ N $\qquad T_D = 1500$ N $\qquad$ ***Resp.***

$A_x = 0$ N $\qquad A_y = 0$ N $\qquad A_Z = 1500$ N ***Resp.***

Como el mástil es un miembro de dos fuerzas, nótese que los valores $A_x = A_y = 0$ podían haberse determinado por *inspección*.



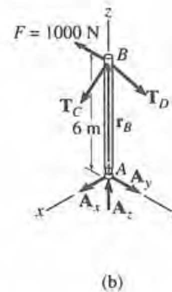
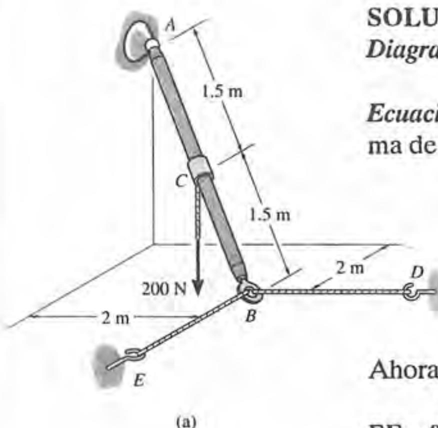


Fig. 5.29

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.18

La barra AB que se ve en la figura 5.30*a* está sujeta a la fuerza de 200 N. Determine las reacciones en la articulación de rótula en A y la tensión en los cables BD y BE.



(a)

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

Diagrama de cuerpo libre. figura 5.30*b*.

Ecuaciones de equilibrio. Si se expresa cada fuerza del diagrama de cuerpo libre en forma vectorial cartesiana, tenemos

$$\mathbf{F}_A = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_E = T_E\mathbf{i}$$
$$\mathbf{T}_D = T_D\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} = \{-200\mathbf{k}\} \text{ N}$$

Ahora, al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas, se llega a

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{F}_A + \mathbf{T}_E + \mathbf{T}_D + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$(A_x + T_E)\mathbf{i} + (A_y + T_D)\mathbf{j} + (A_z - 200)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma F_x = 0; \qquad A_x + T_E = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad A_y + T_D = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad A_z - 200 = 0 \qquad (3)$$

Al sumar momentos alrededor del punto A se tiene

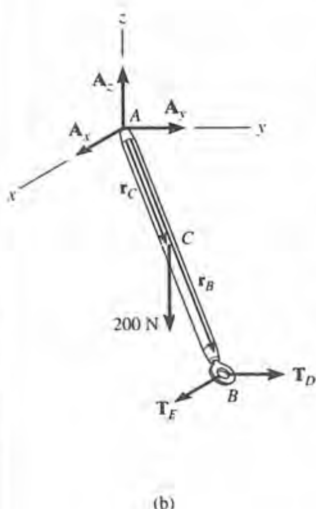
$$\Sigma\mathbf{M}_A = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (\mathbf{T}_E + \mathbf{T}_D) = \mathbf{0}$$

Dado que $\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}\mathbf{r}_B$, entonces

$$(1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}) \times (-200\mathbf{k}) + (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (T_E\mathbf{i} + 2T_D\mathbf{j}) = \mathbf{0}$$

Si se desarrollan y rearreglan términos

$$(T_D - 200)\mathbf{i} + (-T_E + 200)\mathbf{j} + (2T_D - 2T_E)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma M_x = 0; \qquad T_D - 200 = 0 \qquad (4)$$
$$\Sigma M_y = 0; \qquad -T_E + 200 = 0 \qquad (5)$$
$$\Sigma M_z = 0; \qquad 2T_D - 2T_E = 0 \qquad (6)$$



(b)

Fig. 5.30

Al resolver las ecuaciones 1 a 6, obtenemos

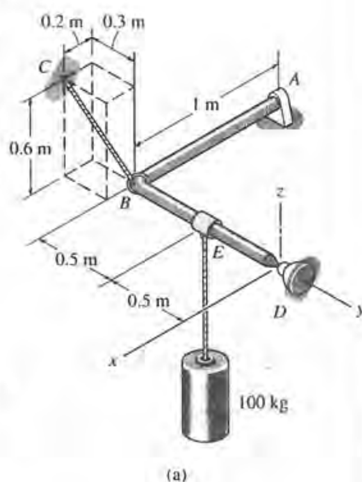
$$A_x = A_y = -200 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$A_z = T_E = T_D = 200 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ tienen sentido opuesto al que se ve en el diagrama de cuerpo libre, figura 5.30*b*.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 5.19

La barra doblada indicada en la figura 5.31*a* está apoyada en *A* en una chumacera lisa, en *D* en una articulación de rótula y en *B* por medio de un cable *BC*. Usando sólo *una ecuación de equilibrio*, obténgase una solución directa para la tensión en el cable *BC*. La chumacera lisa es capaz de ejercer fuerzas componentes sólo en las direcciones *z* y *y*, ya que está alineada debidamente sobre la flecha.



(a)

SOLUCIÓN (*ANÁLISIS VECTORIAL*)

Diagrama de cuerpo libre. Como se indica en la figura 5.31*b*, hay seis incógnitas: las tres fuerzas componentes en la articulación de rótula, dos en la chumacera lisa y una fuerza de tensión en el cable.

Ecuaciones de equilibrio. La tensión en el cable $\mathbf{T}_B$ puede obtenerse *directamente* sumando momentos con respecto a un eje que pasa por los puntos *A* y *D*. ¿Por qué? La dirección del eje se define mediante el vector unitario **u**, donde

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}_{DA}}{r_{DA}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$
$$= -0.707\mathbf{i} - 0.707\mathbf{j}$$

Por tanto, la suma de los momentos con respecto a este eje es cero, con tal de que

$$\Sigma M_{DA} = \mathbf{u} \cdot \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

Aquí **r** representa un vector de posición trazado desde *cualquier punto* sobre el eje *DA* hasta cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza **F** (véase la ecuación 4.11). Por consiguiente, con referencia a la figura 5.31*b*, podemos escribir

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_B \times \mathbf{T}_B + \mathbf{r}_E \times \mathbf{W}) = \mathbf{0}$$
$$(-0.707\mathbf{i} - 0.707\mathbf{j}) \cdot [(-1\mathbf{j}) \times (\tfrac{0.2}{0.7}T_B\mathbf{i} - \tfrac{0.3}{0.7}T_B\mathbf{j} + \tfrac{0.6}{0.7}T_B\mathbf{k})$$
$$+ (-0.5\mathbf{j}) \times (-981\mathbf{k})] = \mathbf{0}$$
$$(-707\mathbf{i} - 0.707\mathbf{j}) \cdot [(-0.857T_B + 490.5)\mathbf{i} + 0.286T_B\mathbf{k}] = \mathbf{0}$$
$$-0.707(-0.857T_B + 490.5) + 0 + 0 = 0$$
$$T_B = \frac{490.5}{0.857} = 572 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

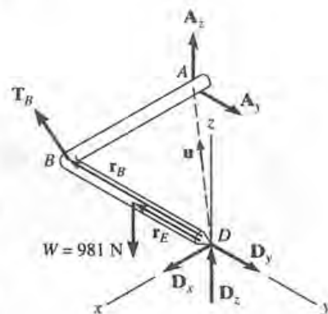


Fig. 5.31

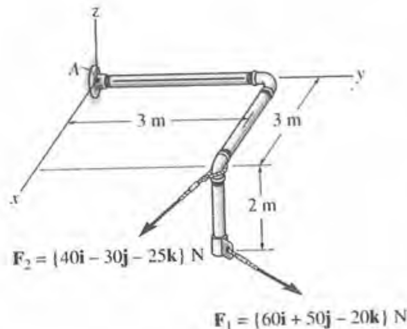
Debe observarse la ventaja de usar vectores cartesianos para esta solución. Obviamente, sería muy tedioso determinar las distancias perpendiculares desde el eje *DA* hasta la línea de acción de $\mathbf{T}_B$ para los métodos escalares.

Nota: En el ejemplo 5.17, es posible una solución directa para A_z sumando momentos respecto a un eje que pasa por los soportes en *C* y *D*, figura 5.29*a*. Si se hace esto, solamente el momento de **F** y de $\mathbf{A}_z$ será considerado. Vuélvase a ese ejemplo y trátese de aplicar la técnica para determinar el resultado $\mathbf{A}_z = 1500$ N.

http://librosysolucionarios.net

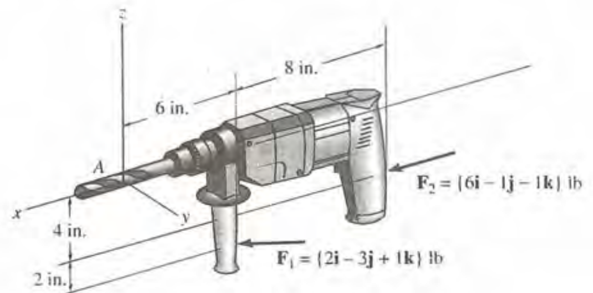
PROBLEMAS

*** 5.64.** Determine las componentes *x*, *y*, *z*, de la reacción en la pared fija *A*.



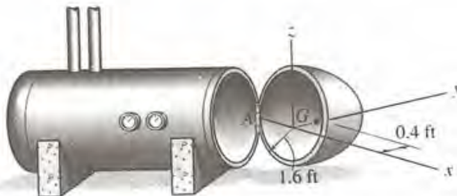
Prob. 5.64

5.66. Un taladro de potencia está sometido a las fuerzas que actúan en los soportes. Determine las componentes *x*, *y*, *z* de fuerza de reacción y las componentes *y*, *z* del momento de reacción que actúa en la broca en *A*.



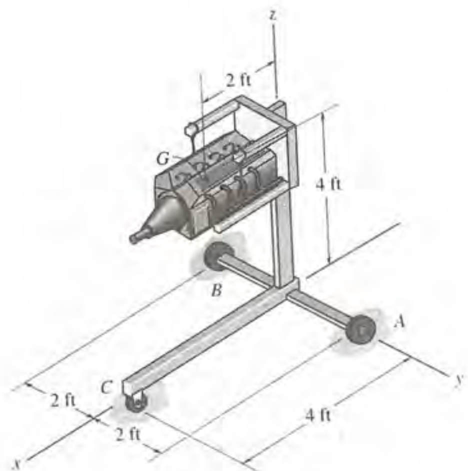
Prob. 5.66

5.65. La puerta no homogénea de un gran recipiente de presión tiene un peso de 125 lb y centro de gravedad en *G*. Determine las magnitudes de la fuerza resultante y momento de par resultante desarrollados en la bisagra *A*, requeridos para soportar la puerta en cualquier posición abierta.



Prob. 5.65

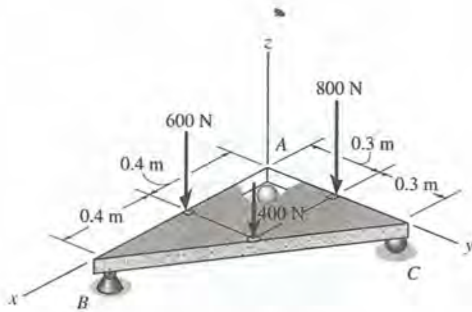
5.67. Determine la reacción del suelo en cada rueda del pedestal de la máquina. La máquina pesa 750 lb y tiene centro de gravedad en *G*.



Prob. 5.67

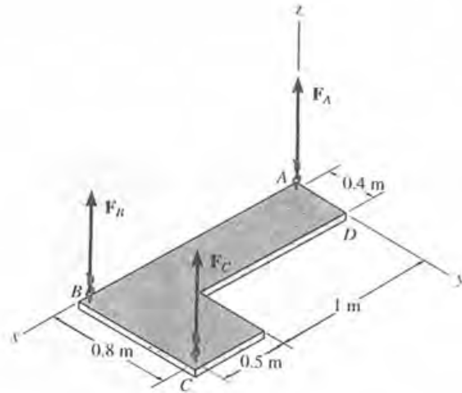
http://librosysolucionarios.net

* **5.68**. La placa triangular se apoya en una articulación de rótula en B y rodillos en A y C. Determine las componentes x, y, z de la reacción en estos apoyos debidas a las cargas mostradas.



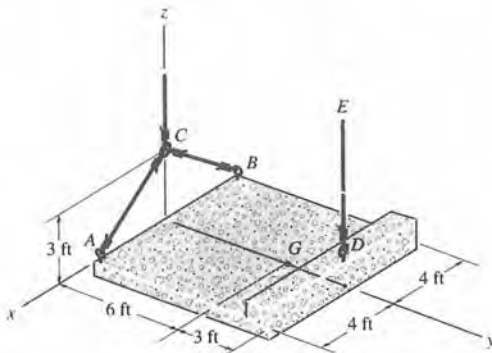
Prob. 5.68

5.70. La placa tiene masa de 50 kg/m². Determine la fuerza en cada cable, si se encuentra suspendida en el plano horizontal.



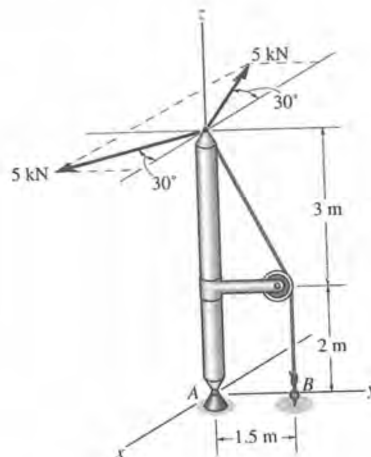
Prob. 5.70

5.69. Una losa de concreto es levantada a velocidad constante con los cables, como se muestra. Si la losa pesa 32 000 lb y tiene centro de gravedad en G, determine la tensión en los cables de soporte AC, BC, y DE.



Prob. 5.69

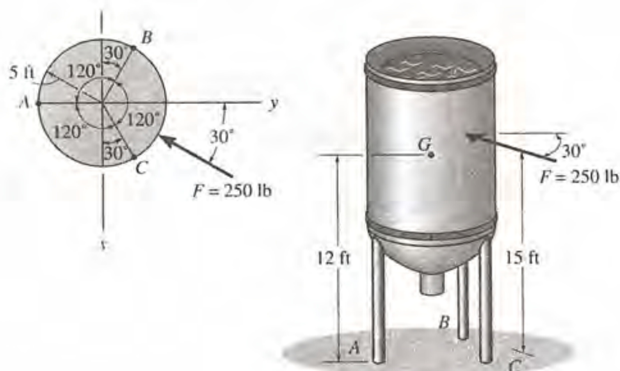
5.71. El aguilón se encuentra sostenido por una articulación de rótula en A y un tensor en B. Si las cargas en los cables son cada una de 5 kN y se encuentran en un plano que es paralelo al plano $x-y$, determine las componentes x, y, z, de reacción en A y la tensión en el cable en B.



Prob. 5.71

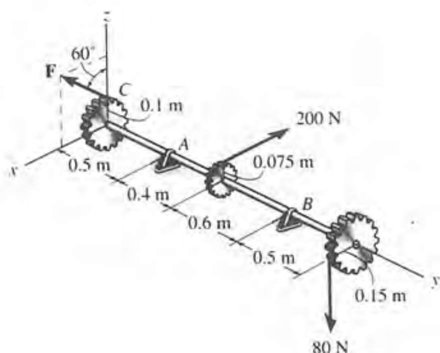
http://librosysolucionarios.net

*5.72. El silo tiene peso de 3500 lb y centro de gravedad en G. Determine la componente vertical de la fuerza que cada uno de los soportes en A, B, C ejerce sobre el silo si está sujeto a un empuje resultante del viento de 250 lb y que actúa en la dirección mostrada.



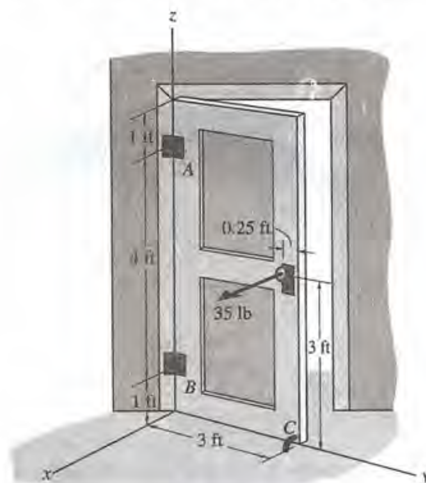
Prob. 5.72

5.73. La flecha está apoyada en una chumacera de empuje en A y una chumacera lisa en B. Determine las componentes x, y, z de la reacción en estos soportes y la magnitud de la fuerza que actúa en el engrane en C, necesaria para mantener la flecha en equilibrio. Las chumaceras están debidamente alineadas y sólo ejercen fuerzas de reacción en la flecha.



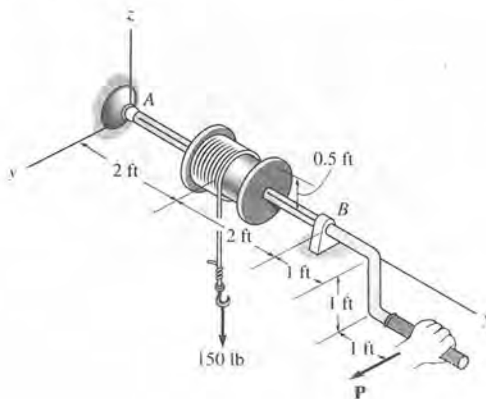
Prob. 5.73

5.74. La puerta uniforme pesa 50 lb y está sostenida en bisagras en A y en B. La bisagra en A soporta solamente fuerzas en el plano horizontal, en tanto que la bisagra en B soporta componentes horizontales y verticales de fuerza. Si la fuerza normal de 35 lb se aplica a la manija de la puerta, determine la reacción horizontal en el tope liso de la puerta que está en C y las componentes de reacción en las bisagras A y B. No se toma en cuenta el tamaño del tope en C.



Prob. 5.74

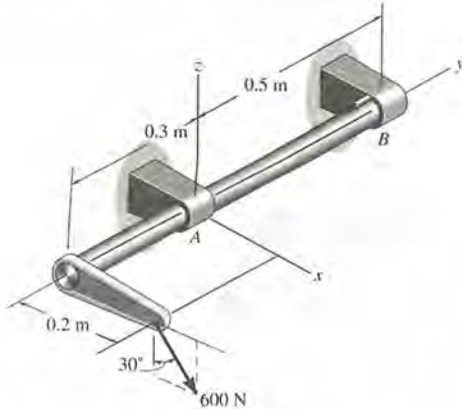
5.75. Un malacate está sujeto a una carga de 150 lb. Determine la fuerza horizontal **P** requerida para sostener la manija en la posición que se muestra y las componentes x, y, z de reacción en la articulación de rótula en A y la chumacera lisa en B. La chumacera está debidamente alineada y sólo ejerce fuerzas de reacción sobre la flecha.



Prob. 5.75

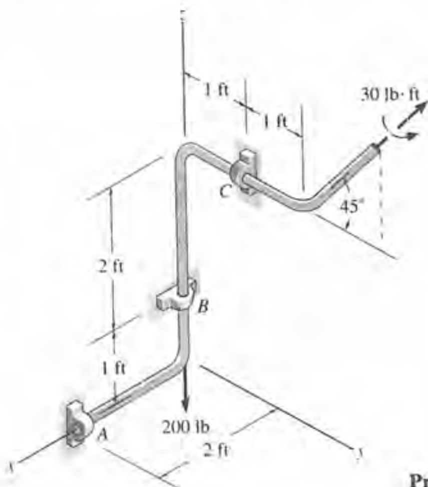
http://librosysolucionarios.net

*5.76. La flecha se apoya en las chumaceras en A y B. Se inserta una llave en la chumacera en B para impedir la traslación a lo largo de su eje y la rotación alrededor del mismo. Determine las reacciones componentes en las direcciones de x, y, z, en las chumaceras, al aplicar la fuerza de 600 N en el brazo. Las chumaceras están debidamente alineadas y ejercen sólo fuerzas de reacción sobre la flecha.



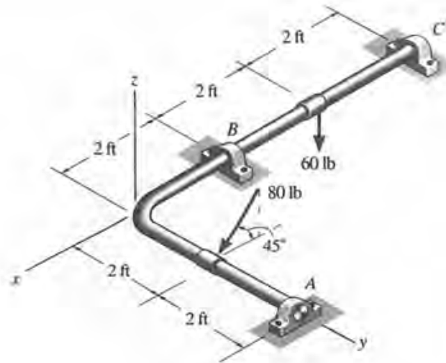
Prob. 5.76

*5.77. La varilla doblada se soporta en A, B, y C mediante chumaceras. Determine las componentes de reacción, x, y, z, en las chumaceras, si la varilla está sujeta a una fuerza vertical de 200 lb y un momento de par de 30 lb · ft como se muestra. Las chumaceras están debidamente alineadas y sólo ejercen fuerzas de reacción sobre la varilla.



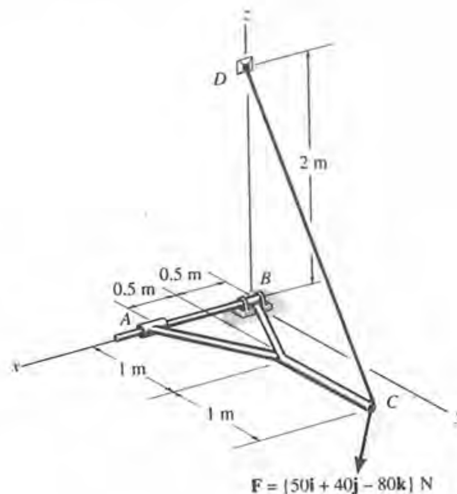
Prob. 5.77

5.78. La varilla se apoya en las chumaceras en A, B, y C. Determine las tres componentes cartesianas de la reacción en estos apoyos debidas a las cargas mostradas. Las chumaceras están debidamente alineadas y no ejercen sino reacciones sobre la varilla.



Prob. 5.78

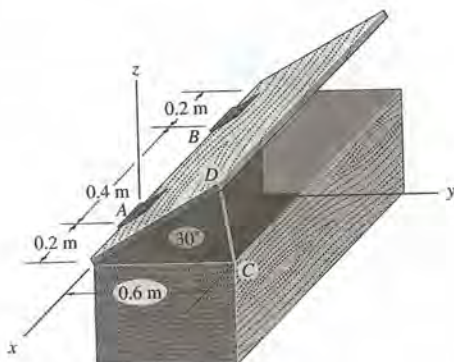
5.79. La varilla bifurcada está apoyada por un collarín en A, una chumacera de empuje en B y un cable CD. Determine la tensión en el cable y las tres componentes cartesianas de las reacciones en A y en B debidas a las cargas mostradas. Los apoyos en A y en B están debidamente alineados y sólo ejercen fuerzas de reacción sobre la varilla.



Prob. 5.79

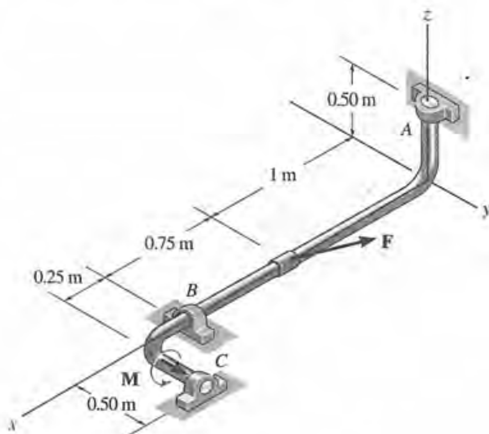
http://librosysolucionarios.net

***5.80.** La tapa uniforme de 20 kg del baúl se mantiene alzada mediante la varilla ligera *CD*. Si la bisagra en *A* impide que se deslize la tapa a lo largo del eje *x*, mientras que la bisagra en *B* no ofrece resistencia en esta dirección, calcule la fuerza de compresión en *CD* y las componentes *x*, *y*, *z* de reacción en las bisagras *A* y *B*. Las bisagras están debidamente alineadas y sólo ejercen fuerzas de reacción sobre la tapa.



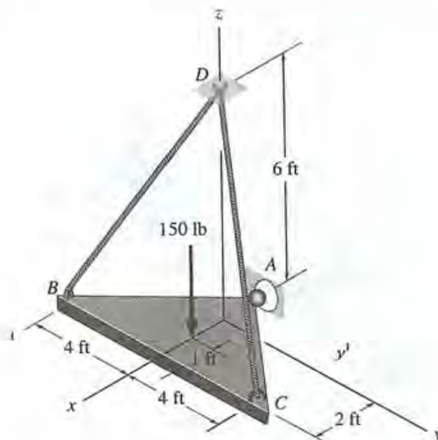
Prob. 5.80

***5.81.** En *A*, *B* y *C* se encuentran las chumaceras lisas que sirven de apoyo a la varilla doblada. Determine las componentes *x*, *y*, *z* de reacción en las chumaceras si la varilla está sujeta a una fuerza de $\mathbf{F} = \{-500\mathbf{i} + 400\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\}$ N y un momento de par de $\mathbf{M} = \{600\mathbf{j}\}$ N · m. Las chumaceras están alineadas para no ejercer sino fuerzas reactivas en la varilla.



Prob. 5.81

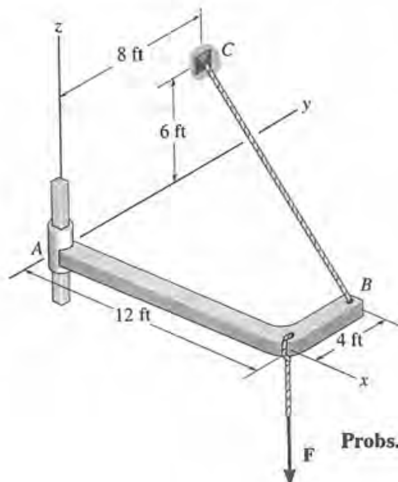
5.82. La placa metálica triangular soporta una carga de 150 lb. Determine la tensión en los cables *BD* y *CD* y las componentes cartesianas de la reacción en la articulación de rótula en *A*.



Prob. 5.82

5.83. El miembro *AB* se sostiene por un cable *BC* y en *A* por una barra *cuadrada* lisa y floja dentro del hueco cuadrado del collarín. Si $\mathbf{F} = \{20\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 75\mathbf{k}\}$ lb, determine la tensión en el cable *BC* y las componentes *x*, *y*, *z* de la reacción en *A*.

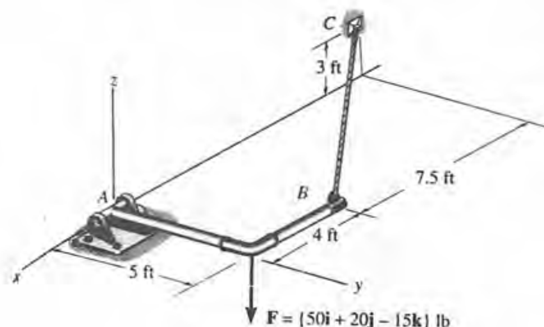
***5.84.** El miembro *AB* se sostiene por un cable *BC* y en *A* por una barra *cuadrada* lisa y floja dentro del hueco cuadrado del collarín. Si la fuerza $\mathbf{F} = -\{45\mathbf{k}\}$ lb, determine la tensión en el cable *BC* y las componentes *x*, *y*, *z* de la reacción en *A*.



Probs. 5.83/5.84

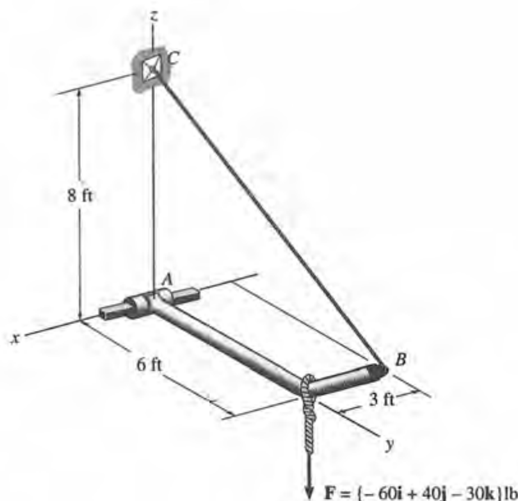
http://librosysolucionarios.net

5.85. La varilla se encuentra apoyada por una chumacera de empuje en A y el cable BC. Determine la fuerza en el cable y las componentes x, y, z de la reacción en A.



Prob. 5.85

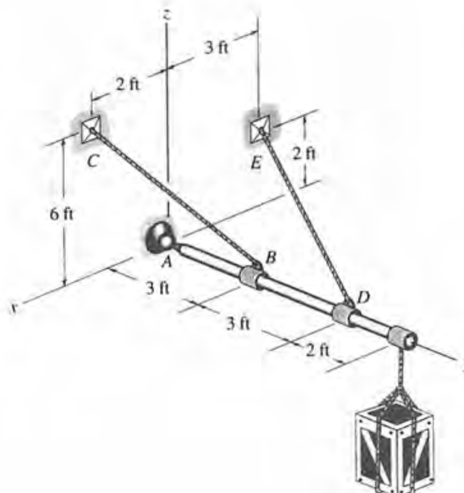
5.86. El miembro AB es soportado por un cable BC y apoyado en A en una barra cuadrada que ajusta sin apretar en el apoyo del extremo del miembro, como se muestra. Determine las componentes x, y, z de la reacción en A y la tensión en el cable.



Prob. 5.86

5.87. El aguilón soporta una carga que pesa $\mathbf{W} = 850$ lb. Determine las componentes x, y, z de la reacción en la articulación de rótula A y la tensión en los cables BC y DE.

* **5.88.** El cable BC o DE puede soportar una tensión máxima de 700 lb antes de la ruptura. Determine el peso máximo **W** que se puede suspender del extremo del aguilón. Determine también las componentes x, y, z de reacción en la articulación de rótula A.

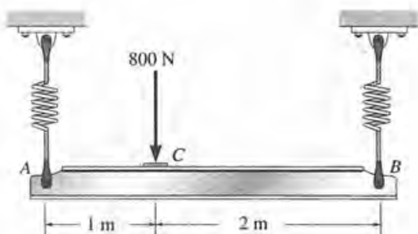


Probs. 5.87/5.88

http://librosysolucionarios.net

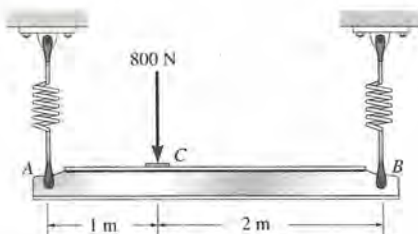
PROBLEMAS DE REPASO

5.89. La viga horizontal está sostenida por resortes en sus extremos. Tienen, cada uno, una rigidez de $k = 5$ kN/m, y originalmente sin estirar de modo que la viga se encuentra en posición horizontal. Determine el ángulo en que se inclinará la viga si se aplica una carga de 800 N en el punto C como se ve.



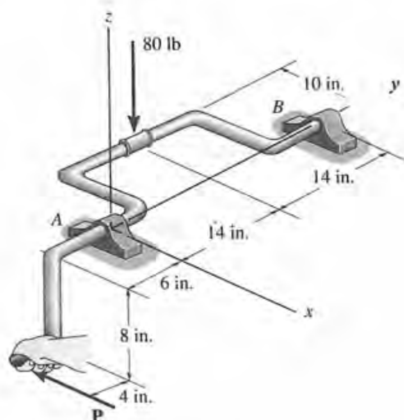
Prob. 5.89

5.90. La viga horizontal está sostenida por los resortes en sus extremos. Si el resorte en A tiene rigidez de $k_A = 5$ kN/m, determine la rigidez requerida del resorte en B, de manera que si la viga se carga con la fuerza de 800 N permanezca horizontal antes y después de la carga.



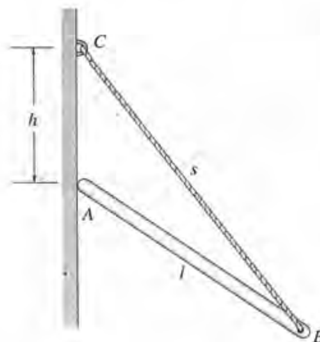
Prob. 5.90

5.91. Una fuerza de 80 lb actúa sobre el cigüeñal. Determine la fuerza horizontal de equilibrio **P** que debe aplicarse a la manija y las componentes x, y, z de fuerza en la chumacera lisa A y la chumacera de empuje B. Las chumaceras están debidamente alineadas para ejercer sólo fuerzas de reacción en la flecha.



Prob. 5.91

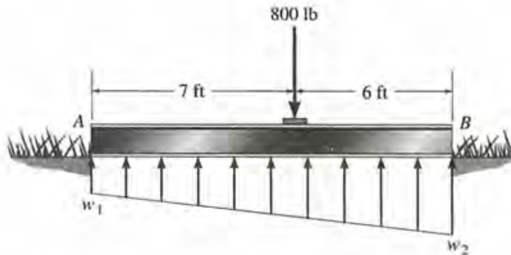
* **5.92**. La barra uniforme tiene longitud l y peso W. Está apoyada en un extremo A, en una pared lisa y en el otro sostenida por una cuerda de longitud s atada a la pared, como se muestra. Demuestre que para el equilibrio es necesario que $h = [(s^2 - l^2)/3]^{1/2}$.



Prob. 5.92

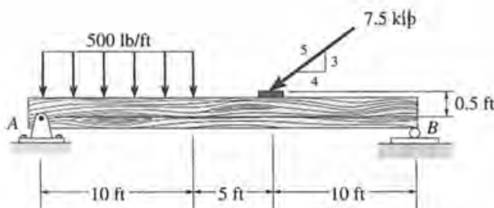
http://librosysolucionarios.net

5.93. Una viga uniforme con un peso de 200 lb soporta una carga vertical de 800 lb. Si la presión del suelo varía linealmente como se muestra, determine las intensidades de carga w_1 y w_2, medidas en lb/ft, necesarias para el equilibrio.



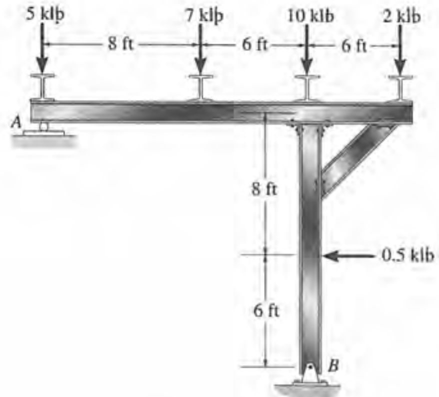
Prob. 5.93

5.94. Determine las reacciones sobre la viga.



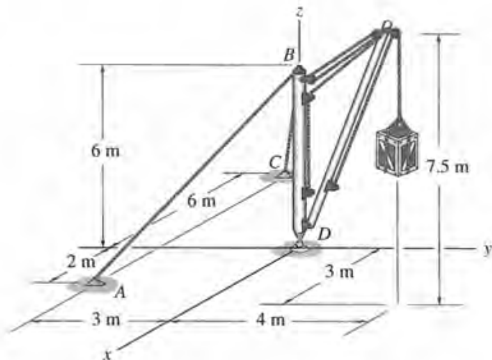
Prob. 5.94

5.95. Determine las reacciones en los apoyos *A* y *B* del marco.



Prob. 5.95

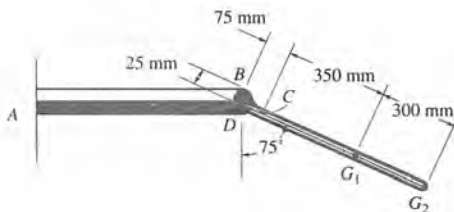
*** 5.96**. La grúa fija que se usa en los barcos está soportada por una articulación de rótula en *D* y dos cables *BA* y *BC*. Los cables se atan a un collarín liso en *B* que permite la rotación de la grúa alrededor del eje *z*. Si la grúa sostiene un huacal con masa de 100 kg, determine la tensión en los cables de soporte y las tres componentes cartesianas de reacción en *D*.

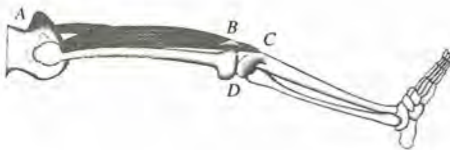


Prob. 5.96

http://librosysolucionarios.net

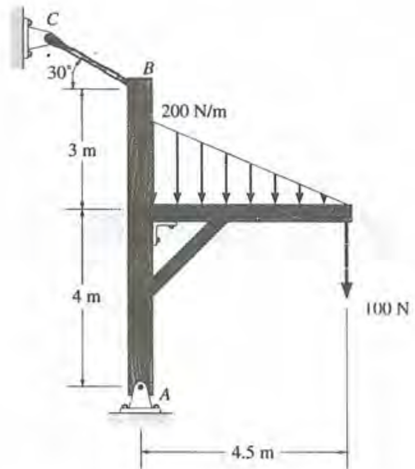
5.97. En la figura 5.97 se ve un diagrama esquelético de la pierna. Puede verse que la parte inferior de la pierna es levantada por el cuadríceps, músculo que se inserta por arriba en la cadera, en A, y abajo en la rótula, en B. Este hueso resbala libremente sobre el cartílago en la coyuntura de la rodilla. El cuadríceps se extiende más abajo para insertarse en la tibia, en C. Mediante el sistema mecánico que se muestra en la figura superior como un modelo de la parte inferior de la pierna, determine la tensión **T** en el cuadríceps y la magnitud de la fuerza resultante en el fémur (pasador), D, para poder mantener la parte inferior de la pierna en la posición mostrada. La parte inferior de la pierna tiene una masa de 3.2 kg y centro de masa en G_1, el pie tiene una masa de 1.6 kg y centro de masa en G_2.





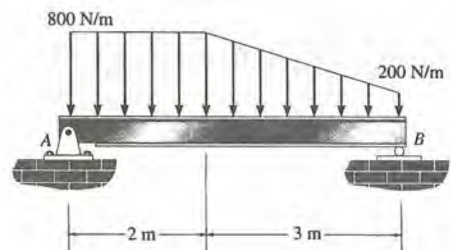
Prob. 5.97

5.98. Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en el pasador A y la fuerza en el cable BC. Se deberá ignorar el grosor de los miembros.



Prob. 5.98

5.99. Determine las componentes vertical y horizontal de reacción en el pasador y la reacción en el rodillo de apoyo de la viga.



Prob. 5.99

http://librosysolucionarios.net

6 Análisis estructural

En este capítulo usaremos las ecuaciones de equilibrio para analizar estructuras compuestas de miembros articulados. El análisis se basa en el principio de que si una estructura está en equilibrio, entonces cada uno de sus miembros está en equilibrio también. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio a las partes de una armadura simple, un marco o una máquina, podremos determinar todas las fuerzas que actúan en las uniones.

Los temas de este capítulo son muy importantes pues proporcionan práctica en el trazado de los diagramas de cuerpo libre, en el uso del principio de acción con reacción colineal, pero opuesta, y en la aplicación de las ecuaciones de equilibrio.

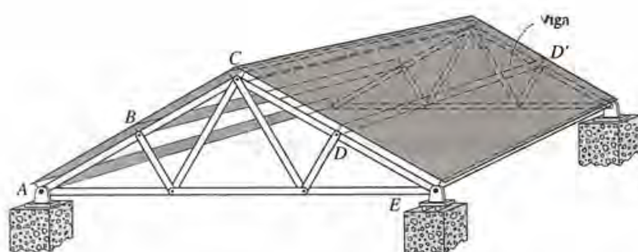
6.1 Armaduras simples

La *armadura* es una estructura compuesta de miembros delgados unidos por sus puntos extremos. Los miembros que comúnmente se usan en la construcción de las armaduras consisten en riostras de madera o barras de metal. Las uniones se forman usualmente remachando o soldando los extremos de los miembros a una placa común, llamada *placa de unión*, como se indica en la figura 6.1*a*, o simplemente haciendo pasar un perno largo o pasador a través de cada uno de los miembros, figura 6.1*b*

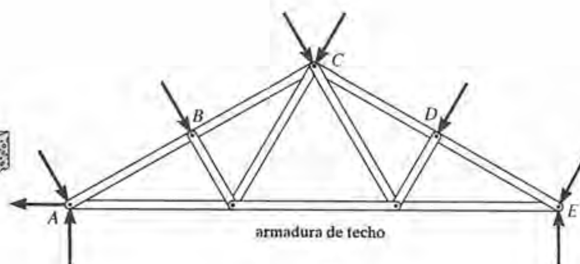


Fig. 6.1

http://librosysolucionarios.net



(a)



(b)

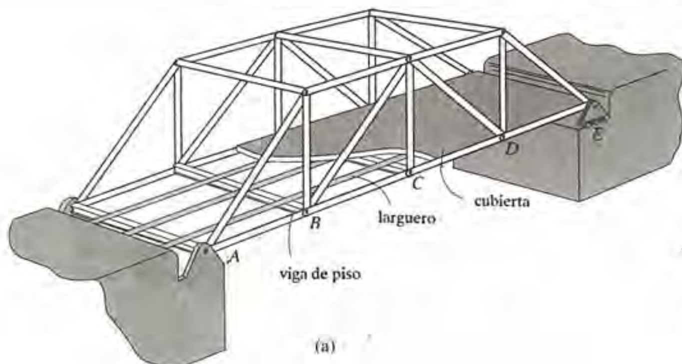
Fig. 6.2

Armaduras planas. Las armaduras *planas* se localizan en un solo plano y suelen utilizarse para soportar techos y puentes. La armadura *ABCDE* mostrada en la figura 6.2*a* es un ejemplo de una armadura representativa para soporte de techo. En esta figura, la carga del techo se transmite a la armadura *en las juntas* por medio de una serie de *largueros*, tales como la viga *DD'*. Como la carga aplicada actúa en el mismo plano de la armadura, figura 6.2*b*, el análisis de las fuerzas desarrolladas en los miembros de la armadura es de dos dimensiones.

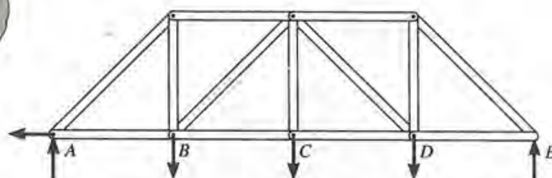
En el caso de un puente, tal como el mostrado en la figura 6.3*a*, la carga sobre la *cubierta* se transmite primero a los *largueros*, después a las *vigas de piso* y, finalmente, a las *uniones* *B*, *C* y *D* de las dos armaduras laterales de apoyo. Análogamente al caso de la armadura para techo, el sistema de carga para una armadura de puente es coplanar, figura 6.3*b*.

Cuando las armaduras para puente o para techo se extienden sobre grandes claros, se usa comúnmente un balancin o un rodillo para apoyar un extremo, unión *E* en las figuras 6.2*a* y 6.3*a*. Este tipo de apoyo permite la expansión o la contracción debidas a los cambios de temperatura o a la aplicación de cargas.

Fig. 6.3



(a)



(b)

http://librosysolucionarios.net

Hipótesis para diseño. Para diseñar tanto los miembros como las uniones de una armadura, es necesario determinar primero las *fuerzas* desarrolladas en cada uno de los miembros cuando la armadura se sujeta a la acción de un sistema de cargas dado. Con relación a esto, se harán dos importantes hipótesis:

1. *Todas las cargas se aplican en las uniones*. En la mayoría de las situaciones, tales como en las armaduras para puentes o para techos, esta hipótesis es válida. Frecuentemente, en el análisis de las fuerzas, el peso de los miembros se desprecia, ya que la fuerza soportada por los miembros es grande en comparación con su peso. Si se va a incluir el peso de los miembros en el análisis, resulta satisfactorio aplicar la mitad del peso de cada miembro como una fuerza vertical que actúa en cada uno de sus dos extremos.
2. *Los miembros están unidos por medio de pasadores lisos*. En los casos en que se usen juntas remachadas o soldadas, esta hipótesis es satisfactoria con tal de que los ejes centrales de los miembros que se unen sean *concurrentes* en un punto, como en el caso del punto A en la figura 6.1a.

Debido a estas dos hipótesis, *cada miembro de una armadura se comporta como un miembro de dos fuerzas* y, por consiguiente, las fuerzas que actúan en los extremos del miembro deben estar dirigidas a lo largo del eje del miembro. Si la fuerza tiende a *alargar* al miembro, es una *fuerza de tensión* (**T**), figura 6.4a; mientras que si la fuerza tiende a *acortar* al miembro, es una *fuerza de compresión* (**C**), figura 6.4b. En el diseño real de una armadura es importante establecer si la naturaleza de la fuerza es de tensión o de compresión. Muy a menudo, los miembros sometidos a compresión deben hacerse *más gruesos* que los miembros sometidos a tensión, debido al pandeo o efecto de columna que ocurre en los miembros sometidos a compresión.

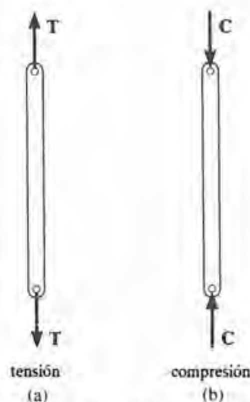


Fig. 6.4

http://librosysolucionarios.net

Armadura simple. Para impedir el desplome, la estructura de una armadura debe ser rígida. Obviamente, el marco de cuatro barras *ABCD* de la figura 6.5 se desplomará, a menos que se añada una diagonal, tal como la *AC*. El marco más simple que es rígido o estable es el *triángulo*. En consecuencia, una *armadura simple* se construye *partiendo* de un elemento básico triangular, tal como el *ABC* de la figura 6.6, y uniendo dos miembros (*AD* y *BD*), para formar un elemento adicional. Así se ve que al colocar en la armadura cada elemento adicional de dos miembros, el número de uniones se incrementa en uno.

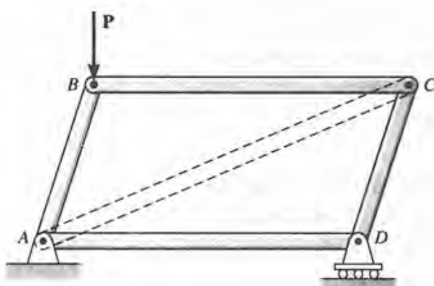


Fig. 6.5

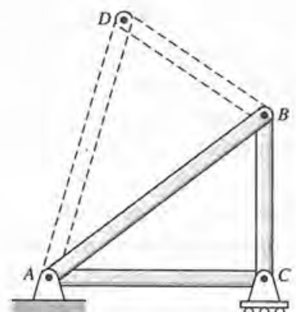


Fig. 6.6

6.2 El método de los nudos

Si una armadura está en equilibrio, entonces cada uno de sus nudos debe estar en equilibrio. Por tanto, el método de los nudos consiste en satisfacer las condiciones de equilibrio para todas las fuerzas ejercidas *sobre el pasador* de cada uno de los nudos de la armadura. Como todos los miembros de la armadura son miembros rectos de dos fuerzas contenidos en el mismo plano, el sistema de fuerzas que actúan en cada pasador es *coplanar y concurrente*. En consecuencia, el equilibrio rotacional o de momento se satisface automáticamente en el nudo (o pasador) y solamente es necesario satisfacer $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para asegurar el equilibrio de fuerzas o de traslación en el nudo.

Cuando se usa el método de los nudos, es necesario *primero* trazar el diagrama de cuerpo libre del nudo antes de aplicar las ecuaciones de equilibrio. En relación con esto, recuérdese que la *línea de acción* de cada fuerza en un miembro que actúa sobre la unión se *especifica* a partir de la geometría de la armadura, ya

http://librosysolucionarios.net

que la fuerza en un miembro se ejerce a lo largo del eje del miembro. Como ejemplo, consideremos la unión B de la armadura, figura 6.7*a*. Son tres fuerzas las que actúan sobre el pasador, a saber, la fuerza de 500 N y las ejercidas por los miembros BA y BC. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.7*b*. Como se indica, $\mathbf{F}_{BA}$ está "tirando" sobre el pasador, lo que significa que el miembro BA está en *tensión*, mientras que $\mathbf{F}_{BC}$ está "empujando" sobre el pasador y, consecuentemente, el miembro BC está en *compresión*. Estos efectos se manifiestan claramente aislando el nudo con pequeños segmentos de los miembros conectados al pasador, figura 6.7*c*. Nótese que el empuje o la tracción sobre estos pequeños segmentos indica el efecto del miembro, ya sea en comprensión o en tensión.

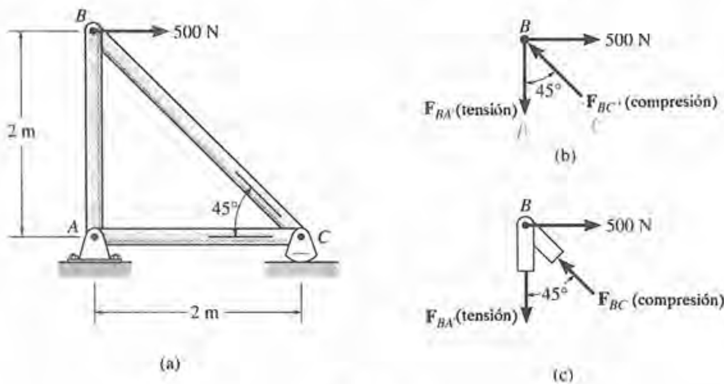


Fig. 6.7

En todos los casos, el análisis deberá empezar en un nudo que tenga por lo menos una fuerza conocida y, a lo más, dos fuerzas desconocidas, como en la figura 6.7*b*. De esta manera, la aplicación de $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ da dos ecuaciones algebraicas que pueden resolverse para las incógnitas. Al aplicar estas ecuaciones, el sentido correcto de una fuerza desconocida en un miembro se puede determinar usando uno de dos métodos posibles.

1 *Considere siempre que las fuerzas desconocidas en un miembro* que actúan en el diagrama de cuerpo libre del nudo están en tensión, es decir, "tirando" el pasador. Si se hace así, entonces la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio *dará escalares positivos para miembros en tensión y escalares negativos para miembros en compresión*. Una vez que se encuentre un miembro de fuerza desconocido, utilice su magnitud correcta y sentido correcto (T o C) en los diagramas subsecuentes de las uniones.
2. El sentido de dirección *correcto* de una fuerza en un miembro, desconocida, puede en muchos casos determinarse "por

http://librosysolucionarios.net

inspección". Por ejemplo, $\mathbf{F}_{BC}$ en la figura 6.7*b* debe empujar sobre el pasador (compresión) ya que su componente horizontal, F_{BC} sen 45°, debe equilibrar la fuerza de 500 N ($\Sigma F_x = 0$). Asimismo, F_{BA} es una fuerza de tensión, pues equilibra la componente vertical F_{BC} cos 45° ($\Sigma F_y = 0$). En casos más complicados, el sentido de una fuerza desconocida en un miembro *puede ser supuesto*; y después de que se hayan aplicado las ecuaciones de equilibrio, el sentido supuesto podrá verificarse a partir de los resultados numéricos. Una respuesta *positiva* indica que el sentido es *correcto* mientras que, si es *negativa*, indica que el sentido supuesto en el diagrama de cuerpo libre debe *cambiarse*. Éste es el método que usaremos en los siguientes problemas de ejemplo.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento describe una manera representativa de realizar el análisis de una armadura por el método de los nudos.

Trace el diagrama de cuerpo libre de un nudo que tenga al menos una fuerza conocida y, a lo más, dos fuerzas desconocidas. (Si este nudo se encuentra en uno de los apoyos, en general será necesario conocer las reacciones externas en el apoyo de la armadura). Utilícese uno de los métodos antes descritos para establecer el sentido de una fuerza desconocida. Oriéntense los ejes *x y* de modo que las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre puedan resolverse fácilmente en sus componentes *x y*, y aplíquense las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$. Resuélvase para obtener las dos fuerzas desconocidas en miembros y verifíquese su sentido correcto.

Continúe analizando cada uno de los nudos restantes, entre los cuales es nuevamente necesario elegir uno que tenga a lo más dos fuerzas desconocidas y, por lo menos, una conocida. Debe tenerse en cuenta que una vez que se encuentre la fuerza en un miembro a partir del análisis de uno de sus nudos extremos, el resultado puede usarse para analizar las fuerzas que actúan en el otro nudo. Desde luego, hay que apegarse rigurosamente al principio de la acción y la reacción de igual magnitud, colineales, pero opuestas. Recuérdese que un miembro en *compresión* "empuja" en el nudo y un miembro en *tensión* "tira" en el nudo.

Una vez completo el análisis de fuerzas de la armadura, pueden determinarse los tamaños de los miembros, así como sus conexiones, mediante el uso de la teoría de la mecánica de materiales junto con la información que se da en los códigos de diseño de ingeniería.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.1

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura mostrada en la figura 6.8*a* e indique, para cada miembro, si está en tensión o en compresión.

SOLUCIÓN

Al examinar la figura 6.8*a* vemos que hay dos fuerzas que se desconocen en el nudo *B*, dos fuerzas desconocidas y una fuerza de reacción desconocida en el nudo *C*, y dos fuerzas en miembros desconocidos junto con dos fuerzas de reacción desconocidas en el nudo *A*. Ya que no debemos tener más de dos incógnitas en el nudo y, a lo menos, una fuerza conocida que actúe en él, debemos iniciar el análisis en el nudo *B*.

Nudo B. El diagrama de cuerpo libre del pasador en *B* es el que aparece en la figura 6.8*b*. Tres fuerzas actúan sobre el pasador: la fuerza externa de 500 N y las dos fuerzas desconocidas desarrolladas por los miembros *BA* y *BC*. Aplicando las ecuaciones del equilibrio del nudo, tenemos

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\;\; 500 - F_{BC}\,\text{sen}\,45° = 0 \;\; F_{BC} = 707.1\text{ N (C)}$ ***Resp.***

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\;\; F_{BC}\cos 45° - F_{BA} = 0 \;\; F_{BA} = 500\text{ N (T)}$ ***Resp.***

Ya que la fuerza en el miembro *BC* ha sido calculada, podemos proceder al análisis del nudo *C* para determinar la fuerza en el miembro *AC* y la reacción de apoyo en el balancín.

Nudo C. Del diagrama de cuerpo libre en el nudo *C*, figura 6.8*c*, tenemos

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\;\; -F_{AC} + 707.1\cos 45° = 0 \;\; F_{AC} = 500\text{ N (T)}$ ***Resp.***

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\;\; C_y - 707.1\text{sen}\,45° = 0 \;\; C_y = 500\text{ N}$ ***Resp.***

Nudo A. Aunque no es necesario, podemos determinar las reacciones de apoyo en el nudo *A* usando los resultados $F_{AC} = 500$ N y $F_{AB} = 500$ N. Del diagrama de cuerpo libre, figura 6.8*d*, tenemos

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\;\; 500 - A_x = 0 \;\; A_x = 500\text{ N}$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\;\; 500 - A_y = 0 \;\; A_y = 500\text{ N}$

Los resultados del análisis se resumen en la figura 6.8*e*. Nótese que el diagrama de cuerpo libre de cada pasador muestra los efectos de todos los miembros conectados y fuerzas externas aplicadas al pasador, en tanto que el diagrama de cuerpo libre de cada miembro muestra solamente los efectos de los pasadores extremos sobre el miembro.

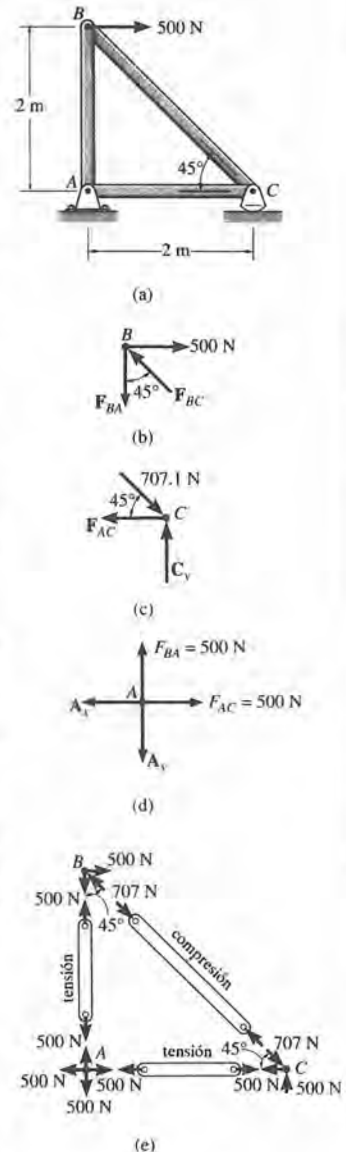
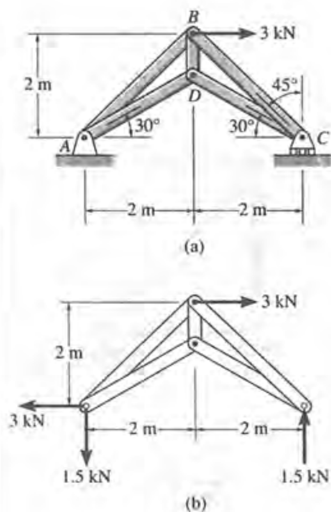


Fig. 6.8

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.2

Determine las fuerzas que actúan en todos los miembros de la armadura mostrada en la figura 6.9*a*.



SOLUCIÓN

En cada nudo hay más de dos incógnitas, como se verifica por inspección. En consecuencia, las reacciones de apoyo sobre la armadura se determinarán primero. Demuestre que han sido correctamente calculadas en la figura 6.9*b*. Ahora podemos iniciar el análisis en el nudo *C*. ¿Por qué?

Nudo C. Del diagrama de cuerpo libre, figura 6.9*c*.

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\qquad -F_{CD}\cos 30° + F_{CB}\,\text{sen}\,45° = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\qquad 1.5 + F_{CD}\,\text{sen}\,30° - F_{CB}\cos 45° = 0$

Estas dos ecuaciones deben resolverse *simultáneamente* para cada una de las dos incógnitas. Nótese, sin embargo, que puede obtenerse una *solución directa* para una de las fuerzas desconocidas aplicando una suma de fuerzas a lo largo de un eje que sea *perpendicular* a la dirección de la otra fuerza desconocida. Por ejemplo, una suma de fuerzas a lo largo del eje y' que es perpendicular a la dirección de $\mathbf{F}_{CD}$, figura 6.9*c*, da por resultado una solución directa para $\mathbf{F}_{CB}$.

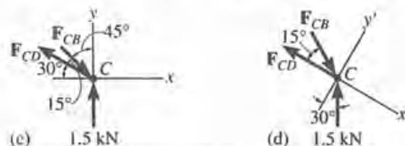
$+\nearrow\Sigma F_{y'} = 0;$

$1.5\cos 30° - F_{CB}\,\text{sen}\,15° = 0\qquad F_{CB} = 5.02\text{ kN (C)}$ ***Resp.***

De manera semejante, la suma de fuerzas a lo largo del eje y'', figura 6.9*d*, da por resultado una solución directa para F_{CD}.

$+\nearrow\Sigma F_{y''} = 0;$

$1.5\cos 45° - F_{CD}\,\text{sen}\,15° = 0\qquad F_{CD} = 4.10\text{ kN (T)}$ ***Resp.***



Nudo D. Ahora podemos proceder al análisis del nudo *D*. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.9*f*.

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\qquad -F_{DA}\cos 30° + 4.10\cos 30° = 0$

$F_{DA} = 4.10\text{ kN (T)}$ ***Resp.***

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\qquad F_{DB} - 2(4.10\,\text{sen}\,30°) = 0$

$F_{DB} = 4.10\text{ kN (T)}$ ***Resp.***

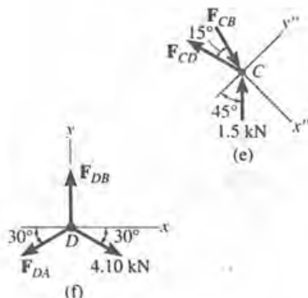


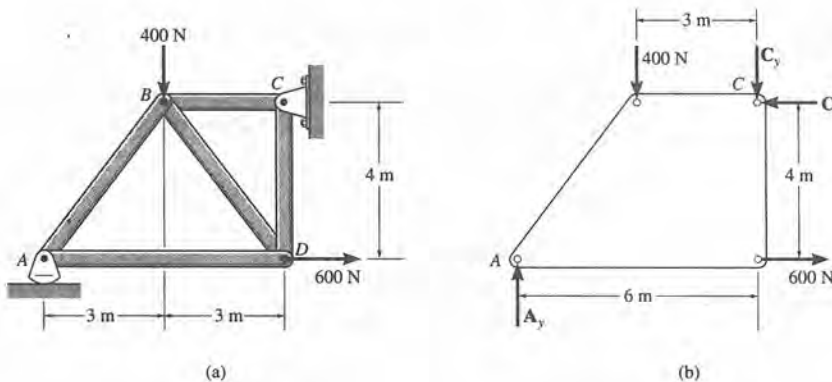
Fig. 6.9

La fuerza en el último miembro, *BA*, puede obtenerse a partir del nudo *B* o *A*. Como ejercicio, trace el diagrama de cuerpo libre del nudo *B*, sume las fuerzas en la dirección horizontal, y demuestre que $F_{BA} = 0.777$ kN (C).

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.3

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura mostrada en la figura 6.10*a*. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.



(a) (b)

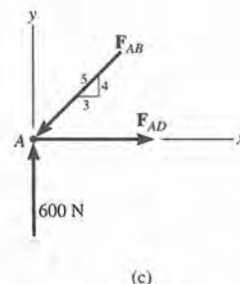
SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. No puede analizarse ningún nudo hasta que se determinen primero las reacciones en los apoyos. ¿Por qué? En la figura 6.10*b* se da un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 600 - C_x = 0 \qquad C_x = 600\text{ N}$$
$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -A_y(6) + 400(3) + 600(4) = 0 \qquad A_y = 600\text{ N}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 600 - 400 - C_y = 0 \qquad C_y = 200\text{ N}$$

Ahora, el análisis puede empezar, ya sea en el nudo A o en el nudo C. La elección es arbitraria, ya que hay una fuerza conocida y dos fuerzas en miembros desconocidas que actúan en cada uno de estos nudos.

Nudo A (figura 6.10*c*). Como se indica en el diagrama de cuerpo libre, hay tres fuerzas que actúan en el nudo A. La inclinación de F_{AB} se determina a partir de la geometría de la armadura. Por inspección, ¿puede ver el lector por qué esta fuerza se supone de compresión y F_{AD} como una tensión? Si se aplican las ecuaciones de equilibrio, tenemos

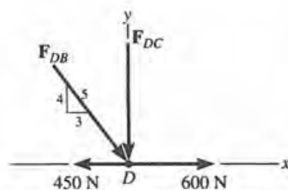


(c)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 600 - \tfrac{4}{5}F_{AB} = 0 \qquad F_{AB} = 750\text{ N (C)} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad F_{AD} - \tfrac{3}{5}(750) = 0 \qquad F_{AD} = 450\text{ N (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

Fig. 6.10(a–f)

http://librosysolucionarios.net



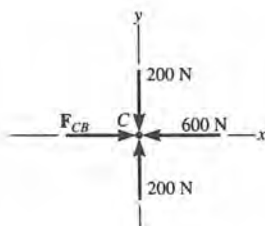
(d)

Nudo D (figura 6.10*d*). Enseguida se escoge este nudo ya que, por inspección de la figura 6.10*a*, se conoce la fuerza en *AD* y se pueden determinar las dos fuerzas desconocidas en *BD* y *CD*. Si se aplican las ecuaciones de equilibrio, figura 6.10*d*, tenemos

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad -450 + \tfrac{3}{5}F_{DB} + 600 = 0 \quad F_{DB} = -250\text{ N}$$

El signo negativo significa que $\mathbf{F}_{DB}$ actúa en el *sentido opuesto* al indicado en la figura 6.10*d*.* Por tanto,

$$F_{DB} = 250\text{ N (T)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



(e)

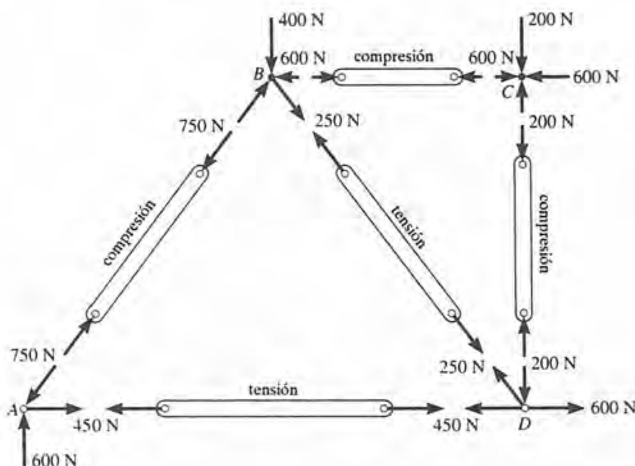
Para determinar $\mathbf{F}_{DC}$, podemos, ya sea corregir el sentido de $\mathbf{F}_{DB}$ y después aplicar $\Sigma F_y = 0$, y al aplicar la ecuación a la figura 6.10*d* y conservar el signo negativo para F_{DB}; es decir,

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad -F_{DC} - \tfrac{4}{5}(-250) = 0 \;\; F_{DC} = 200\text{ N (C)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Nudo C. (figura 6.10*e*)

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad F_{CB} - 600 = 0 \quad F_{CB} = 600\text{ N} \quad \text{(C)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 200 - 200 \equiv 0 \;\; \text{(verificar)}$$

El análisis se resume en la figura 6.10*f*, que muestra el diagrama de cuerpo libre correcto para cada nudo y cada miembro.



(f)

* La dirección y sentido adecuados podía haberse determinado por inspección, antes de aplicar la ecuación $\Sigma F_x = 0$.

http://librosysolucionarios.net

6.3 Miembros de fuerza cero

El análisis de armaduras por el método de los nudos se simplifica notablemente si es posible determinar primero los miembros que *no soportan carga*. Estos *miembros de fuerza cero* se usan para incrementar la estabilidad de la armadura durante la construcción y dar apoyo en caso de que la carga aplicada se modifique.

Los miembros de fuerza cero de una armadura generalmente pueden determinarse por inspección de cada nudo. Por ejemplo, considérese la armadura mostrada en la figura 6.11*a*. Si se traza un diagrama de cuerpo libre del pasador en el nudo A, figura 6.11*b*, se constata que los miembros AB y AF son miembros de fuerza cero. Por otra parte, debe señalarse que no podíamos haber llegado a esta conclusión si hubiésemos considerado los diagramas de cuerpo libre del nudo F o el nudo B, simplemente porque hay cinco incógnitas en cada uno de estos nudos. De manera semejante, considérese el diagrama de cuerpo libre del nudo D, figura 6.11*c*. Aquí encontramos de nuevo que DC y DE son miembros de fuerza cero. Como regla general, entonces, *si sólo dos miembros forman un nudo de armadura y no hay carga externa o reacción de apoyo aplicada en el nudo, los miembros deben ser miembros de fuerza cero*. La carga en la armadura en la figura 6.11*a* es soportada por tan sólo cinco miembros, como se ve en la figura 6.11*d*.

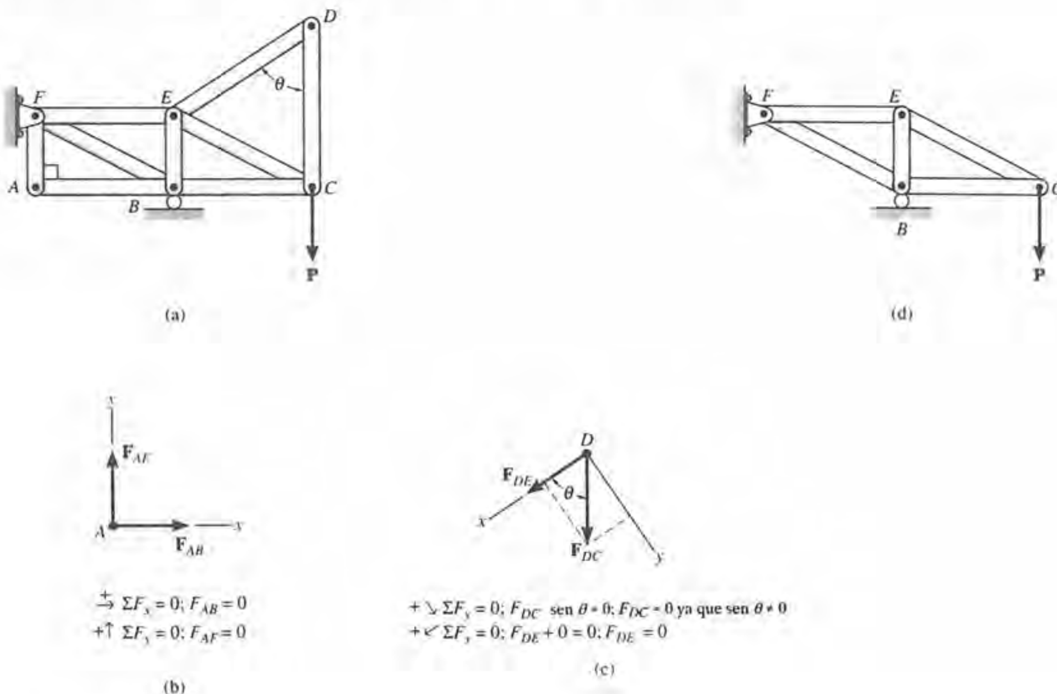


Fig. 6.11

http://librosysolucionarios.net

Ahora consideremos la armadura mostrada en la figura 6.12*a*. El diagrama de cuerpo libre del pasador en el nudo *D* se muestra en la figura 6.12*b*. Si se orienta el eje *y* a lo largo de los miembros *DC* y *DE* y el eje *x* a lo largo del miembro *DA*, se observa que *DA* es un miembro de fuerza cero. Nótese que esto también es el caso del miembro *CA*, figura 6.12*c*. En general, entonces, *si tres miembros constituyen un nudo de armadura para el que dos de los miembros son colineales, el tercer miembro es de fuerza cero, a condición de que no se aplique fuerza externa o reacción de apoyo en el nudo*. La armadura mostrada en la figura 6.12*d* es, por tanto, adecuada para soportar la carga **P**.

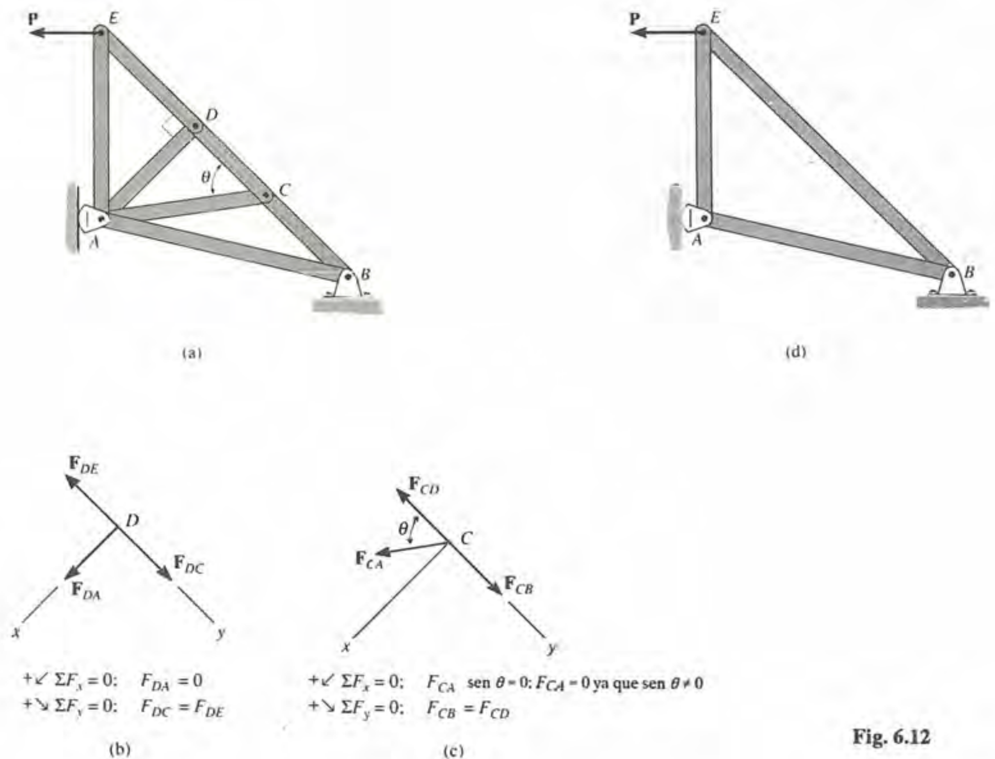
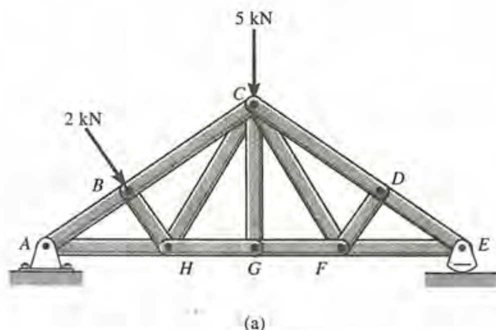


Fig. 6.12

http://librosysolucionarios.net

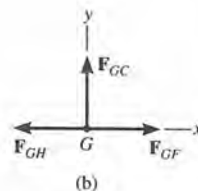
Ejemplo 6.4

Con el método de los nudos, determine todos los miembros de fuerza cero de la *armadura Fink* que se muestra en la figura 6.13*a*.

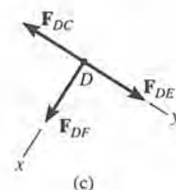


(a)

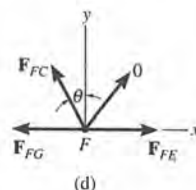
Fig. 6.13



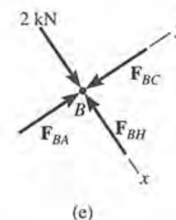
(b)



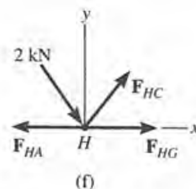
(c)



(d)



(e)



(f)

SOLUCIÓN

Si se buscan geometrías de nudos que se asemejen a las presentadas en las figuras 6.11 y 6.12, encontramos

Nudo G (figura 6.13*b*)

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\qquad F_{GC} = 0$ $\qquad$ ***Resp.***

Debe tenerse en cuenta de que no podríamos concluir que *GC* es un miembro de fuerza cero considerando el nudo *C*, donde hay cinco incógnitas. El hecho que *GC* sea un miembro de fuerza cero significa que la carga de 5 kN en *C* debe apoyarse en los miembros *CB*, *CH*, *CF*, y *CD*.

Nudo D (figura 6.13*c*)

$+\swarrow \Sigma F_x = 0;$ $\qquad F_{DF} = 0$ $\qquad$ ***Resp.***

Nudo F (figura 6.13*d*)

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $F_{FC} \cos\theta = 0$, ya que $\theta \neq 0$; $F_{FC} = 0$ $\qquad$ ***Resp.***

Nótese que si analizamos el nudo *B*, figura 6.13*e*,

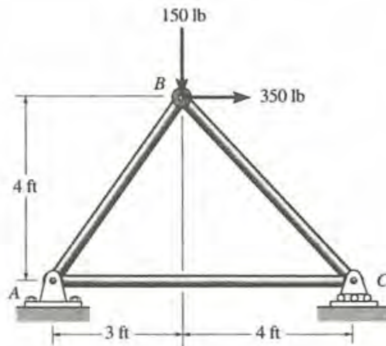
$+\searrow \Sigma F_x = 0; \quad 2 - F_{BH} = 0 \quad F_{BH} = 2\text{ kN} \quad \text{(C)}$

En consecuencia, el valor numérico de F_{HC} debe satisfacer $\Sigma F_y = 0$, figura 6.13*f* y, por tanto, *HC* no es un miembro de fuerza cero.

http://librosysolucionarios.net

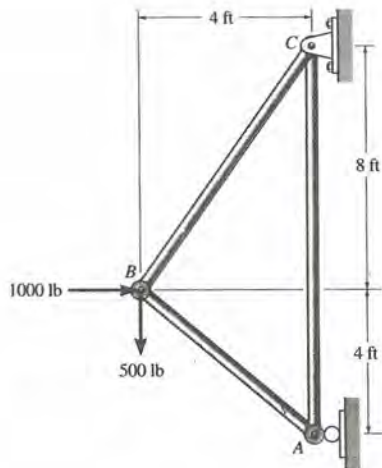
PROBLEMAS

6.1. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



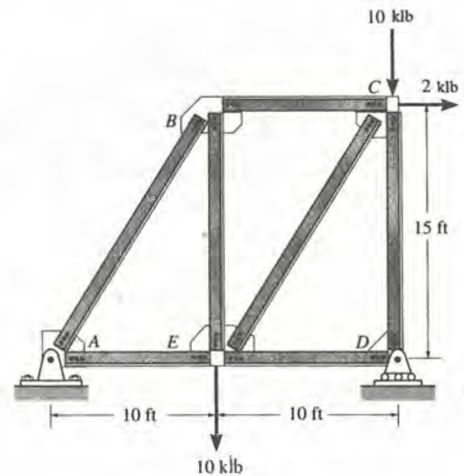
Prob. 6.1

6.2. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



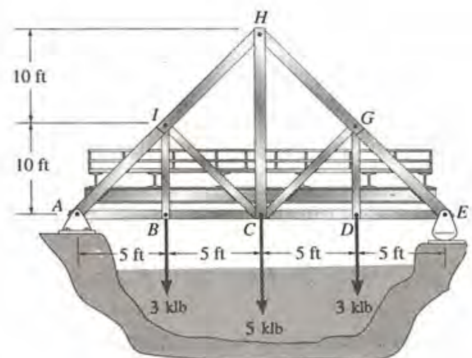
Prob. 6.2

6.3. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están sujetos por pasadores.



Prob. 6.3

* **6.4**. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura de estructura en forma de *A* utilizada para soportar la carga de la plataforma del puente mostrado e indique si los miembros están en tensión o en compresión.

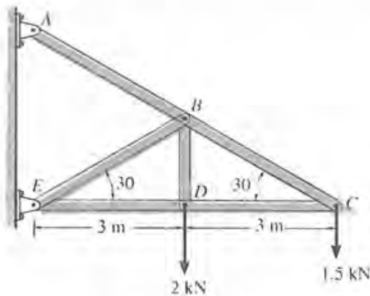


Prob. 6.4

http://librosysolucionarios.net

6.5. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.

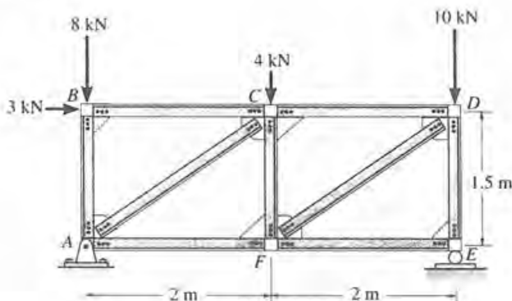
6.6. Cada miembro de la armadura es uniforme y tiene masa de 8 kg/m. Retírense las cargas externas y determínese la fuerza aproximada en cada miembro debida al peso de la armadura. Indique si los miembros están en tensión o en compresión. Resuelva el problema suponiendo que el peso de cada miembro puede representarse como una fuerza vertical, la mitad de la cual se aplica en cada extremo del miembro.



Probs. 6.5/6.6

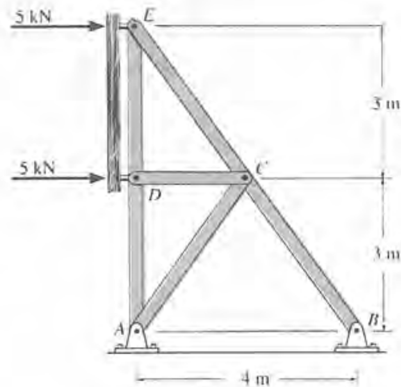
6.7. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.

* **6.8**. Cada miembro de la armadura es uniforme y tiene una masa de 8 kg/m. Quite las cargas externas y determine la fuerza aproximada en cada miembro debida al peso de la armadura. Indique si los miembros están en tensión o en compresión. Resuelva el problema suponiendo que el peso de cada miembro puede representarse como una fuerza vertical, la mitad de la cual se aplica en cada extremo del miembro. También, suponga que todos los miembros están articulados.



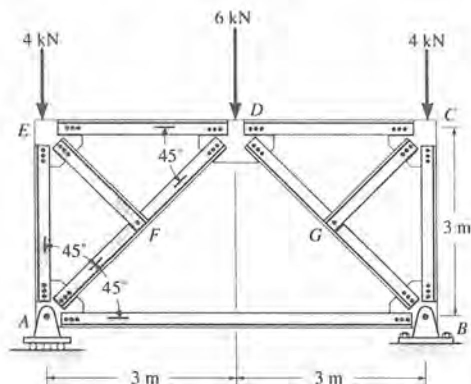
Probs. 6.7/6.8

6.9. El anuncio está parcialmente sujeto por medio de la armadura mostrada. El viento que actúa sobre una de las caras del anuncio transmite una carga de 5 kN a las juntas D y E de la armadura. Determine la fuerza en cada miembro e indique si éstos se encuentran en tensión o en compresión.



Prob. 6.9

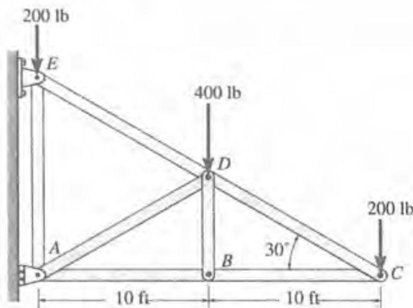
6.10. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique, para cada miembro, si está en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están sujetos por pasadores.



Prob. 6.10

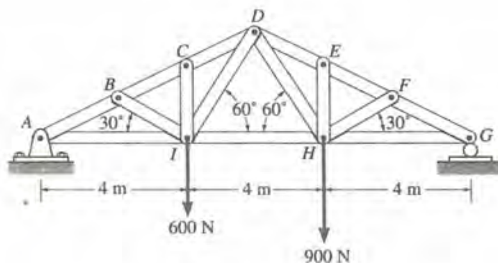
http://librosysolucionarios.net

6.11. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique para cada miembro, si está en tensión o en compresión.



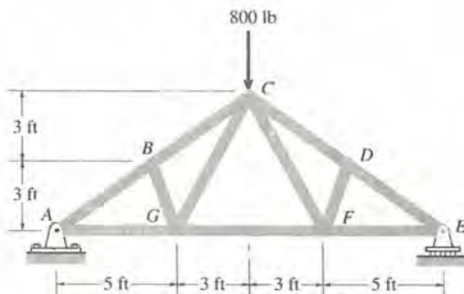
Prob. 6.11

*** 6.12.** Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



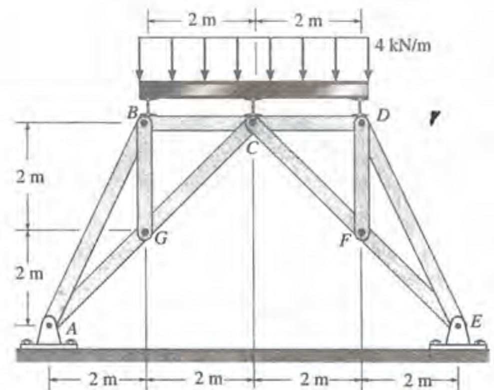
Prob. 6.12

6.13. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o compresión.



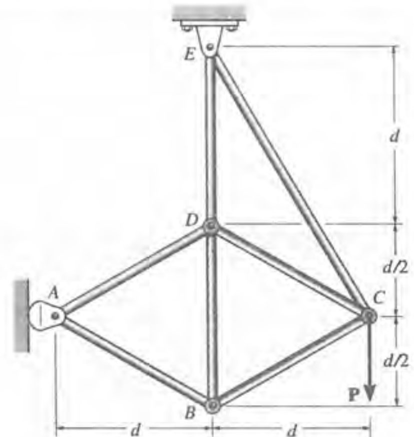
Prob. 6.13

6.14. La viga soportada por la armadura está sujeta a una carga uniformemente distribuida de 4 kN/m. Suponiendo que los 2 m centrales de la carga se apoyan en el nudo C y las partes restantes en los apoyos B y D, demuestre que la fuerza vertical en C debida a la carga distribuida es 8 kN y que en B y D la fuerza es 4 kN. Calcule entonces la fuerza en los miembros BC, GB, GC, GA, y AB, e indique si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia*: Inicie el análisis en el nudo G y demuéstre que la fuerza en el miembro GB es cero.



Prob. 6.14

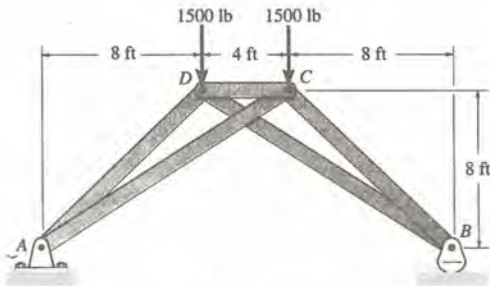
6.15. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura en términos de la carga **P**, e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.15

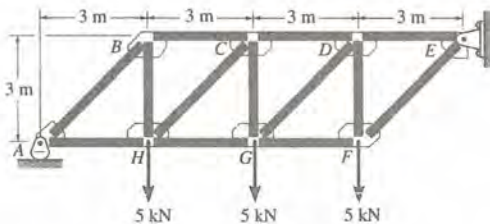
http://librosysolucionarios.net

*** 6.16**. Determine la fuerza en cada miembro e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



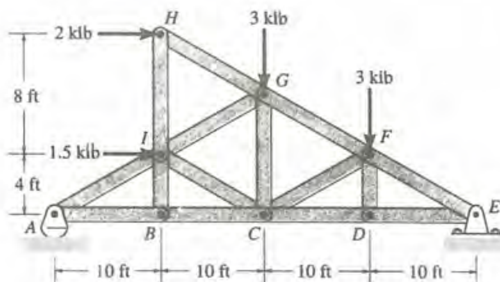
Prob. 6.16

6.17. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros se encuentran en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados.



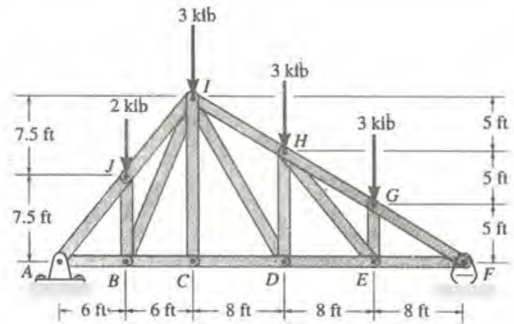
Prob. 6.17

6.18. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros se encuentran en tensión o en compresión.



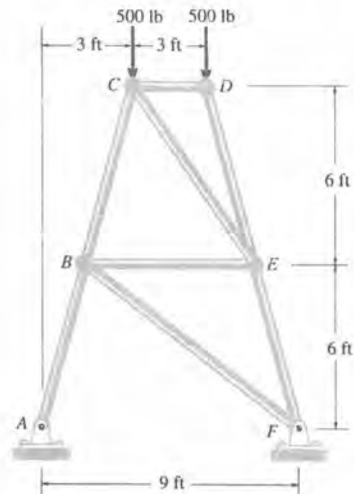
Prob. 6.18

6.19. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura para techo e indique si los miembros se encuentran en tensión o en compresión.



Prob. 6.19

*** 6.20**. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.20

http://librosysolucionarios.net

6.4 El método de las secciones

El *método de las secciones* se usa para determinar las cargas que actúan dentro de un cuerpo. Se basa en el principio de que si un cuerpo está en equilibrio, entonces cualquier parte del cuerpo está en equilibrio. Para aplicar este método, se pasa una sección *imaginaria* por el cuerpo, cortándolo así en dos partes. Cuando un diagrama de cuerpo libre de una de las partes sea trazado, las cargas que actúan en la sección deben ser incluidas en el diagrama de cuerpo libre; después, se aplican las ecuaciones de equilibrio a la parte para determinar la carga en la sección. Por ejemplo, consideremos los dos miembros de armadura en la figura 6.14. Las cargas internas en la sección indicadas por la línea punteada pueden obtenerse usando uno de los diagramas de cuerpo libre mostrados a la derecha. Claramente puede verse que el equilibrio requiere que el miembro en tensión esté sujeto a una "tracción" **T** en la sección, mientras que el miembro en compresión está sujeto a un "empuje" *C*.

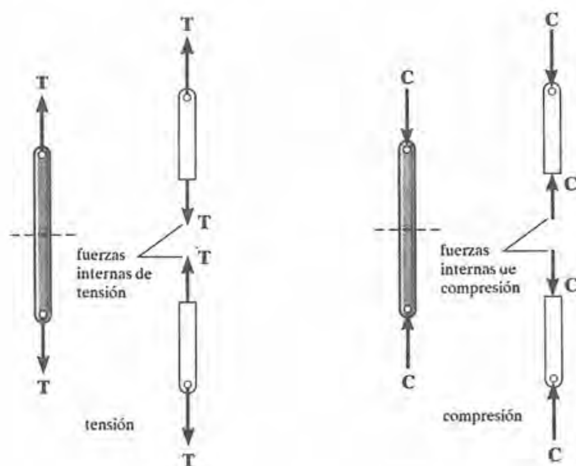


Fig. 6.14

El método de las secciones puede usarse también para "cortar" o seccionar varios miembros de una armadura entera. Si cualquiera de las dos partes de la armadura es aislada como diagrama de cuerpo libre podemos entonces aplicar las ecuaciones de equilibrio a esa parte para determinar las fuerzas en miembros en la "sección de corte". Como sólo pueden aplicarse *tres* ecuaciones de equilibrio independientes ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$,

http://librosysolucionarios.net

$\Sigma M_O = 0$) a la porción aislada de la armadura, uno trataría de escoger una sección que, en general, pase a través de no más de *tres* miembros en los cuales se desconozcan las fuerzas. Por ejemplo, consideremos la armadura de la figura 6.15*a*. Si se va a determinar la fuerza en el miembro *GC*, la sección *aa* sería la apropiada. En las figuras 6.15*b* y 6.15*c* se indican los diagramas de cuerpo libre de las dos partes. En particular, nótese que la línea de acción de la fuerza de cada miembro cortado se especifica según la *geometría* de la armadura, ya que la fuerza en el miembro pasa a lo largo del eje del miembro. También, las fuerzas en los miembros que actúan en una parte de la armadura son iguales en magnitud, pero opuestas a aquellas que actúan en la otra parte (tercera ley de Newton). Como se indica, los miembros que se supone están en *tensión* (*BC* y *GC*) están sujetos a un "tirón", mientras que los miembros en *compresión* (*GF*) se sujetan a un "empuje".

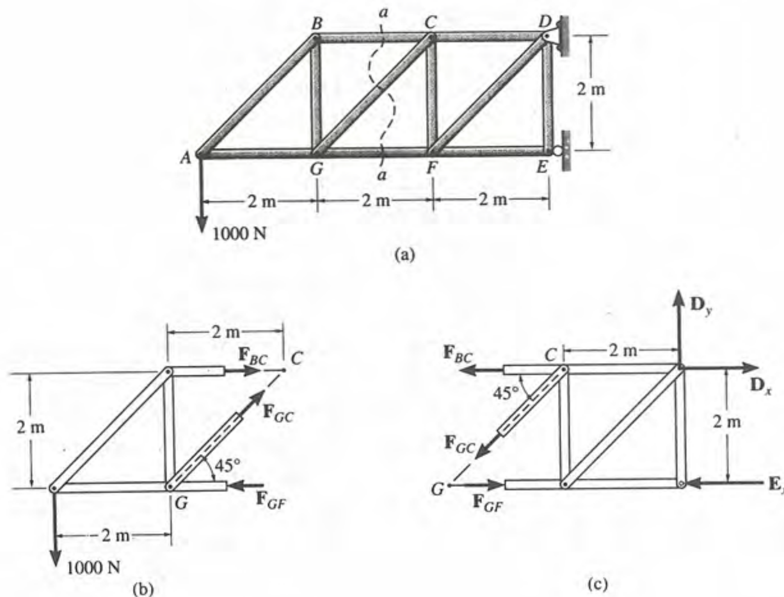


Fig. 6.15

http://librosysolucionarios.net

Las tres fuerzas en miembros desconocidas $\mathbf{F}_{BC}$, $\mathbf{F}_{GC}$ y $\mathbf{F}_{GF}$ pueden obtenerse aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de la figura 6.15*b*. Sin embargo, si se considera el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.15*c*, tendrán que determinarse *primero* las reacciones en los apoyos $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ y $\mathbf{E}_x$. ¿Por qué? (Esto, por supuesto, se hace de la manera usual considerando un diagrama de cuerpo libre de *toda la armadura*). Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se debe considerar formas de escribir las ecuaciones de tal manera que conduzcan a una *solución directa* para cada una de las incógnitas, para no tener que resolver ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, sumando momentos con respecto a C en la figura 6.15*b* se obtiene como resultado una *solución directa* para $\mathbf{F}_{GF}$, ya que $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}_{GC}$ producen momento cero con respecto a C. Análogamente, $\mathbf{F}_{BC}$ puede obtenerse directamente sumando momentos con respecto a G. Finalmente, $\mathbf{F}_{GC}$ puede obtenerse directamente a partir de una suma de fuerzas en la dirección vertical, ya que $\mathbf{F}_{GF}$ y $\mathbf{F}_{BC}$ no tienen componentes verticales. Esta capacidad de *determinar directamente* la fuerza en un miembro particular de la armadura es una de las principales ventajas del uso del método de secciones.*

Como en el método de los nudos, hay dos formas de determinar el sentido correcto de una fuerza de miembro desconocida.

1. *Suponga siempre* que las fuerzas desconocidas en miembros en la sección de corte se encuentran en tensión, es decir, "ejerciendo tracción" sobre el miembro. Al hacerlo, la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio dará *escalares positivos para miembros en tensión y escalares negativos para miembros en compresión*.
2. El sentido correcto de una fuerza en un miembro puede en muchos casos determinarse por "inspección". Por ejemplo, $\mathbf{F}_{BC}$ es una fuerza de tensión en su representación en la figura 6.15*b*, pues el equilibrio de momentos respecto a G requiere que $\mathbf{F}_{BC}$ cree un momento opuesto al de la fuerza de 1000 N. También, $\mathbf{F}_{GC}$ es de tensión, pues su componente vertical debe equilibrar la fuerza de 1000 N que actúa hacia abajo. En casos más complicados, el sentido de una fuerza desconocida en un miembro puede ser *supuesto*. Si la solución da un escalar *negativo*, ello indica que el sentido de la fuerza es el *contrario* al que se muestra en el diagrama de cuerpo libre. Éste es el método que usaremos en los siguientes problemas de ejemplo.

*En comparación, si se usara el método de los nudos para determinar, digamos, la fuerza en el miembro GC, sería necesario analizar sucesivamente los nudos A, B, y G.

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento proporciona un medio en el que se aplica el método de las secciones, para determinar las fuerzas en los miembros de una armadura.

Diagrama de cuerpo libre. Tome una decisión en cuanto a cómo "cortar" o seccionar la armadura a través de los miembros donde se determinarán las fuerzas. Antes de aislar la sección adecuada, primero es necesario determinar las reacciones *exteriores* de la armadura, de modo que las ecuaciones de equilibrio se usen *solamente* para resolver las fuerzas en los miembros de la sección cortada. Trace un diagrama de cuerpo libre de la parte de la armadura seccionada que tenga el menor número de fuerzas actuando sobre ella. Use uno de los dos métodos antes descritos para establecer el sentido de una fuerza en un miembro desconocida.

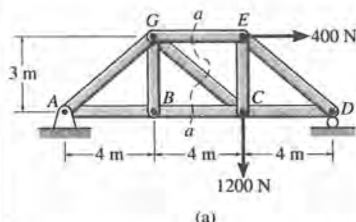
Ecuaciones de equilibrio. Trate de aplicar las tres ecuaciones de equilibrio de tal forma que se evite resolver mediante ecuaciones simultáneas. En relación con esto, deben tomarse momentos con respecto a un punto que se localice en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas, de manera que la tercera fuerza desconocida se determine directamente a partir de la ecuación de momentos. Si dos de las fuerzas desconocidas son *paralelas*, pueden sumarse fuerzas en una dirección *perpendicular* a la de esas fuerzas desconocidas para determinar *directamente* la tercera fuerza desconocida.

Los ejemplos siguientes ilustran numéricamente estos conceptos.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.5

Determine la fuerza en los miembros *GE*, *GC* y *BC* de la armadura mostrada en la figura 6.16*a*. Indique si los miembros están en tensión o compresión.



(a)

SOLUCIÓN

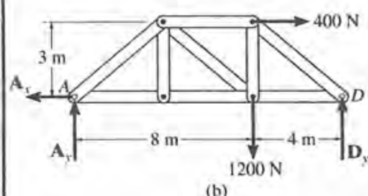
Se ha escogido la sección *aa* de la figura 6.16*a*, ya que pasa a través de los *tres* miembros cuyas fuerzas se van a determinar. Sin embargo, para usar el método de las secciones, es necesario *primero* determinar las reacciones exteriores en *A* o en *D*. ¿Por qué? En la figura 6.16*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\qquad 400\text{ N} - A_x = 0 \qquad A_x = 400\text{ N}$

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;\quad -1200\text{ N}(8\text{ m}) - 400\text{ N}(3\text{ m}) + D_y(12\text{ m}) = 0$

$$D_y = 900\text{ N}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\qquad A_y - 1200\text{ N} + 900\text{ N} = 0 \quad A_y = 300\text{ N}$



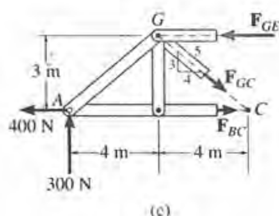
(b)

Diagramas de cuerpo libre. En las figuras 6.16*c* y 6.16*d* se muestran los diagramas de cuerpo libre de la armadura seccionada. Para el análisis se usará el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.16*c*, ya que involucra el menor número de fuerzas.

Ecuaciones de equilibrio. Al sumar los momentos alrededor del punto *G* se elimina $\mathbf{F}_{GE}$ y $\mathbf{F}_{GC}$ y se obtiene como resultado una solución directa para F_{BC}.

$\circlearrowleft +\Sigma M_G = 0;\quad -300\text{ N}(4\text{ m}) - 400\text{ N}(3\text{ m}) + F_{BC}(3\text{ m}) = 0$

$F_{BC} = 800\text{ N}\quad \text{(T)}$ ***Resp.***

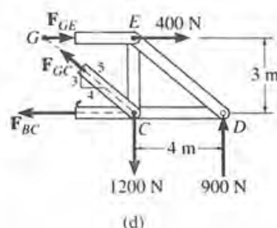


(c)

De la misma manera, sumando los momentos con respecto al punto *C*, se obtiene una solución directa para F_{GE}

$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;\qquad -300\text{ N}(8\text{ m}) + F_{GE}(3\text{ m}) = 0$

$F_{GE} = 800\text{ N}\quad \text{(C)}$ ***Resp.***



(d)

Como $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}_{GE}$ no tienen componentes verticales, la suma de fuerzas en la dirección *y* conduce directamente al valor de F_{GC}; es decir,

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\qquad 300\text{ N} - \frac{3}{5}F_{GC} = 0$

$F_{GC} = 500\text{ N}\quad \text{(T)}$ ***Resp.***

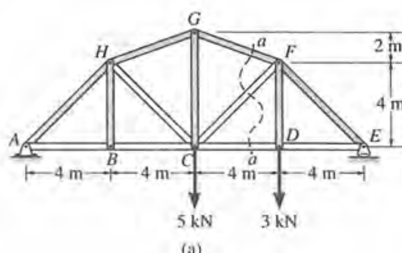
Obtenga estos resultados aplicando las ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 6.16*d*.

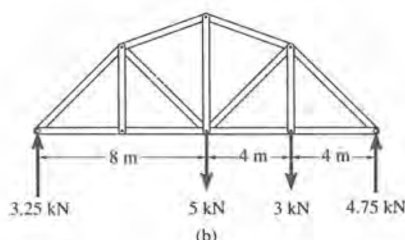
Fig. 6.16

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.6

Determine la fuerza en el miembro CF de la armadura mostrada en la figura 6.17*a*. Indique si el miembro está en tensión o en compresión.





SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La sección *aa* en la figura 6.17*a* será utilizada, ya que dicha sección "expondrá" la fuerza interna en el miembro CF como "externa" en el diagrama de cuerpo libre, tanto de la porción derecha como de la porción izquierda de la armadura. Sin embargo, es necesario determinar primero las reacciones externas, tanto del lado derecho como del lado izquierdo de la armadura. Verifique los resultados mostrados en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.17*b*.

El diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la armadura, que es la más fácil de analizar, se muestra en la figura 6.17*c*. Hay tres incógnitas, F_{FG}, F_{CF} y F_{CD}.

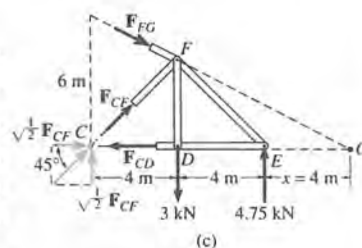


Fig. 6.17

Ecuaciones de equilibrio. El método más directo para resolver este problema requiere una aplicación de la ecuación de momentos respecto a un punto que elimine dos de las fuerzas desconocidas. Así, para obtener $\mathbf{F}_{CF}$, eliminaremos $\mathbf{F}_{FG}$ y $\mathbf{F}_{CD}$ mediante suma de momentos respecto al punto O, figura 6.17*c*. Nótese que la localización del punto O midiendo desde E se determina por medio de triángulos proporcionales, es decir, $4/(4+x) = 6/(8+x)$, $x = 4$ m. O, dicho de otra forma, la pendiente del miembro GF es un descenso de 2 m por una distancia horizontal de $CD = 4$ m. Ya que FD es 4 m, figura 6.17*c*, entonces desde D hasta O la distancia debe ser 8 m.

Una manera fácil de determinar el momento de $\mathbf{F}_{CF}$ respecto al punto O es resolver $\mathbf{F}_{CF}$ en sus dos componentes rectangulares y entonces usar el principio de transmisibilidad para mover $\mathbf{F}_{CF}$ al punto C. Tenemos

$$\curvearrowleft +\Sigma M_O = 0; \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}F_{CF}(12\text{ m}) + (3\text{ kN})(8\text{ m}) - (4.75\text{ kN})(4\text{ m}) = 0$$

$$F_{CF} = 0.589\text{ kN} \quad \text{(C)} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.7

Determine la fuerza en el miembro EB de la armadura mostrada en la figura 6.18a. Indique si el miembro está en tensión o en compresión.

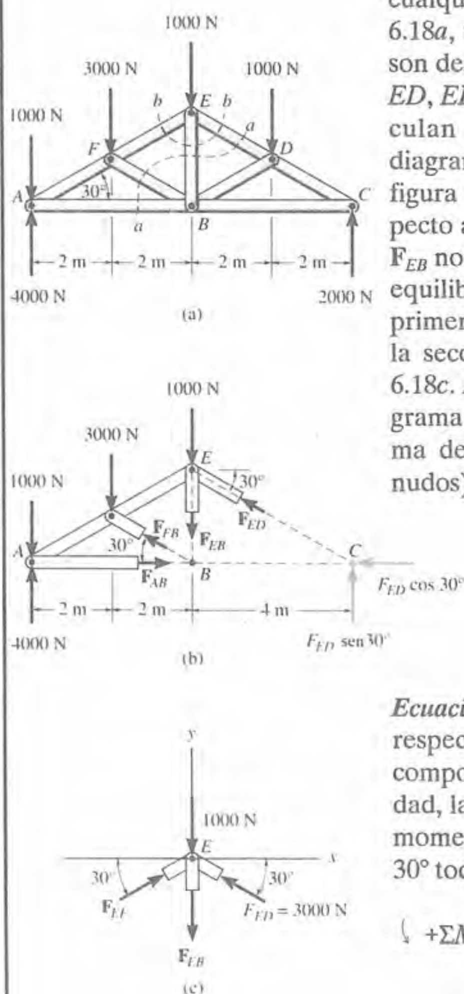


Fig. 6.18

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Por el método de las secciones, cualquier sección vertical imaginaria que corte EB, figura 6.18a, también tendrá que cortar otros tres miembros en que son desconocidas las fuerzas. Por ejemplo, la sección aa corta ED, EB, FB y AB. Si las componentes de reacción en A se calculan primero ($A_x = 0$, $A_y = 4000$ N) y se considera un diagrama de cuerpo libre del lado izquierdo de esta sección, figura 6.18b, es posible obtener $\mathbf{F}_{ED}$, sumando momentos respecto a B para eliminar las otras tres incógnitas; sin embargo, $\mathbf{F}_{EB}$ no puede determinarse de las dos restantes ecuaciones de equilibrio. Una manera posible de obtener $\mathbf{F}_{EB}$ es determinar primero $\mathbf{F}_{ED}$ de la sección aa, y después usar este resultado en la sección bb, figura 6.18a, lo que se muestra en la figura 6.18c. Aquí el sistema de fuerzas es concurrente y nuestro diagrama seccionado de cuerpo libre es el mismo que el diagrama de cuerpo libre para el pasador en E (método de los nudos).

Ecuaciones de equilibrio. Para determinar el momento de $\mathbf{F}_{ED}$ respecto a B, figura 6.18b, resolveremos la fuerza en sus componentes rectangulares y, por el principio de transmisibilidad, la extenderemos hasta el punto C, como se muestra. Los momentos de las fuerzas de 1 000 N, F_{AB}, F_{FB}, F_{EB}, y F_{ED} cos 30° todos son nulos respecto a B. Por tanto,

$$\curvearrowleft +\Sigma M_B = 0; \quad 1000(4) + 3000(2) - 4000(4) + F_{ED} \text{ sen } 30°(4) = 0$$
$$F_{ED} = 3000 \text{ N} \quad \text{(C)}$$

Considerando ahora el diagrama de cuerpo libre de la sección bb, figura 6.18c, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad F_{EF} \cos 30° - 3000 \cos 30° = 0$$
$$F_{EF} = 3000 \text{ N} \quad \text{(C)}$$

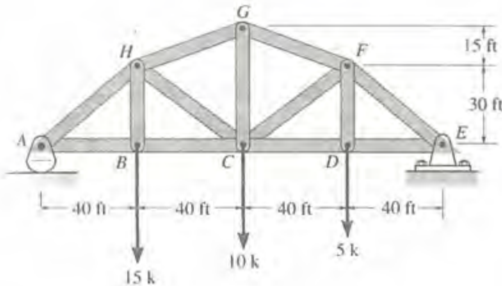
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2(3000 \text{ sen } 30°) - 1000 - F_{EB} = 0$$
$$F_{EB} = 2000 \text{ N} \quad \text{(T)}$$

Resp.

http://librosysolucionarios.net

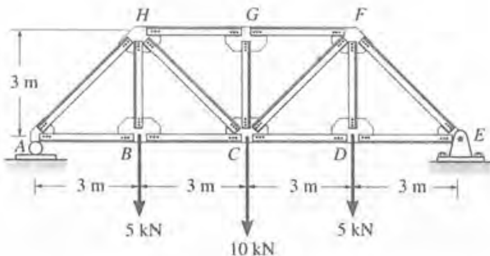
PROBLEMAS

6.21. Determine la fuerza en los miembros *GF*, *FC*, y *CD* de la armadura de puente e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



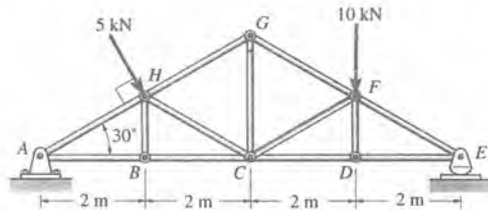
Prob. 6.21

6.22. Determine la fuerza en los miembros *HG*, *GC*, y *HC* de la armadura e indique si los miembros está en tensión o en compresión.



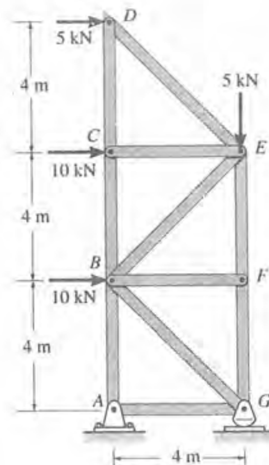
Prob. 6.22

6.23. Determine la fuerza en los miembros *CF* y *GC* de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.23

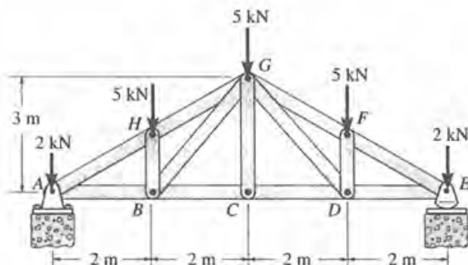
*6.24. Determine la fuerza en los miembros *BE* y *EF* de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión. Luego de seccionar la armadura, resuelva para obtener *directamente* cada fuerza, usando una sola ecuación de equilibrio para determinar cada fuerza.



Prob. 6.24

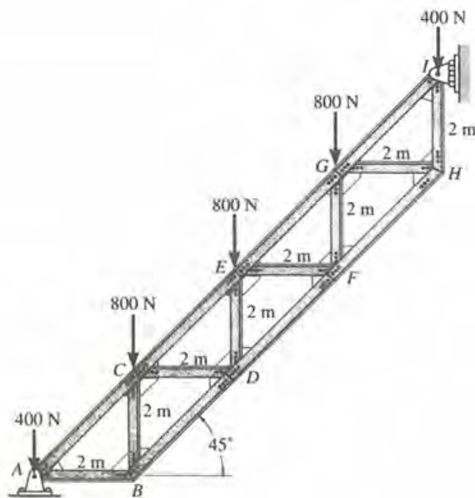
http://librosysolucionarios.net

6.25. La armadura *Howe* está sujeta a las cargas mostradas. Determine la fuerza en los miembros *GF*, *CD*, y *GC* e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.25

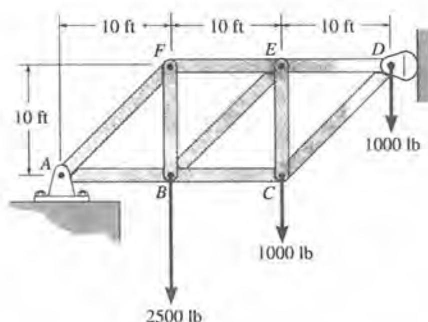
6.26. La armadura *Warren* es utilizada para soportar una escalera. Determine la fuerza en los miembros *CE*, *ED*, y *DF* e indique si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todas las uniones son articuladas.



Prob. 6.26

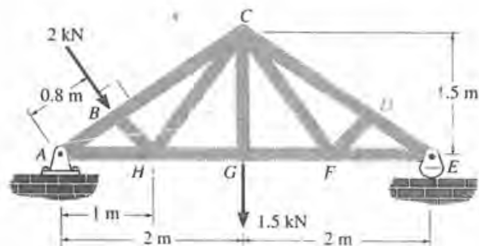
6.27. Determine la fuerza en los miembros *CE*, *FE*, y *CD* e indique si los miembros están en tensión o en compresión.

***6.28**. Determine la fuerza en los miembros *BC*, *EB*, y *AF* e indique en cada caso, si el miembro está en tensión o en compresión.



Probs. 6.27/6.28

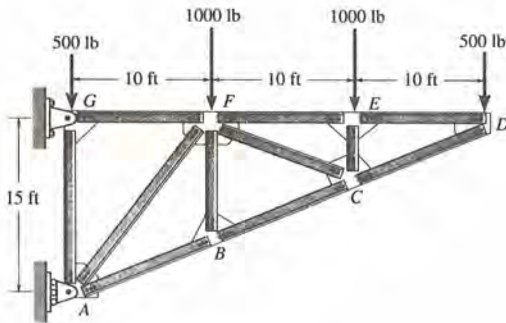
6.29. Determine la fuerza desarrollada en los miembros *BC* y *CH* de la armadura de techo e indique para cada miembro si es de tensión o de compresión.



Prob. 6.29

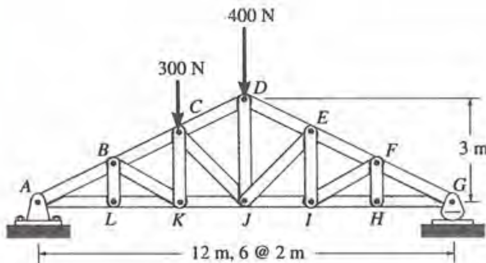
http://librosysolucionarios.net

6.30. Determine la fuerza en los miembros *FE*, *FB*, y *BC* de la armadura e indique en cada caso si es de tensión o si es de compresión. Luego de seccionar la armadura, resuelva para obtener cada fuerza *directamente*, usando una sola ecuación de equilibrio para cada fuerza. Suponga que todas las uniones son articuladas.



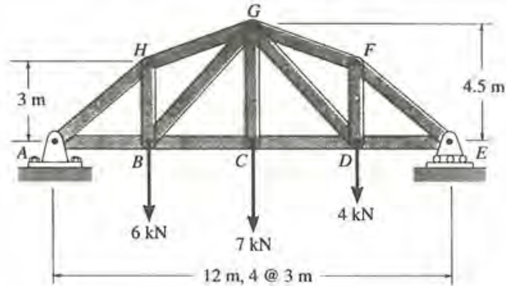
Prob. 6.30

6.31. Para las cargas que se dan, determine la fuerza en los miembros *CD*, *CJ*, y *KJ* de la *armadura de techo Howe*. Indique, para cada miembro, si está en tensión o en compresión.



Prob. 6.31

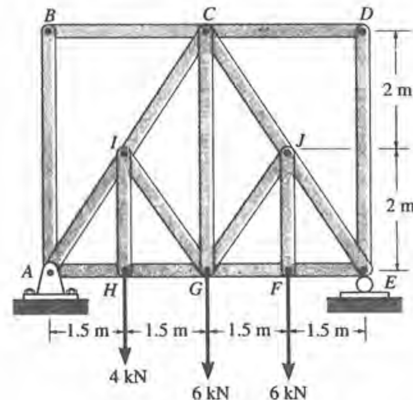
*** 6.32**. Determine la fuerza en los miembros *BG*, *HG*, y *BC* de la armadura e indique para cada miembro, si está en tensión o está en compresión.



Prob. 6.32

6.33. Indique todos los miembros de fuerza cero, determine luego la fuerza en los miembros *IC* y *CG* de la armadura e indique si están en tensión o en compresión.

6.34. Indique todos los miembros de fuerza cero y determine en seguida la fuerza en los miembros *JE* y *GF* de la armadura, indicando también si está en tensión o en compresión.

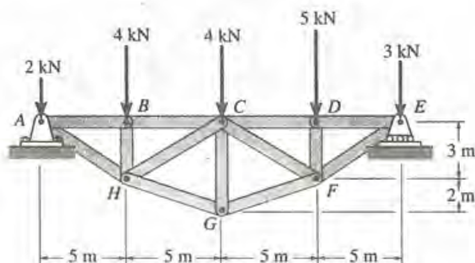


Probs. 6.33/6.34

http://librosysolucionarios.net

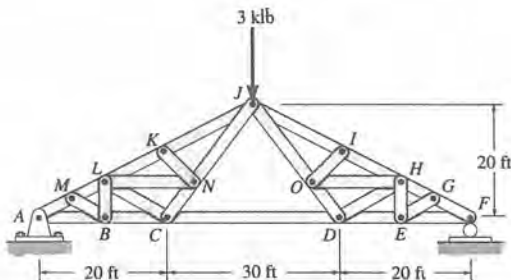
6.35. Determine la fuerza en los miembros *BC*, *HC* y *HG* e indique si están en tensión o en compresión. Luego de seccionar la armadura, use una sola ecuación de equilibrio para obtener cada fuerza.

***6.36**. Determine la fuerza en los miembros *CD*, *CF*, y *CG* e indique si están en tensión o en compresión.



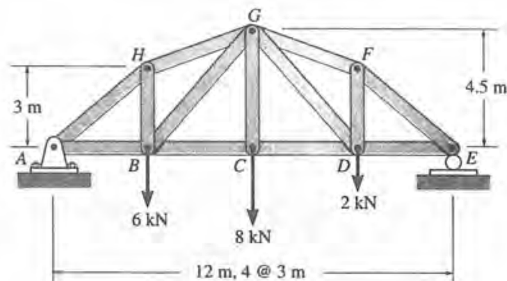
Probs. 6.35/6.36

6.37. Determine la fuerza en los miembros *KJ*, *JN*, y *CD* e indique si están en tensión o en compresión.



Prob. 6.37

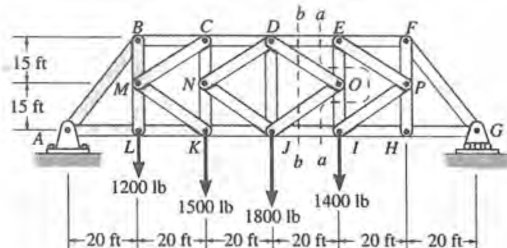
6.38. Determine la fuerza en los miembros *GF* y *GD* de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.38

6.39. Determine la fuerza en los miembros *DE*, *JI*, y *DO* de la *armadura K* e indique si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia*: Use las secciones *aa* y *bb*.

***6.40**. Determine la fuerza en los miembros *CD* y *KJ* de la *armadura K* e indique si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia*: obsérvese que la sección *aa* puede ser usada para encontrar la fuerza en los miembros *DE* y *JI*.



Probs. 6.39/6.40

http://librosysolucionarios.net

*6.5 Armaduras espaciales

Una *armadura espacial* consiste en miembros unidos en sus extremos para formar una estructura estable de tres dimensiones. El elemento más simple de una armadura espacial es un *tetraedro*, formado al conectar seis miembros, como se muestra en la figura 6.19. Cualquier miembro adicional añadido a este elemento básico sería redundante para soportar la fuerza **P**. Una *armadura espacial simple* puede construirse a partir de este elemento tetraédrico básico añadiendo tres miembros adicionales y una unión, formando un sistema de tetraedros multiconectados.



Fig. 6.19

Hipótesis para diseño. Los miembros de una armadura espacial pueden tratarse como miembros de dos fuerzas, con tal de que las cargas exteriores se apliquen en las uniones y éstas sean articulaciones de rótula. Estas hipótesis se justifican si las conexiones soldadas o remachadas de los miembros unidos se intersecan en un punto común y se puede pasar por alto el peso de los miembros. En los casos en los que se incluirá el peso de un miembro en el análisis, generalmente es satisfactorio aplicarlo como una fuerza vertical, aplicando la mitad de su magnitud en cada extremo del miembro.

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Cualquiera de los métodos, el de las secciones o el de los nudos, puede usarse para determinar las fuerzas desarrolladas en los miembros de una armadura espacial simple.

Método de las secciones. Si solamente se determinarán *unos cuantos* miembros, puede usarse el método de las secciones. Cuando una sección imaginaria pasa a través de una armadura y ésta se separa en dos partes, el sistema de fuerzas que actúa sobre una de las partes debe satisfacer las *seis* ecuaciones escalares de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ (ecuaciones 5.6). Mediante una elección adecuada de la sección y de los ejes, para sumar fuerzas y momentos, pueden calcularse *directamente* muchas de las fuerzas en miembros desconocidas en una armadura espacial, usando una sola ecuación de equilibrio.

Método de los nudos. Generalmente, si deben determinarse las fuerzas en *todos* los miembros de la armadura, el método de los nudos es el más adecuado para el análisis. Cuando se usa el método de los nudos, es necesario resolver las tres ecuaciones escalares de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$, en cada nudo. La solución de numerosas ecuaciones simultáneas puede evitarse si el análisis de fuerzas comienza en un nudo que tenga por lo menos una fuerza conocida y, cuando más, tres fuerzas desconocidas. Si la geometría tridimensional del sistema de fuerzas en el nudo es difícil de visualizar, se recomienda que se usen vectores cartesianos en la solución.

El ejemplo siguiente ilustra numéricamente este procedimiento.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.8

Determine las fuerzas que actúan en cada uno de los miembros de la armadura espacial mostrada en la figura 6.20*a*. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.

SOLUCIÓN

Ya que una fuerza conocida y tres fuerzas desconocidas actúan en la unión *A*, el análisis de fuerzas de la armadura comenzará en el nudo *A*.

Nudo A (figura 6.20*b*). Expresando cada una de las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre del nudo *A* en notación vectorial, se llega a

$$\mathbf{P} = \{-4\mathbf{j}\}\ \text{kN}, \qquad \mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\mathbf{j}, \qquad \mathbf{F}_{AC} = -F_{AC}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{F}_{AE} = F_{AE}\left(\frac{\mathbf{r}_{AE}}{r_{AE}}\right) = F_{AE}(0.577\mathbf{i} + 0.577\mathbf{j} - 0.577\mathbf{k})$$

Para equilibrio,

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{P} + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{F}_{AE} = \mathbf{0}$$

$$-4\mathbf{j} + F_{AB}\mathbf{j} - F_{AC}\mathbf{k} + 0.577F_{AE}\mathbf{i} + 0.577F_{AE}\mathbf{j} - 0.577F_{AE}\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma F_x = 0; \qquad 0.577F_{AE} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -4 + F_{AB} + 0.577F_{AE} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad -F_{AC} - 0.577F_{AE} = 0$$

$$F_{AC} = F_{AE} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_{AB} = 4\ \text{kN}\ \ (\text{T}) \qquad \textit{Resp.}$$

Como se conoce $\mathbf{F}_{AB}$, el nudo *B* se puede analizar en seguida.

Nudo B (figura 6.20*c*)

$$\Sigma F_x = 0; \qquad -R_B \cos 45° + 0.707F_{BE} = 0$$

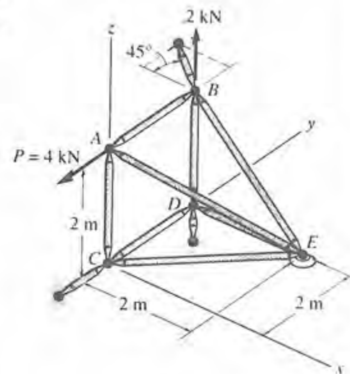
$$\Sigma F_y = 0; \qquad -4 + R_B \operatorname{sen} 45° = 0$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad 2 + F_{BD} - 0.707F_{BE} = 0$$

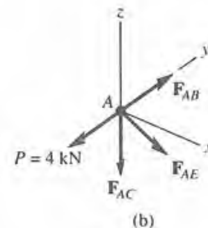
$$R_B = F_{BE} = 5.66\ \text{kN}\ \ (\text{T}), \quad F_{BD} = 2\ \text{kN}\ (\text{C}) \qquad \textit{Resp.}$$

Las ecuaciones *escalares* de equilibrio pueden aplicarse directamente a los sistemas de fuerzas indicados sobre los diagramas de cuerpo libre de los nudos *D* y *C*, ya que las componentes de las fuerzas se determinan fácilmente. Se demuestra que

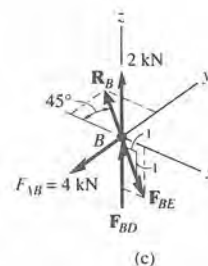
$$F_{DE} = F_{DC} = F_{CE} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$



(a)



(b)



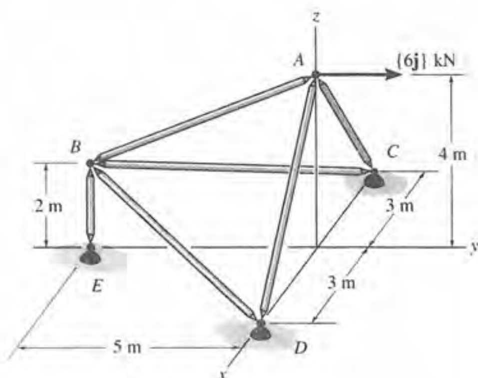
(c)

Fig. 6.20

http://librosysolucionarios.net

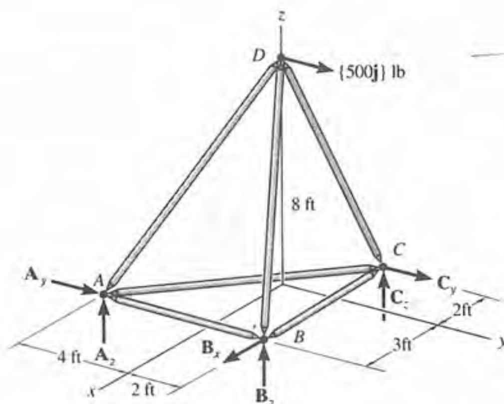
PROBLEMAS

6.41. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial e indique para cada miembro si está en tensión o en compresión.



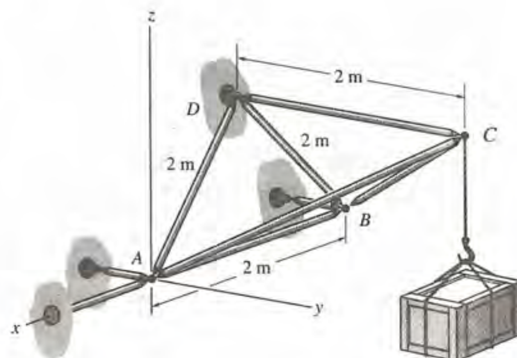
Prob. 6.41

6.42. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial e indique si los miembros están en tensión o en compresión. Las reacciones de soporte en A, B, C deben determinarse.



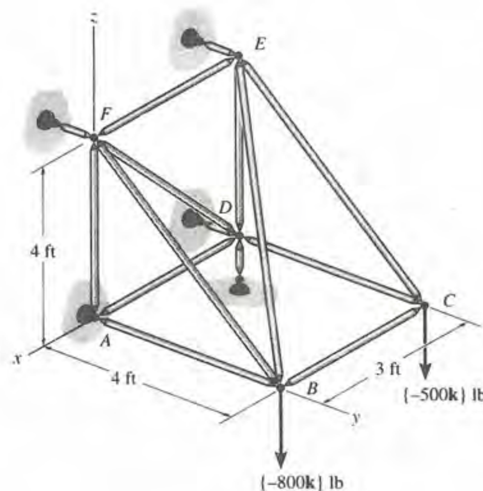
Prob. 6.42

6.43. Determine la fuerza en cada miembro de la estructura espacial e indique si los miembros están en tensión o en compresión. La masa del huacal es de 50 kg.



Prob. 6.43

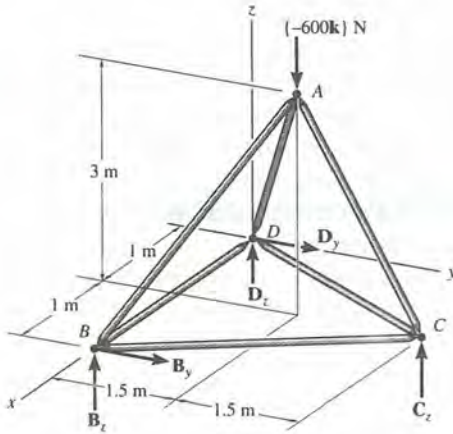
* **6.44**. La armadura espacial está soportada en A por una articulación de rótula y eslabones cortos en D, E, y F. Determine la fuerza en cada miembro e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.44

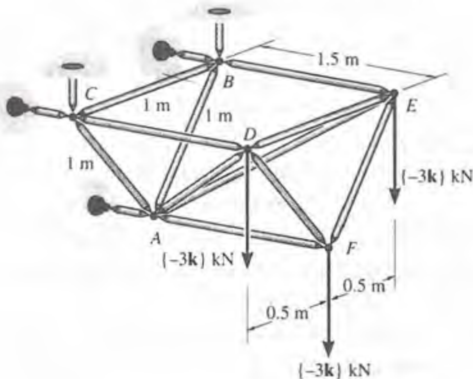
http://librosysolucionarios.net

6.45. Determine la fuerza en cada miembro de la estructura espacial cuando la unión A se encuentra sujeta a la fuerza de 600 N. Indique si los miembros están en tensión o en compresión. Las reacciones de apoyo en B, C, y D están indicadas.



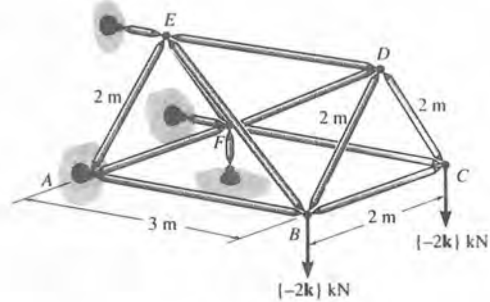
Prob. 6.45

6.46. La armadura espacial se usa para soportar fuerzas verticales en los nudos D, E y F. Determine la fuerza desarrollada en cada miembro e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



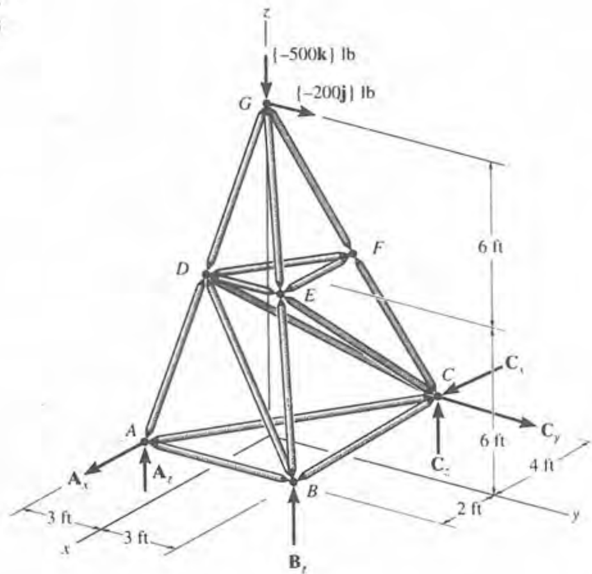
Prob. 6.46

6.47. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.47

***6.48.** Determine la fuerza en los miembros FE y ED de la armadura espacial e indique si los miembros están en tensión o en compresión. Se indican las reacciones de apoyo en A, B y C.



Prob. 6.48

http://librosysolucionarios.net

6.6 Marcos y máquinas

Los marcos y las máquinas son dos tipos comunes de estructuras que a menudo se componen de *miembros multiforzados unidos por articulaciones*; es decir, miembros que están sujetos a más de dos fuerzas. Los marcos (o bastidores) son generalmente estacionarios y se utilizan para soportar cargas, mientras que las *máquinas* contienen partes móviles y se diseñan para transmitir y alterar el efecto de las fuerzas. En caso de que un marco o una máquina esté adecuadamente restringido y no contenga más apoyos o miembros que los necesarios, para impedir el desplome, entonces las fuerzas que actúan en los nudos y en los apoyos pueden determinarse aplicando las ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_O = 0$) a cada miembro. Una vez que se han obtenido las fuerzas en los nudos, es posible *diseñar* el tamaño de los miembros, las uniones y los apoyos, usando la teoría de la mecánica de materiales y un código apropiado de diseño de ingeniería.

Diagramas de cuerpo libre. Para determinar las fuerzas que actúan en las uniones o los apoyos de un bastidor o una máquina hay que desarmar la estructura y trazar los diagramas de cuerpo libre de sus partes. Al respecto, *deben* observarse los siguientes puntos:

1. Aísle cada parte dibujando el *contorno de su forma*. Mostrar entonces todas las fuerzas y/o momentos de par que actúan sobre la parte en cuestión. Deben *etiquetarse* o *identificarse* todas las fuerzas y momentos de par conocidos y desconocidos e indicar las dimensiones usadas para tomar momentos. Por lo general, es más fácil aplicar las ecuaciones de equilibrio si se representan las fuerzas por sus componentes rectangulares. Como de costumbre, pueden suponerse los sentidos de las fuerzas y los momentos que se desconozcan.
2. Identifique todos los miembros de dos fuerzas en la estructura, y representar sus diagramas de cuerpo libre con dos fuerzas iguales, pero opuestas y que actúan en sus puntos de aplicación. La línea de acción de las fuerzas se define como la que une los puntos de aplicación de las fuerzas (véase la sección 5.4). Reconociendo los miembros de dos fuerzas, podemos evitar resolver un número innecesario de ecuaciones de equilibrio, (Véase el ejemplo 6.14).
3. Las fuerzas comunes a dos miembros en *contacto* cualesquiera actúan con la misma magnitud, pero sentidos opuestos en los miembros respectivos. Si los dos miembros son considerados como un *"sistema" de miembros conectados*, en-

http://librosysolucionarios.net

tonces estas fuerzas son *"internas"* y *no mostradas* en el *diagrama de cuerpo libre del sistema*; sin embargo, si se traza el diagrama de cuerpo libre de *cada miembro*, las fuerzas son *"externas"* y se deben mostrar en cada diagrama de cuerpo libre.

Los ejemplos que siguen ilustran gráficamente la aplicación de estos puntos al trazado de diagramas de cuerpo libre de una máquina o un bastidor desmembrados. En todos los casos se hace caso omiso del peso de los miembros.

Ejemplo 6.9

Para el bastidor mostrado en la figura 6.21*a*, trace el diagrama de cuerpo libre de (*a*) cada miembro, (*b*) el pasador en *B*, y (*c*) dos miembros conectados entre sí.

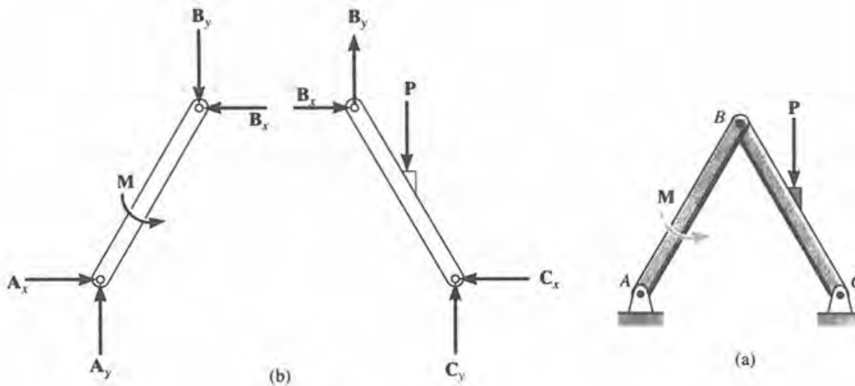


Fig. 6.21

SOLUCIÓN

Parte (*a*). Por inspección, se comprueba que los miembros *no* son miembros de dos fuerzas; en vez de eso, como se ve en los diagramas de cuerpo libre de la figura 6.21*b*, *BC* está sujeto a *tres fuerzas*, y *no* cinco; a saber: las *resultantes* de las dos componentes de reacción en los pasadores *B* y *C* y la fuerza externa **P**. Así también, *AB* está sujeto a las fuerzas reactivas de pasador en *A* y *B* y el momento externo de par **M**.

http://librosysolucionarios.net

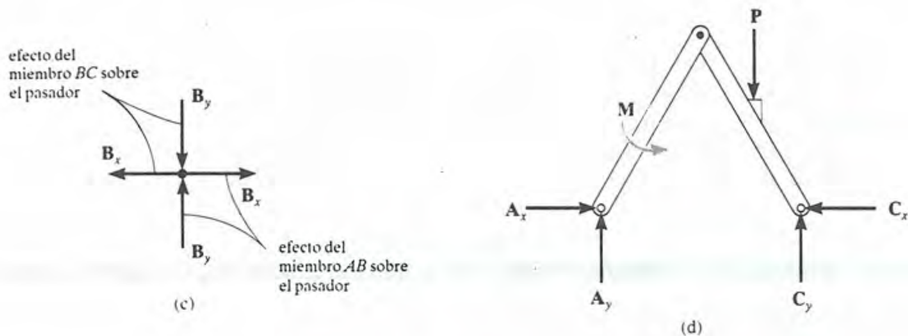


Fig. 6.21

Parte (*b*). Se puede ver en la figura 6.21*a* que el pasador en *B* está sujeto solamente a *dos fuerzas*, esto es, la fuerza del miembro *BC* sobre el pasador y la fuerza del miembro *AB* en el pasador. Para *equilibrio*, estas dos fuerzas y, por tanto, sus componentes respectivas deben ser iguales, pero opuestas, figura 6.21*c*. Obsérvese con atención cómo se aplica la tercera ley de Newton entre el pasador y sus miembros de contacto, esto es, el efecto del pasador sobre los dos miembros, figura 6.21*b*, y el efecto igual, pero opuesto, de los dos miembros sobre el pasador, figura 6.21*c*. También, obsérvese que $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$ que se muestran iguales, pero opuestas, en la figura 6.21*b* sobre los miembros *AB* y *BC* *no* es efecto de la tercera ley de Newton; antes bien, esto resulta del análisis de *equilibrio* del pasador, figura 6.21*c*.

Parte (*c*). El diagrama de cuerpo libre de ambos miembros conectados entre sí, pero retirados de los pasadores de apoyo *A* y *C*, se muestra en la figura 6.21*d*. Las componentes de fuerza $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$ *no se muestran* en este diagrama, pues constituyen parejas de fuerzas internas iguales, pero colineales opuestas (figura 6.21*b*) y, por tanto, se cancelan.* También, para ser consistentes al aplicar más tarde las ecuaciones de equilibrio, las componentes de fuerza desconocidas en *A* y en *C* deben actuar en el mismo sentido que las mostradas en la figura 6.21*b*.

* Esto se asemeja a la exclusión de las fuerzas internas ejercidas entre partículas adyacentes de un cuerpo rígido al trazar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo rígido entero.

http://librosysolucionarios.net

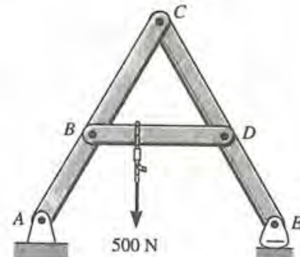
Ejemplo 6.10.

Para el bastidor mostrado en la figura 6.22*a*, trace el diagrama de cuerpo libre de (*a*) cada uno de los tres miembros, y (*b*) los miembros *ABC* y *BD* en conjunto.

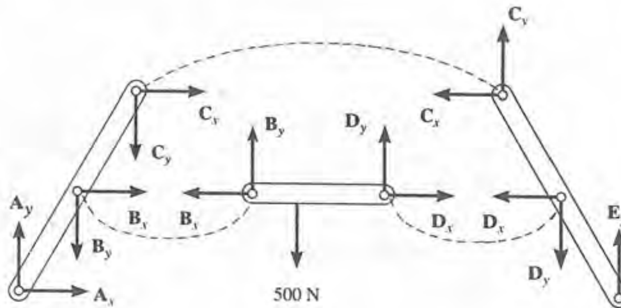
SOLUCIÓN

Parte (*a*). Por inspección, ninguno de los tres miembros del bastidor es miembro de dos fuerzas. Antes bien, cada uno de ellos está sujeto a tres fuerzas. Las componentes de estas fuerzas se muestran en los diagramas de cuerpo libre de la figura 6.22*b*. Obsérvese que en *B*, *C*, *D* ocurren fuerzas reactivas iguales pero opuestas. Trazar un diagrama de cuerpo libre de uno de los pasadores en *B*, *C*, o *D* y demuestre por qué es esto así.

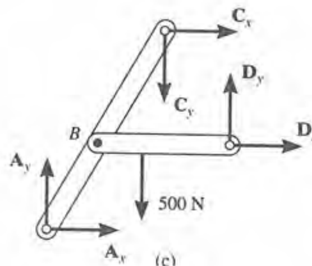
Parte (*b*). El diagrama de cuerpo libre de *ABC* y *BD* juntos se muestra en la figura 6.22*c*. Ya que el bastidor entero está en equilibrio, el sistema de fuerzas en estos dos miembros también satisface las ecuaciones de equilibrio. ¿Por qué no se muestran las fuerzas $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$ en este diagrama?



(a)



(b)



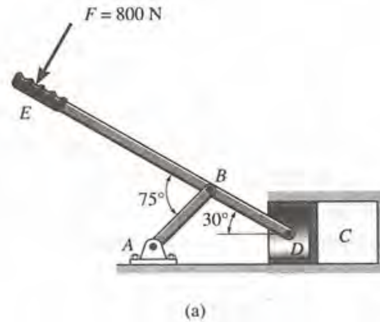
(c)

Fig. 6.22

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.11

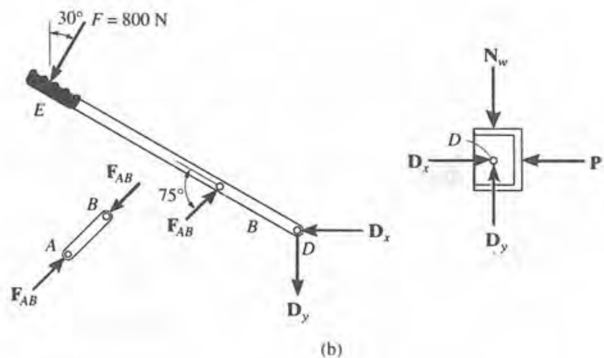
Trace el diagrama de cuerpo libre de cada parte del mecanismo de pistón-eslabón que se muestra en la figura 6.23*a*.



(a)

SOLUCIÓN

Por inspección, se comprueba que el miembro *AB* es un miembro de dos fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre de las partes se muestran en la figura 6.23*b*. Ya que los pasadores en *B* y en *D solamente conectan dos partes entre sí*, las fuerzas ahí se muestran iguales, pero opuestas, en los diagramas separados de cuerpo libre de sus miembros conectados. En particular, cuatro componentes de fuerza actúan sobre el pistón: $\mathbf{D}_x$ y $\mathbf{D}_y$ representan el efecto del pasador (o la palanca *EBD*), $\mathbf{N}_w$ es la *fuerza resultante* de la pared del cilindro, y **P** es la fuerza de compresión resultante causada por el material dentro del cilindro *C*.



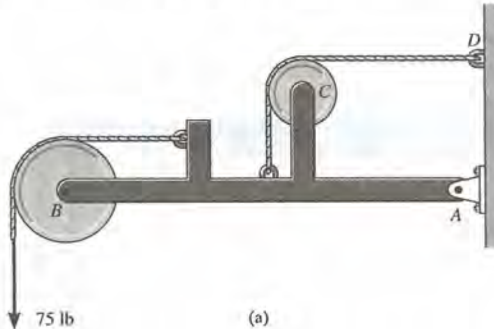
(b)

Fig. 6.23

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.12

Para el bastidor que se muestra en la figura 6.24*a*, trace los diagramas de cuerpo libre de (*a*) el bastidor entero incluyendo las poleas y cuerdas, (*b*) el bastidor sin poleas ni cuerdas, y (*c*) cada una de las poleas.



SOLUCIÓN

Parte (*a*): Cuando se considera el bastidor entero, incluidos las poleas y las cuerdas, las interacciones en los puntos donde las poleas y las cuerdas se conectan al bastidor se convierten en parejas de *fuerzas internas* que se cancelan mutuamente y, por tanto, no se muestran en el diagrama de cuerpo libre, figura 6.24*b*.

Parte (*b*): Cuando se retiran las cuerdas y poleas, debe mostrarse su efecto *en el bastidor*, figura 6.24*c*.

Parte (*c*): Las componentes de fuerza $\mathbf{B}_x$, $\mathbf{B}_y$, $\mathbf{C}_x$, $\mathbf{C}_y$ de los pasadores y las poleas, figura 6.24*d*, son iguales, pero opuestas, a las componentes de fuerzas ejercidas por los pasadores sobre el bastidor, figura 6.24*c*. ¿Por qué?

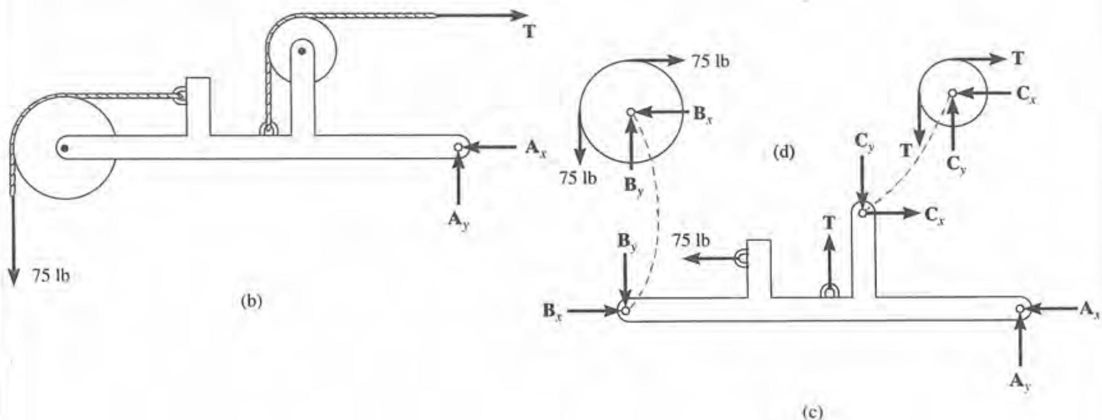


Fig. 6.24

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.13

La grúa hidráulica que se muestra en la figura 6.25*a* se usa para levantar una viga que tiene masa de 1 Mg. Trace los diagramas de cuerpo libre de cada una de sus partes, incluidos los pasadores en *A* y en *C*.

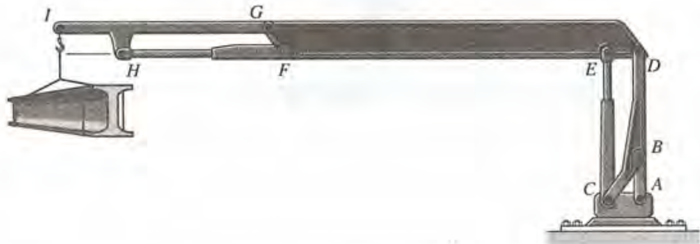
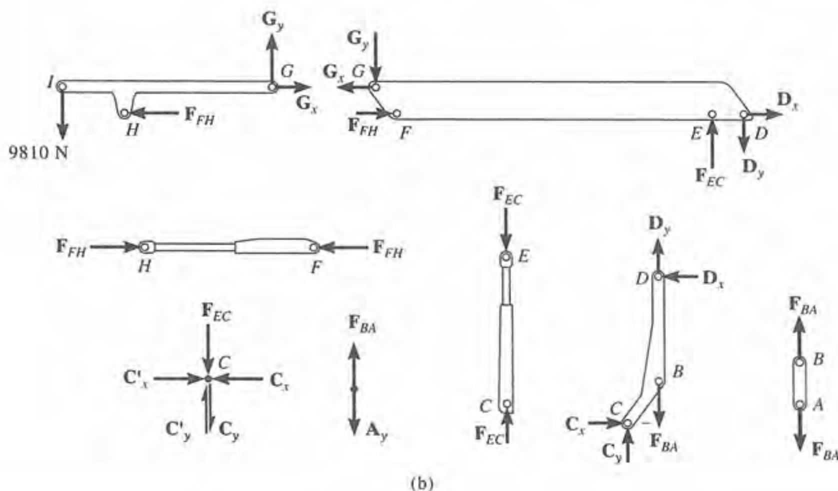


Fig. 6.25

(a)

SOLUCIÓN

Por inspección, *HF*, *EC* y *AB* son todos miembros de dos fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la figura 6.25*b*. El pasador en *A* está sometido a *dos* fuerzas solamente, a saber, la fuerza del eslabón *AB* y la fuerza de apoyo. Para equilibrio, estas fuerzas deben ser de la misma magnitud, pero opuestas. El pasador en *C*, sin embargo, está sometido a *tres* fuerzas. La fuerza $\mathbf{F}_{EC}$ es causada por el cilindro hidráulico, las componentes de fuerza $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ están causadas por el miembro *CBD*, y, finalmente $\mathbf{C}'_x$ y $\mathbf{C}'_y$ son causadas por el apoyo. Estas componentes pueden relacionarse por las ecuaciones del equilibrio de fuerzas aplicadas al pasador.



(b)

http://librosysolucionarios.net

Antes de proceder, se recomienda cubrir las soluciones a los ejemplos precedentes e intentar trazar los diagramas de cuerpo libre requeridos. Al hacer esto asegúrese de que esté con claridad y de que todas las fuerzas y pares de momentos se marquen debidamente.

Ecuaciones de equilibrio. A condición de que la estructura (bastidor o máquina) esté debidamente apoyada y contenga no más miembros y apoyos de los que son necesarios para impedir el desplome, entonces pueden determinarse las fuerzas desconocidas en los apoyos y las conexiones, a partir de las ecuaciones de equilibrio. Si la estructura está en el plano $x-y$, entonces para *cada* diagrama de cuerpo libre trazado la carga debe satisfacer $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_O = 0$. La elección de los diagramas de cuerpo libre usados para el análisis es *totalmente arbitraria*. Pueden representar cada uno de los miembros de la estructura, una porción de la estructura, o su totalidad. Por ejemplo, consideremos el problema de encontrar las seis componentes de las reacciones de pasadores en A, B y C para el bastidor de la figura 6.26*a*. Si se desmiembra el bastidor, figura 6.26*b*, estas incógnitas pueden determinarse aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a cada uno de los dos miembros (total de seis ecuaciones). El diagrama de cuerpo libre de *todo el bastidor* puede también usarse para parte del análisis, figura 6.26*c*. De tal forma que, si se desea, las seis incógnitas pueden ser determinadas aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al bastidor entero, figura 6.26*c*, y también a uno cualquiera de sus miembros. Además, las respuestas pueden verificarse parcialmente, aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al "segundo" miembro restante. Entonces, en general, este problema puede resolverse escribiendo, *a lo más*, seis ecuaciones de equilibrio, usando diagramas de cuerpo libre de los miembros y/o la combinación de miembros conectados. Más de seis ecuaciones escritas no serían únicas a partir de las seis originales y sólo servirían para verificar los resultados.

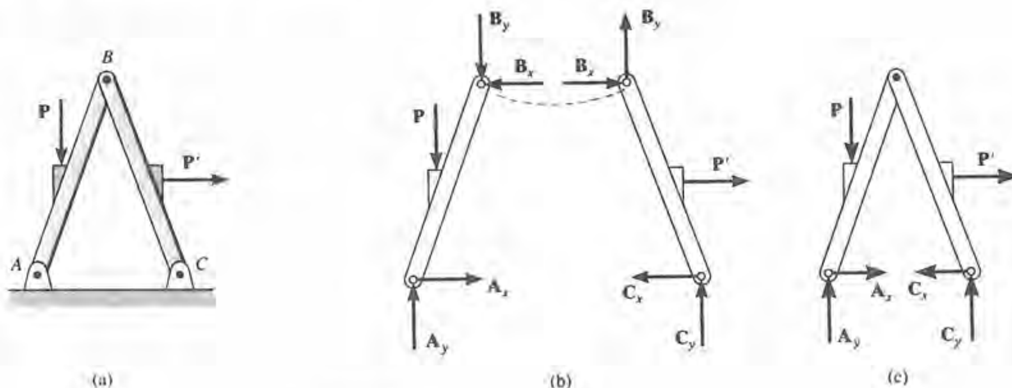


Fig. 6.26

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El procedimiento siguiente proporciona un método para determinar las *reacciones en las uniones* de bastidores y máquinas (estructuras) compuestos de miembros multiforzados.

Diagramas de cuerpo libre. Trace el diagrama de cuerpo libre de toda la estructura, una porción de la estructura o de cada uno de sus miembros. La elección deberá hacerse de modo que conduzca a la solución más directa del problema.

Las fuerzas que son comunes a dos miembros que estén en contacto actúan con la misma magnitud, pero sentido opuesto, en los respectivos diagramas de cuerpo libre de los miembros. Recuerde que todos los *miembros de dos fuerzas*, sin importar a su forma, tienen fuerzas iguales en magnitud, pero opuestas, que actúan en los extremos del miembro. Las fuerzas desconocidas que actúan en las uniones de los miembros multiforzados deberán representarse por sus componentes rectangulares. En muchos casos, es posible decir, por inspección, cuál es el sentido adecuado de las fuerzas desconocidas; sin embargo, si esto presenta dificultad, puede suponerse el sentido.

Ecuaciones de equilibrio. Contar el número total de incógnitas para asegurarse que puede escribirse un número equivalente de ecuaciones de equilibrio para solución. Recuerde que, en general, se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio para cada cuerpo rígido representado en dos dimensiones. Muchas veces, la solución para las incógnitas será directa, si los momentos se suman respecto a un punto que está en la intersección de las líneas de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible. Si después de obtener la solución se encuentra una magnitud de fuerza negativa, esto significa que el sentido de la fuerza es el contrario del que aparece en los diagramas de cuerpo libre.

Los ejemplos que siguen ilustran este procedimiento. Todos estos ejemplos deberán *entenderse perfectamente* antes de proceder a resolver los problemas.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.14

Determine la componente horizontal y la vertical de la fuerza que ejerce el pasador C en el miembro CB del bastidor en la figura 6.27*a*.

SOLUCIÓN I

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección, puede verse que AB es un miembro de dos fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la figura 6.27*b*.

Ecuaciones de equilibrio. Las *tres incógnitas* C_x, C_y, y F_{AB} se pueden determinar aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al miembro CB.

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;\quad 2000(2) - (F_{AB} \text{ sen } 60°)(4) = 0 \quad F_{AB} = 1154.7 \text{ N}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad 1154.7 \cos 60° - C_x = 0 \quad C_x = 577 \text{ N}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 1154.7 \text{ sen } 60° - 2000 + C_y = 0 \quad C_y = 1000 \text{ N}$ ***Resp.***

SOLUCIÓN II

Diagramas de cuerpo libre. Si no se reconoce que AB es un miembro de dos fuerzas, entonces la solución del problema requiere más trabajo. En la figura 6.27*c* se muestran los diagramas de cuerpo libre.

Ecuaciones de equilibrio. Las *seis incógnitas*, A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y, se determinan aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a cada miembro.

Miembro AB

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;\quad B_x(3 \text{ sen } 60°) - B_y(3 \cos 60°) = 0 \qquad (1)$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad A_x - B_x = 0 \qquad (2)$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y - B_y = 0 \qquad (3)$

Miembro BC

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;\quad 2000(2) - B_y(4) = 0 \qquad (4)$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad B_x - C_x = 0 \qquad (5)$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad B_y - 2000 + C_y = 0 \qquad (6)$

Los resultados para C_x y C_y se pueden determinar resolviendo estas ecuaciones en la siguiente secuencia: 4, 1, 5 y, por último, 6. Los resultados son

$B_y = 1000 \text{ N}$

$B_x = 577 \text{ N}$

$C_x = 577 \text{ N}$ ***Resp.***

$C_y = 1000 \text{ N}$ ***Resp.***

La solución I es comparativamente más simple, ya que la condición de que $\mathbf{F}_{AB}$ en la figura 6.27*b* sea de igual magnitud, colineal, pero opuesta, en cada extremo automáticamente satisface las ecuaciones 1, 2 y 3 de antes y, por tanto, elimina la necesidad de escribir estas ecuaciones. *¡De aquí se concluye que siempre se buscará el miembro de dos fuerzas, antes de iniciar el análisis!*

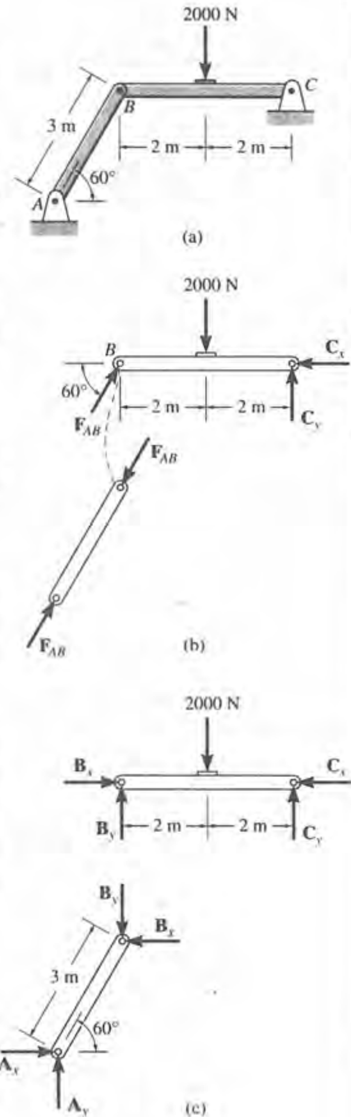


Fig. 6.27

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.15

La viga que se ve en la figura 6.28*a* está articulada en *B*. Determine las reacciones en los apoyos. Se ignorarán su peso y espesor.

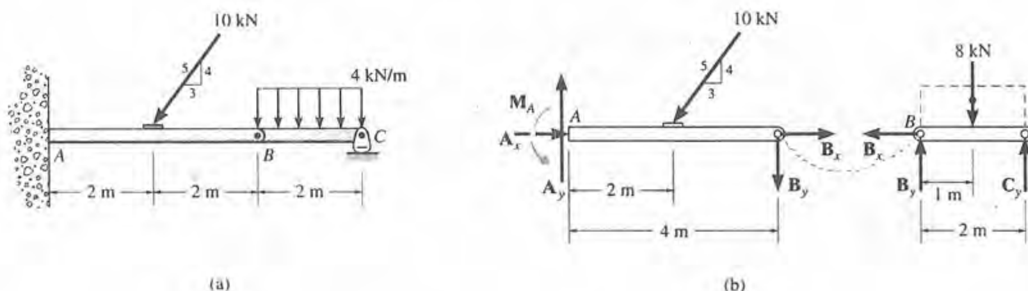


Fig. 6.28

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección, si consideramos un diagrama de cuerpo libre de la totalidad de la viga *ABC*, habrá tres reacciones desconocidas en *A* y una en *C*. Estas cuatro incógnitas no pueden obtenerse todas a partir de las tres ecuaciones de equilibrio y, por tanto, será necesario desarmar la viga en sus dos segmentos, como se ve en la figura 6.28*b*.

Ecuaciones de equilibrio. Las seis incógnitas se determinan como sigue:

Segmento BC

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\qquad B_x = 0$

$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0;\qquad -8\text{ kN}(1\text{ m}) + C_y(2\text{ m}) = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0\qquad B_y - 8\text{ kN} + C_y = 0$

Segmento AB

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\qquad A_x - 10\text{ kN}(\tfrac{3}{5}) + B_x = 0$

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;\qquad M_A - 10\text{ kN}(\tfrac{4}{5})(2\text{ m}) - B_y(4\text{ m}) = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\qquad A_y - 10\text{ kN}(\tfrac{4}{5}) - B_y = 0$

Al resolver sucesivamente estas ecuaciones, cada una con los resultados obtenidos previamente, obtenemos

$A_x = 6\text{ kN}\qquad A_y = 12\text{ kN}\qquad M_A = 32\text{ kN}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

$B_x = 0\qquad B_y = 4\text{ kN}$

$C_y = 4\text{ kN}$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.16

Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el pasador en C ejerce sobre el miembro $ABCD$ del bastidor mostrado en la figura 6.29*a*.

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección, las tres componentes de reacción que los apoyos ejercen sobre $ABCD$ se pueden determinar de un diagrama de cuerpo libre de la totalidad del bastidor, figura 6.29*b*. También, el diagrama de cuerpo libre de cada miembro del bastidor puede verse en la figura 6.29*c*. Nótese que el miembro BE es un miembro de dos fuerzas. Como se muestra mediante las líneas punteadas, las fuerzas en B, C y E tienen igual magnitud, pero direcciones opuestas en los diagramas, separados de cuerpo libre.

Ecuaciones de equilibrio. Las seis incógnitas, A_x, A_y, F_B, C_x, C_y y D_x, se determinarán a partir de las ecuaciones de equilibrio aplicadas a todo el bastidor y después al miembro CEF. Tenemos

Todo el bastidor

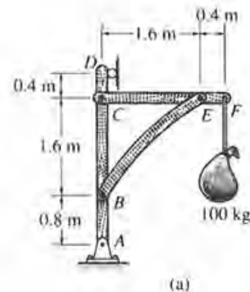
$$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad -981\text{ N}(2\text{ m}) + D_x(2.8\text{ m}) = 0 \quad D_x = 700.7\text{ N}$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad A_x - 700.7\text{ N} = 0 \quad A_x = 700.7\text{ N}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad A_y = -981\text{ N} = 0 \quad A_y = 981\text{ N}$$

Miembro CEF

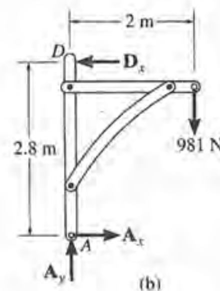
$$\curvearrowleft +\Sigma M_C = 0; \quad -981\text{ N}(2\text{ m}) - (F_B \text{ sen } 45°)(1.6\text{ m}) = 0$$
$$F_B = -1734.2\text{ N}$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad -C_x - (-1734.2\cos 45°\text{ N}) = 0$$
$$C_x = 1230\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad C_y - (-1734.2\text{ sen } 45°\text{ N}) - 981\text{ N} = 0$$
$$C_y = -245\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Puesto que las magnitudes de las fuerzas F_B y $\mathbf{C}_y$ se calcularon como cantidades negativas, se supuso que actúan en el sentido direccional equivocado en los diagramas de cuerpo libre, figura 6.29*c*. La dirección correcta de estas fuerzas podría haberse determinado "por inspección" *antes* de aplicar las ecuaciones de equilibrio al miembro CEF. Como se muestra en la figura 6.29*c*, el equilibrio de momentos con respecto al punto E sobre el miembro CEF indica que $\mathbf{C}_y$ debe actuar realmente *hacia abajo*, para contrarrestar el momento producido por la fuerza de 981 N, con respecto al punto E. Análogamente, sumando momentos con respecto al punto C, se ve que la componente vertical de la fuerza $\mathbf{F}_B$ debe actuar realmente *hacia arriba*.

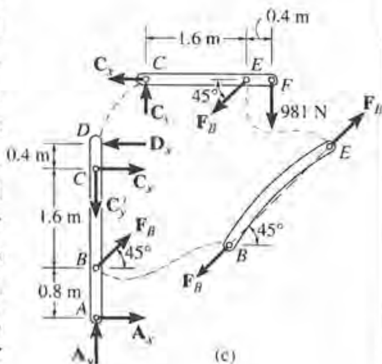
Los cálculos anteriores pueden verificarse aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al miembro $ABCD$, figura 6.29*c*.



(a)



(b)



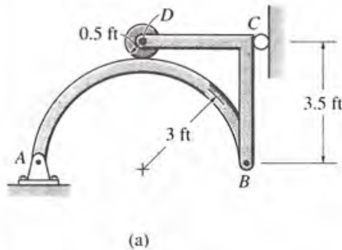
(c)

Fig. 6.29

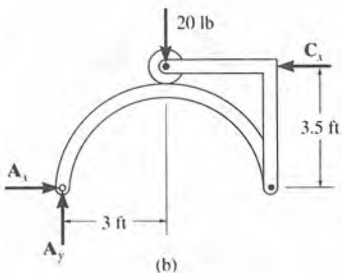
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.17

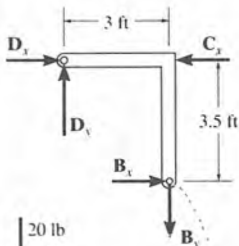
El disco liso que se muestra en la figura 6.30*a* está articulado en D y tiene un peso de 20 lb. Sin considerar el peso de los demás miembros, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en las articulaciones B y D.

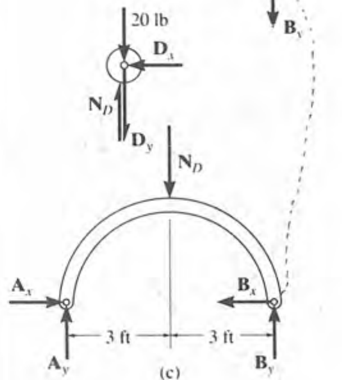


(a)



(b)





(c)

Fig. 6.30

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección, las tres componentes de reacción en los soportes pueden ser determinadas a partir de un diagrama de cuerpo libre de todo el bastidor, figura 6.30*b*. También se muestran diagramas de cuerpo libre de los miembros en la figura 6.30*c*.

Ecuaciones de equilibrio. Las ocho incógnitas pueden obtenerse, por supuesto, aplicando las ocho ecuaciones de equilibrio que resultan para los miembros —tres para el miembro AB, tres para el miembro BCD y dos para el disco (el equilibrio de momentos se satisface automáticamente para el disco). Sin embargo, si se hace así, todos los resultados pueden obtenerse solamente a partir de una solución simultánea de algunas de las ecuaciones (trate de hacerlo y encontrarlas). Para evitar esta situación, es mejor determinar primero las tres reacciones en los apoyos, considerando *todo* el bastidor; después, usando estos resultados, las cinco ecuaciones de equilibrio restantes pueden aplicarse a otras dos de las partes para resolver sucesivamente las demás incógnitas.

Todo el bastidor

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad -20\text{ lb}(3\text{ ft}) + C_x(3.5\text{ ft}) = 0 \quad C_x = 17.1\text{ lb}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 17.1\text{ lb} = 0 \quad A_x = 17.1\text{ lb}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 20\text{ lb} = 0 \quad A_y = 20\text{ lb}$

Miembro AB

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 17.1\text{ lb} - B_x = 0 \quad B_x = 17.1\text{ lb}$ ***Resp.***

$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0; \quad -20\text{ lb}(6\text{ ft}) + N_D(3\text{ ft}) = 0 \quad N_D = 40\text{ lb}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 20\text{ lb} - 40\text{ lb} + B_y = 0 \quad B_y = 20\text{ lb}$ ***Resp.***

Disco

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad D_x = 0$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 40\text{ lb} - 20\text{ lb} - D_y = 0 \quad D_y = 20\text{ lb}$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.18

Determine la tensión en los cables y también la fuerza **P** necesaria para soportar la fuerza de 600 N, utilizando el sistema de poleas sin fricción que se muestra en la figura 6.31*a*.

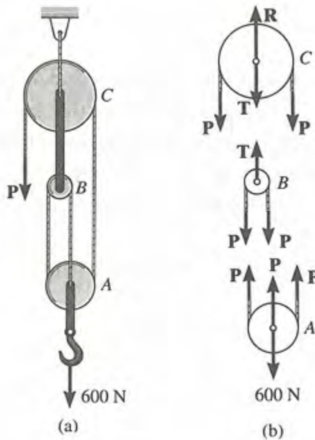


Fig. 6.31

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Un diagrama de cuerpo libre de cada polea *incluido* su pasador y una porción del cable en contacto se muestra en la figura 6.31*b*. Como el cable es *continuo* y se trata de poleas sin fricción, el cable tiene una *tensión constante* de **P** que actúa a lo largo de toda su longitud (véase el ejemplo 5.7). El eslabón de unión entre las poleas B y C es un miembro de dos fuerzas y, por consiguiente, tiene una tensión desconocida de T que actúa en él. Nótese que debe observarse cuidadosamente el *principio de la acción y reacción, iguales, pero opuestas*, para las fuerzas **P** y **T**, cuando se tracen diagramas de cuerpo libre *separados*.

Ecuaciones de equilibrio. Las tres incógnitas se obtienen como sigue:

Polea A

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$ $\quad 3P - 600\text{ N} = 0 \quad P = 200\text{ N}$ ***Resp.***

Polea B

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$ $\quad T - 2P = 0 \quad T = 400\text{ N}$ ***Resp.***

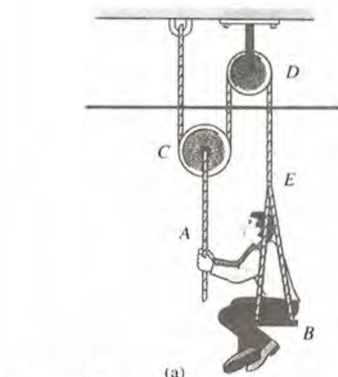
Polea C

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$ $\quad R - 2P - T = 0 \quad R = 800\text{ N}$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

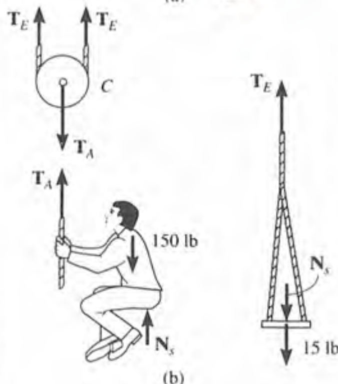
Ejemplo 6.19

Un hombre que tiene un peso de 150 lb se sostiene a sí mismo por medio del sistema de cable y polea en la figura 6.32*a*. Si el asiento tiene un peso de 15 lb, determínese la fuerza de equilibrio que él debe ejercer sobre el cable en *A* y la fuerza que ejerce sobre el asiento. No tome en cuenta el peso de los cables y las poleas.



SOLUCIÓN I

Diagramas de cuerpo libre. En la figura 6.32*b* se muestran los diagramas de cuerpo libre del hombre, del asiento y de la polea *C*. Los *dos* cables están sujetos a las tensiones $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_E$, respectivamente. El hombre está sujeto a tres fuerzas: su peso, la tensión $\mathbf{T}_A$ del cable *AC* y la reacción $\mathbf{N}_s$ del asiento.



Ecuaciones de equilibrio. Las tres incógnitas se obtienen como sigue:

Hombre

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad T_A + N_s - 150 \text{ lb} = 0 \qquad (1)$

Asiento

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad T_E - N_s - 15 \text{ lb} = 0 \qquad (2)$

Polea C

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 2T_E - T_A = 0 \qquad (3)$

La magnitud de la fuerza $\mathbf{T}_E$ puede determinarse sumando miembro a miembro las ecuaciones 1 y 2 para eliminar $\mathbf{N}_s$ y, después, usando la ecuación 3. Las otras incógnitas se obtienen después por resubstitución de T_E.

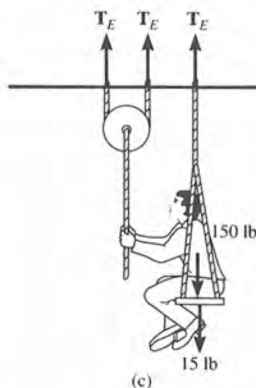
$T_A = 110 \text{ lb}$ ***Resp.***

$T_E = 55 \text{ lb}$

$N_s = 40 \text{ lb}$ ***Resp.***

SOLUCIÓN II

Diagramas de cuerpo libre. Utilizando la sección indicada por la línea segmentada que se muestra en la figura 6.32*a*, puede considerarse como un *solo sistema* al hombre, la polea y el asiento, figura 6.32*c*. Aquí **N** y $\mathbf{T}_A$ son fuerzas *interiores* y, por tanto, no se incluyen en el diagrama de cuerpo libre “combinado”.



Ecuaciones de equilibrio. Aplicando $\Sigma F_y = 0$ da por resultado una solución *directa* para T_E.

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 3T_E - 15 \text{ lb} - 150 \text{ lb} = 0 \qquad T_E = 55 \text{ lb}$

Las otras incógnitas pueden obtenerse a partir de las ecuaciones 2 y 3.

Fig. 6.32

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.20

La mano ejerce una fuerza de 8 lb en el soporte del compresor de resortes en la figura 6.33*a*. Determine la fuerza en el resorte requerida para mantener el mecanismo en la posición que se muestra.

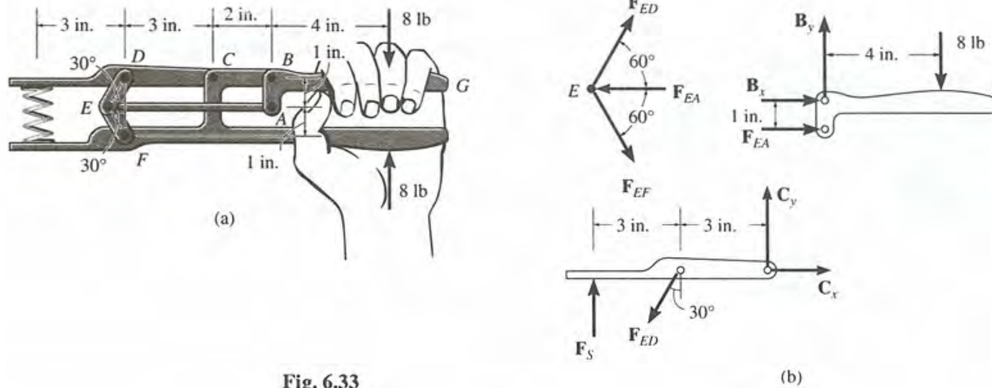


Fig. 6.33

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección, los miembros EA, ED y EF son todos miembros de dos fuerzas. Consecuentemente, en la figura 6.33*b*, se muestran los diagramas de cuerpo libre para cada una de las partes. El pasador en E ha sido incluido aquí, ya que en dicho pasador ocurren tres fuerzas reactivas. Representan los efectos de los miembros ED, EA y EF. Nótese con cuidado cómo actúan fuerzas opuestas de la misma magnitud entre las partes.

Ecuaciones de equilibrio. Al estudiar los diagramas de cuerpo libre, la manera más directa de obtener la fuerza del resorte es aplicar las ecuaciones de equilibrio en el orden siguiente:

Palanca ABG

$$\circlearrowright +\Sigma M_B = 0; \quad F_{EA}(1) - 8\text{ lb}(4\text{ in.}) = 0 \quad F_{EA} = 32\text{ lb}$$

Pasador E

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{ED}\text{ sen }60° - F_{EF}\text{ sen }60° = 0 \quad F_{ED} = F_{EF} = F$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad 2F\cos 60° - 32\text{ lb} = 0 \quad F = 32\text{ lb}$$

Brazo EC

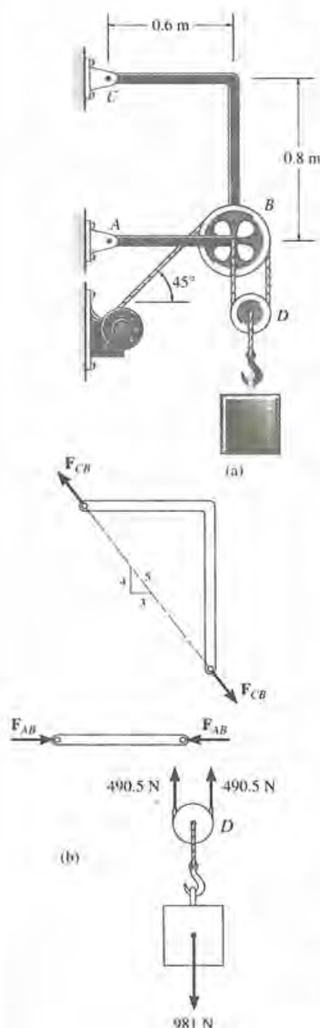
$$\circlearrowright +\Sigma M_C = 0; \quad -F_s(6\text{ in.}) + 32\text{ lb}\cos 30°(3\text{ in.}) = 0$$

$$F_s = 13.9\text{ lb}$$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 6.21

El bloque de 100 kg se mantiene en equilibrio por medio de la polea y sistema continuo de cables mostrado en la figura 6.34*a*. Si el cable está sujeto en el pasador en *B*, calcule las fuerzas que ejerce este pasador en cada uno de los miembros conectados con él.



SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Un diagrama de cuerpo libre de cada miembro del armazón se muestra en la figura 6.34*b*. Por inspección, los miembros *AB* y *CB* son miembros de dos fuerzas. Además, el cable debe sujetarse a una fuerza de 490.5 N para que la polea *D* y el bloque estén en equilibrio. Se necesita un diagrama de cuerpo libre del pasador en *B*, pues en este pasador ocurren *cuatro interacciones*. Son causadas por el cable atado (490.5 N), el miembro *AB* ($\mathbf{F}_{AB}$), el miembro *CB* ($\mathbf{F}_{CB}$), y la polea *B* ($\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$).

Ecuaciones de equilibrio. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas a la polea *B*, tenemos

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad B_x - 490.5 \cos 45° \text{ N} = 0 \quad B_x = 346.8 \text{ N}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad B_y - 490.5 \text{ sen } 45° \text{ N} - 490.5 \text{ N} = 0$

$B_y = 837.3 \text{ N}$ ***Resp.***

Si se usan estos resultados, el equilibrio del pasador requiere

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad \tfrac{4}{5}F_{CB} - 873.3 \text{ N} - 490.5 \text{ N} = 0 \quad F_{CB} = 1660 \text{ N}$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad F_{AB} - \tfrac{3}{5}(1600 \text{ N}) - 346.8 \text{ N} = 0 \quad F_{AB} = 1343 \text{ N}$ ***Resp.***

Puede observarse que el miembro de dos fuerzas *CB* está sujeto a una flexión debido a la fuerza $\mathbf{F}_{CB}$. Desde el punto de vista del diseño, sería mejor hacer *recto* este miembro (de *C* a *B*) de manera que la fuerza $\mathbf{F}_{CB}$ solamente causaría tensión en este miembro.



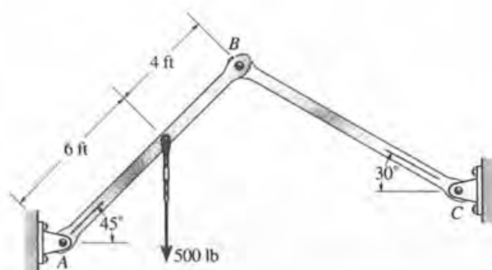
Fig. 6.34

Antes de resolver los problemas que siguen, se recomienda repasar los ejemplos precedentes. Para ello, sin mirar las soluciones, se tratará de localizar los miembros de dos fuerzas, trazar los diagramas de cuerpo libre y encontrar la manera de aplicar las ecuaciones de equilibrio para obtener la solución.

http://librosysolucionarios.net

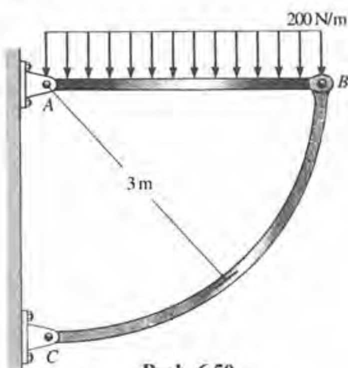
PROBLEMAS

6.49. Determine la fuerza reactiva en los pasadores *A* y *C* del bastidor de dos miembros.



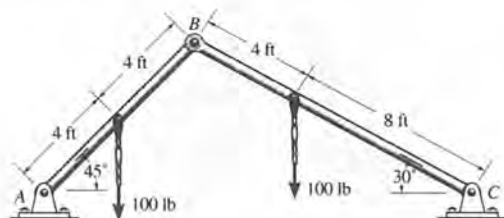
Prob. 6.49

6.50. Determine la componente vertical y la componente horizontal de la fuerza en los pasadores *A* y *C* del bastidor de dos miembros.



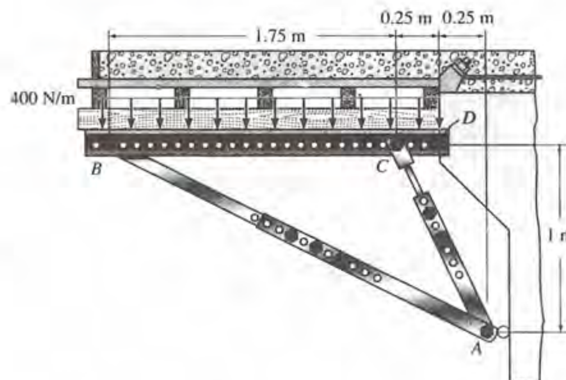
Prob. 6.50

6.51. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa en *A*, *B*, y *C*, del bastidor.



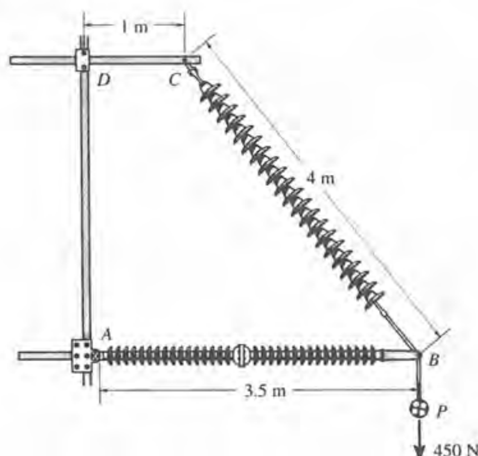
Prob. 6.51

***6.52.** Determine la fuerza en los miembros *AB* y *AC* de la armadura voladiza usada para sostener los moldes de vaciado del concreto de la losa. Los moldes ejercen una carga uniforme de 400 N/m sobre el miembro superior del ensamble. En *A* hay un rodillo de apoyo y pasadores en *A*, *B*, *C* y *D*.



Prob. 6.52

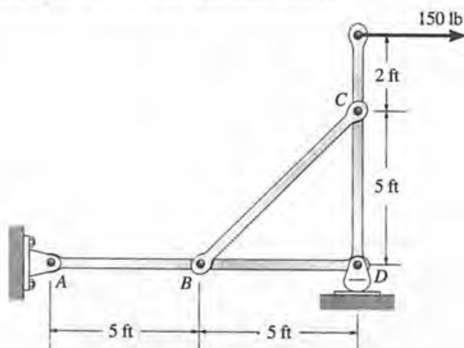
6.53. Los dos aislantes *AB* y *BC* se usan como soporte de la línea de transmisión *P*. Si el peso de la línea es 450 N, determine la fuerza en cada aislador, si se unen en una articulación en sus extremos. Asimismo ¿cuáles son las componentes de la reacción en el soporte fijo *D*?



Prob. 6.53

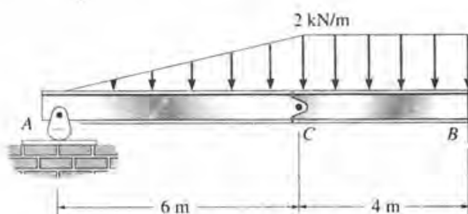
http://librosysolucionarios.net

6.54. Determine la tensión en el miembro *BC* del bastidor y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa en el pasador en *D*.



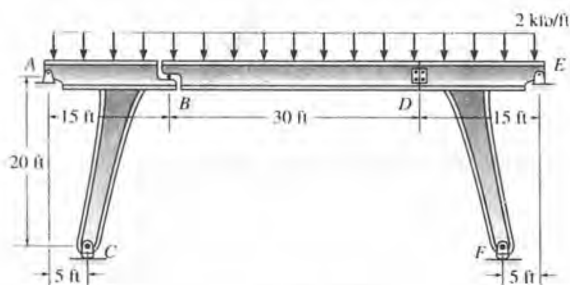
Prob. 6.54

6.55. Determine las reacciones en los apoyos *A* y *B* de la viga compuesta. En *C* hay un pasador.



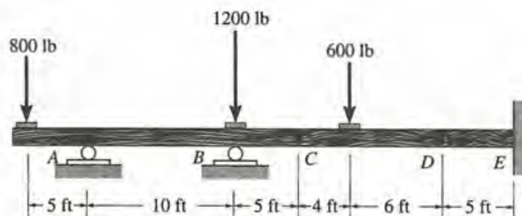
Prob. 6.55

*** 6.56**. La estructura del puente consiste en tres segmentos que se pueden considerar articulados en *A*, *D* y *E*, apoyados por un balanceador en *C* y *F*, y por rodillo en *B*. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en todos estos apoyos, debida a la carga mostrada.



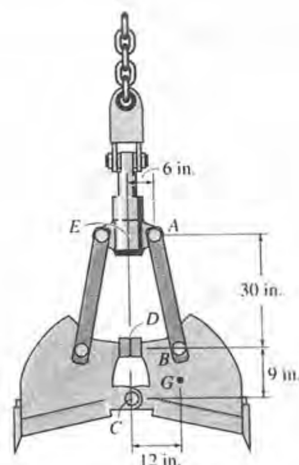
Prob. 6.56

6.57. La viga compuesta está fija en *E* y apoyada en rodillos en *A* y *B*. Determine las reacciones en todos estos apoyos. En *C* y en *D* hay bisagras (pasadores).



Prob. 6.57

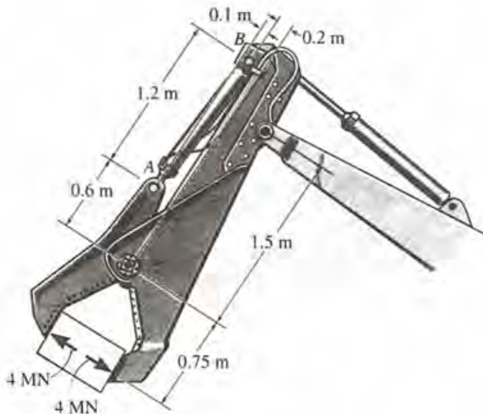
6.58. Cada cubo del cucharón de almeja tiene un peso de 350 lb y centro de gravedad en *G*. Determine la fuerza en el eslabón *AB* y la reacción en el pasador *C* y el contacto liso en *D*, sin tener en consideración los pesos de los demás miembros.



Prob. 6.58

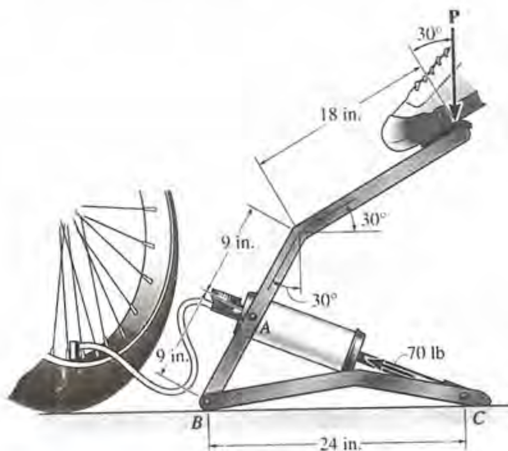
http://librosysolucionarios.net

6.59. Determine la fuerza necesaria en en el cilindro hidráulico *AB* de las cizallas para desarrollar una fuerza normal de 4 MN en el agarre. Las mandíbulas están articuladas en *C*. Determine también la magnitud de la fuerza desarrollada en el pasador en *C*.



Prob. 6.59

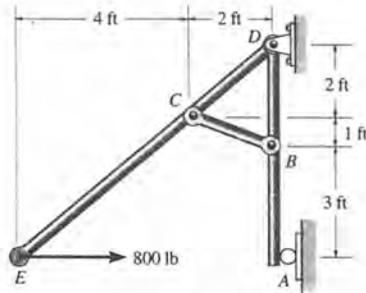
* **6.60.** La bomba de pie se usa para inflar una llanta. Si la fuerza requerida para desarrollar la presión necesaria en el cilindro es 70 lb, determine la fuerza vertical **P** que se debe aplicar al pedal. El ensamble está articulado en *A*, *B* y *C*.



Prob. 6.60

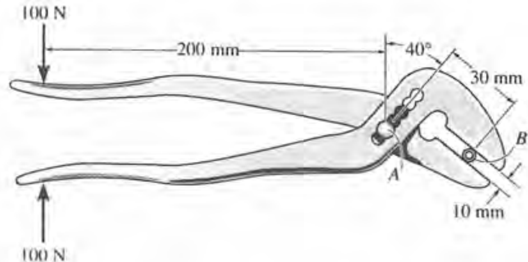
6.61. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejercen los pasadores *C* y *D* en el miembro *ECD* del bastidor.

6.62. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que los pasadores en *B* y en *D* ejercen sobre el miembro *ABD* del bastidor.

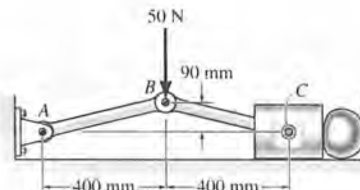


Probs. 6.61/6.62

6.63. Determine la fuerza que aprieta el tubo liso en *B* si se aplica una fuerza de 100 N en el agarre de los alicates. Éstos se encuentran articulados en *A*.



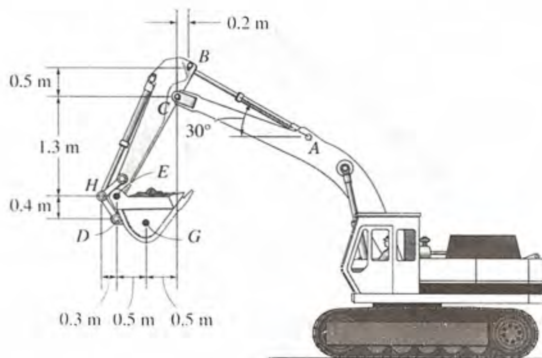
* **6.64.** Determine la fuerza de compresión ejercida sobre la muestra por una carga vertical de 50 N aplicada a la prensa de rótula.



Prob. 6.64

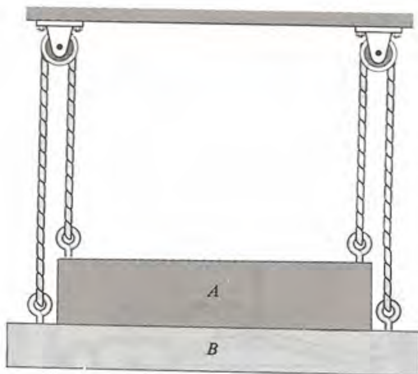
http://librosysolucionarios.net

6.65. El cubo de la retroexcavadora lleva una carga de masa de 500 kg, y tiene centro de gravedad en *G*. Determine la fuerza en el eslabón *DH* y el cilindro hidráulico *AB* así como las componentes horizontal y vertical de la fuerza en los pasadores *C* y *E* necesarias para mantener el cubo en la posición que se muestra. No se consideren los pesos de los miembros.



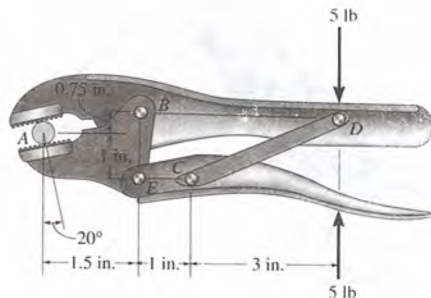
Prob. 6.65

6.66. Si el bloque *A* pesa 50 lb y la plataforma *B* pesa 30 lb, determine la tensión en los cables y la fuerza normal que ejerce el bloque sobre la plataforma.



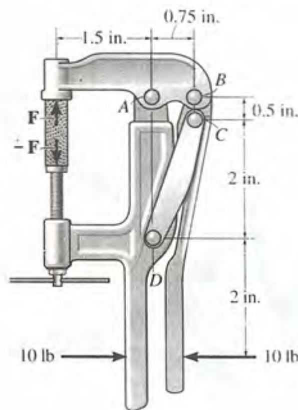
Prob. 6.66

6.67. Una fuerza de 5 lb se aplica a las manijas del agarre. Determine la fuerza compresiva desarrollada sobre el perno liso en la boca de la llave.



Prob. 6.67

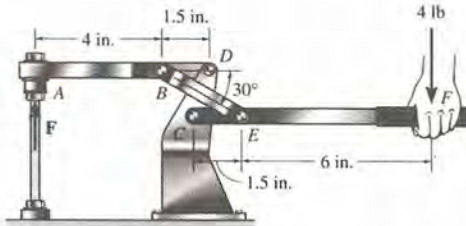
*** 6.68**. Si una fuerza de 10 lb se aplica en el agarre de la abrazadera, determine la fuerza *F* de compresión que ejerce el pedazo de madera sobre la abrazadera.



Prob. 6.68

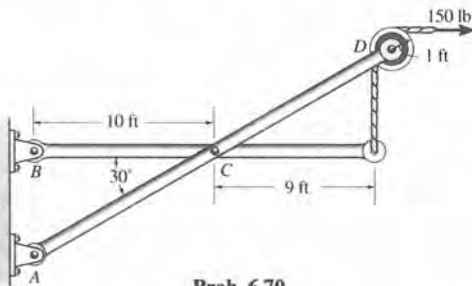
http://librosysolucionarios.net

6.69. Se aplica una fuerza de 4 lb al mango de la abrazadera. Determine la fuerza normal F que ejerce el perno sobre la abrazadera.



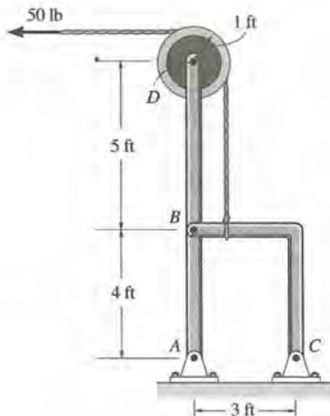
Prob. 6.69

6.70. Determine la componente horizontal y la componente vertical de la fuerza que actúa en los pasadores A y C del bastidor. La polea en D es sin fricción.



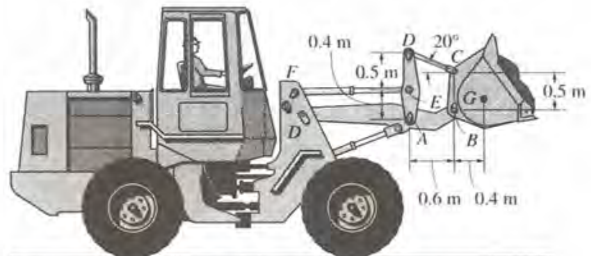
Prob. 6.70

6.71. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el pasador ejerce sobre el miembro ABD.



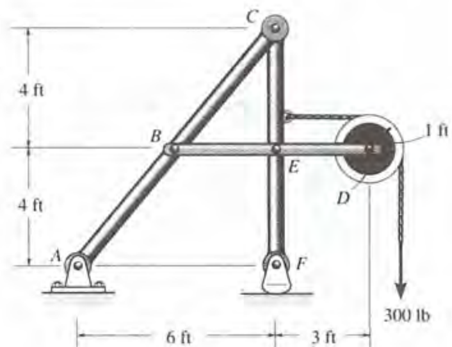
Prob. 6.71

* **6.72**. La pala del tractor soporta la carga de 400 kg que tiene centro de masa en G. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A y la fuerza en el cilindro hidráulico EF. Todos los puntos denotados en el dibujo son articulaciones. El mecanismo es el mismo a ambos lados y soporta igual carga de cada lado.



Prob. 6.72

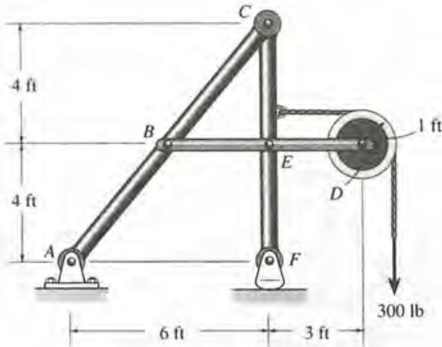
6.73. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza en C que el miembro ABC ejerce en el miembro CEF.



Prob. 6.73

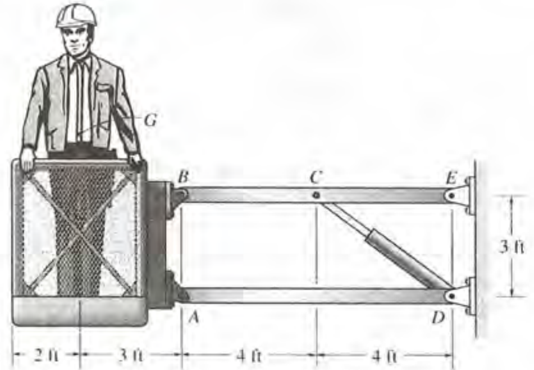
http://librosysolucionarios.net

6.74. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que los pasadores de unión en B, E y D ejercen sobre el miembro BED.



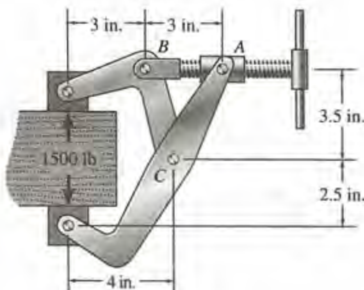
Prob. 6.74

*** 6.76**. El elevador está operado por medio del cilindro hidráulico CD. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en los pasadores A y B y la fuerza compresiva en el cilindro cuando se usa para mantener el elevador en la posición mostrada. El hombre tiene un peso de 230 lb y un centro de gravedad en G.



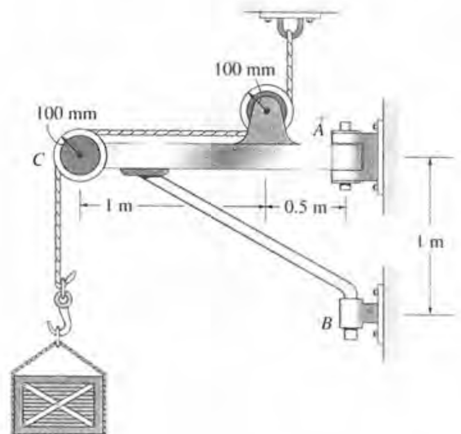
Prob. 6.76

6.75. La prensa tiene una capacidad de 1500 lb. Determine la fuerza compresiva que esto crea en la porción AB del tornillo y la magnitud de la fuerza ejercida en el pasador C. El tornillo está articulado en su extremo B y pasa por la articulación giratoria en A.



Prob. 6.75

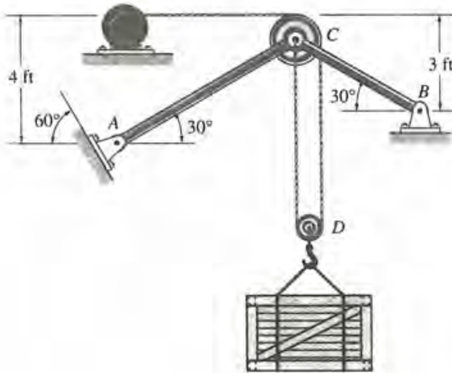
6.77. La grúa está articulada en A y ajusta en el collar liso en B. Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en estos apoyos y la fuerza resultante que el pasador en C ejerce sobre la grúa para sostener el huacal, que tiene una masa de 175 kg.



Prob. 6.77

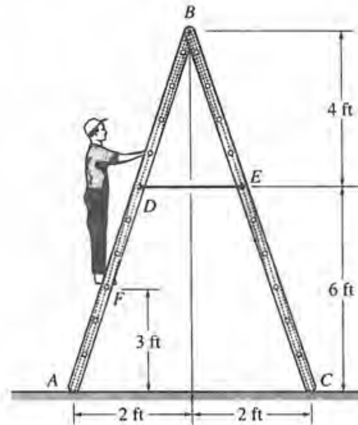
http://librosysolucionarios.net

6.78. Determine las reacciones en los pasadores A y B del bastidor, requeridas para soportar la carga de 200 lb. La polea grande está articulada en C y tiene un radio de 0.5 ft. La pequeña polea en D tiene radio de 0.25 ft.



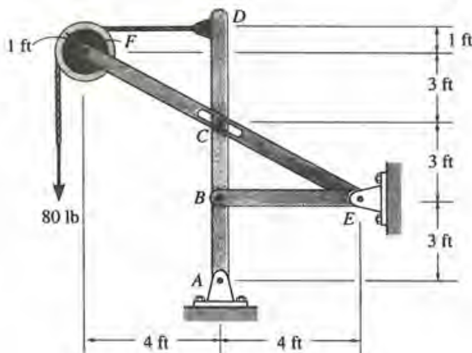
Prob. 6.78

* **6.80**. Determine las reacciones verticales en el suelo liso y las componentes horizontal y vertical de reacción en el pasador B cuando el hombre, que pesa 170 lb, se mantiene de pie en la escalera y en la posición que se muestra. Los dos segmentos de la escalera están ligados por el cable DE.



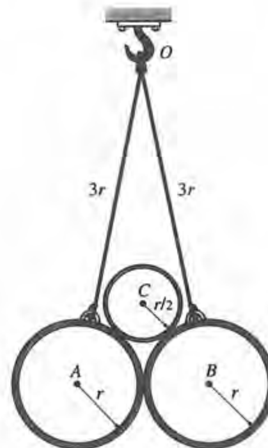
Prob. 6.80

6.79. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que los pasadores ejercen sobre el miembro $ABCD$. Nótese que el pasador en C está sujeto al miembro $ABCD$ y pasa por la ranura lisa en el miembro ECF.



Prob. 6.79

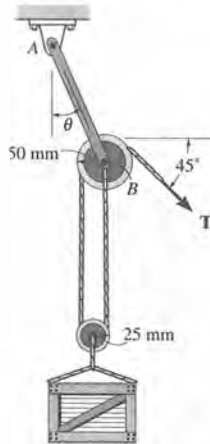
6.81. Dos tubos lisos A y B, del mismo peso W, están suspendidos de un punto común O por medio de cuerdas de la misma longitud. Un tercer tubo, C, se coloca entre A y B. Determine el peso máximo de C que mantiene el equilibrio.



Prob. 6.81

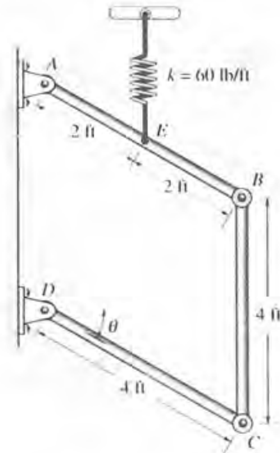
http://librosysolucionarios.net

6.82. Determine la tensión T en la cuerda y el ángulo θ que el eslabón de sostén de la polea, AB, hace con la vertical. No se considere el peso de las poleas y del eslabón. El bloque tiene una masa de 30 kg, y la cuerda está atada al pasador en B.



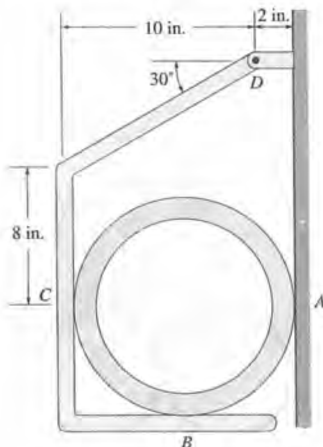
Prob. 6.82

***6.84**. Si cada eslabón del mecanismo tiene un peso de 25 lb, determine el ángulo θ para equilibrio. El resorte, que se mantiene vertical, está sin extender cuando $\theta = 0°$.



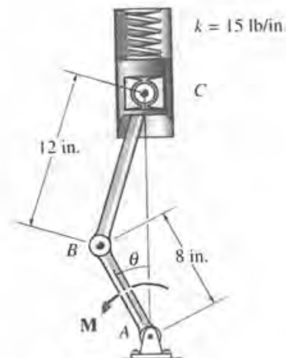
Prob. 6.84

6.83. La ménsula se usa para sostener un cilindro liso que tiene un peso de 40 lb. Si la ménsula se encuentra articulada en D, determine las reacciones normales en los puntos B y C y las componentes horizontal y vertical de la reacción en D.



Prob. 6.83

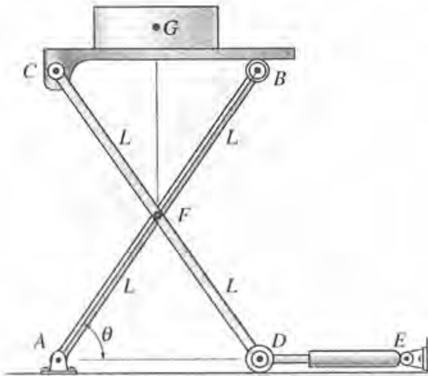
6.85. El pistón C se mueve verticalmente entre las dos paredes. Si el resorte tiene una rigidez de k = 15 lb/in y está inextendido cuando $\theta = 0°$, determine el momento de un par **M** que debe aplicarse a AB para mantener el equilibrio del mecanismo cuando $\theta = 30°$.



Prob. 6.85

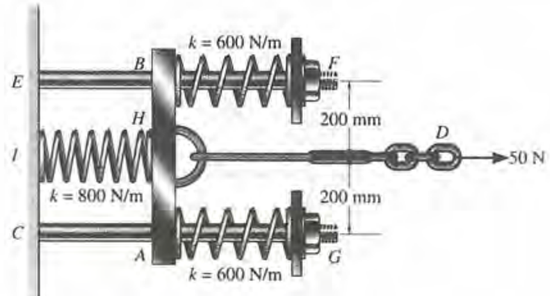
http://librosysolucionarios.net

6.86. El peso W se coloca en la mesa de modo que su centro de gravedad G se sitúe directamente arriba del pasador en F. Determine la fuerza compresiva en el cilindro hidráulico DE en términos de W y la geometría de la plataforma. Cada miembro tiene una longitud $2L$ y se articula en su punto medio.



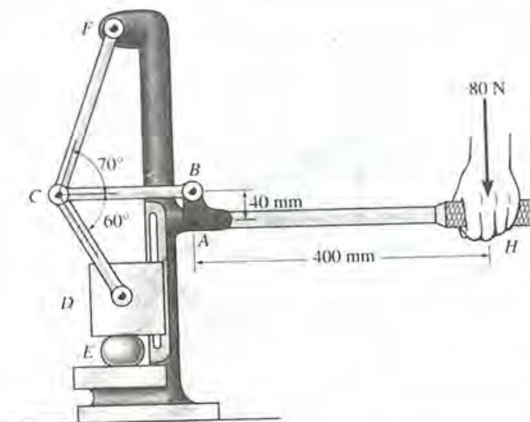
Prob. 6.86

* **6.88**. El mecanismo de resortes se usa para absorber los choques para una carga que se aplica a la barra de tracción AB. Determine la longitud de equilibrio de cada resorte, cuando se aplica la fuerza de 50 N. Cada resorte tiene longitud sin carga de 200 mm y la barra de tracción se desliza por los postes guía CG y EF que son lisos. Los extremos de todos los resortes se sujetan a los miembros respectivos.



Prob. 6.88

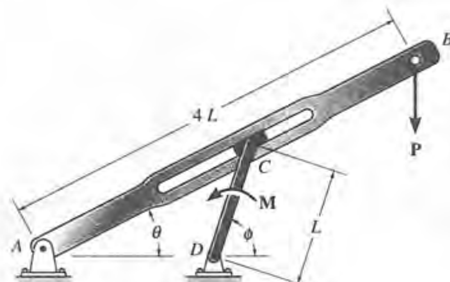
6.87. El mecanismo de palanca para una prensa de máquina sirve como palanca acodada que desarrolla una fuerza grande en E, cuando se aplica una pequeña fuerza en H. Para demostrarlo, determine la fuerza en E, si alguien aplica una fuerza de 80 N en H. La cabeza lisa en D puede deslizarse libremente hacia abajo. Todos los miembros son articulados.



Prob. 6.87

6.89. Determine el momento de par **M** que debe aplicarse al miembro DC para el equilibrio del mecanismo de retorno rápido. Exprese el resultado en términos de los ángulos Φ y θ, la dimensión L y la carga vertical aplicada P. El bloque en C está confinado a resbalar dentro de la ranura del miembro AB.

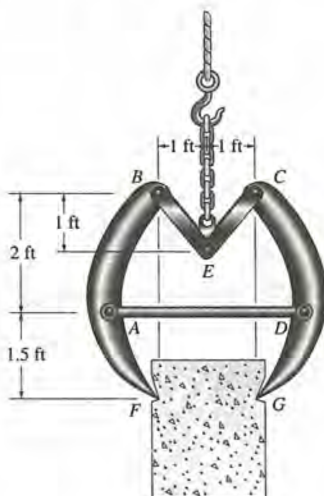
6.90. Resuelva el problema 6.89 si la carga aplicada **P** es horizontal y dirigida hacia la derecha.



Probs. 6.89/6.90

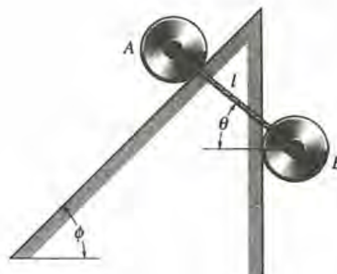
http://librosysolucionarios.net

6.91. Las tenazas tienen dos partes que se articulan con eslabones en A, B, C, D. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la piedra de 500 lb en F y G para levantarla.



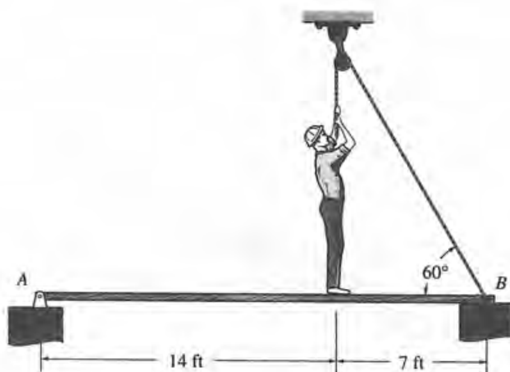
Prob. 6.91

6.93. Los dos discos tienen cada uno un peso de W y se encuentran conectados por una cuerda inextensible. Si descansan sobre planos lisos, uno de los cuales se inclina un ángulo Φ, como se muestra, y el otro es vertical, determine el ángulo θ para equilibrio (a) en términos de los parámetros mostrados y (b), con $W = 10$ lb, $\Phi = 60°$.



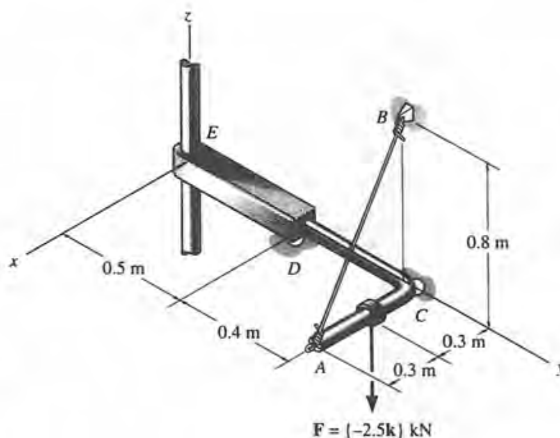
Prob. 6.93

* **6.92**. Un hombre pesa 150 lb y se mantiene de pie sobre el tablón uniforme que pesa 40 lb. Determine la fuerza que él ejerce sobre el tablón si lo tira con la fuerza justamente necesaria para levantar el tablón del apoyo B. El tablón está articulado con pasador en A.



Prob. 6.92

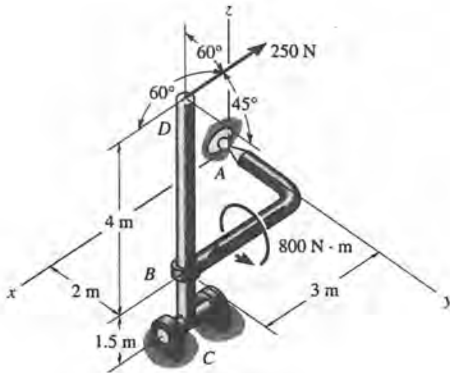
6.94. La estructura se encuentra sometida a las cargas mostradas. El miembro AD está sostenido por un cable AB y el rodillo en C, y se adapta a un orificio circular liso en D. El miembro ED se apoya en un rodillo en D y una barra que pasa por el orificio circular en E. Determine las componentes x, y, z, de la reacción en E y la tensión en el cable AB.



Prob. 6.94

http://librosysolucionarios.net

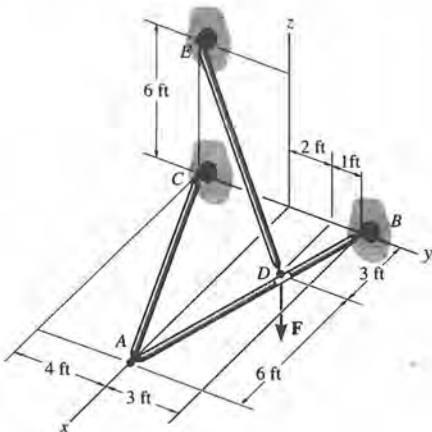
6.95. La estructura se encuentra sujeta a las cargas que se muestran. El miembro *AB* se apoya en una articulación de rótula en *A* y collarín liso en *B*. El miembro *CD* se apoya en un pasador en *C*. Determine las componentes *x*, *y*, *z* de la reacción en *A* y en *C*.



Prob. 6.95

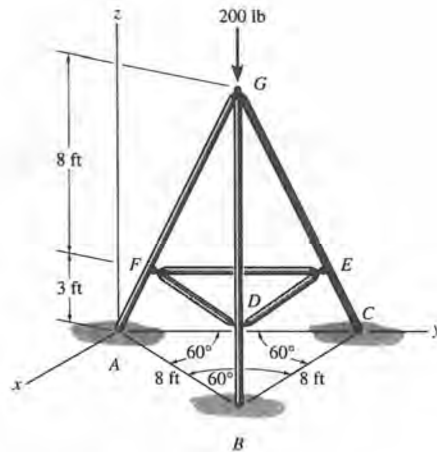
* **6.96**. El bastidor de tres miembros se conecta en sus extremos usando articulaciones de rótula. Determine las componentes *x*, *y*, *z* de la reacción en *B* y la tensión en el miembro *DE*. La fuerza que actúa en *D* es $F = \{250\mathbf{i} - 350\mathbf{k}\}$ lb.

6.97. El bastidor de tres miembros se conecta en sus extremos usando articulaciones de rótula. Determine las componentes *x*, *y*, *z* de la reacción en *B* y la tensión en el miembro *DE*. La fuerza que actúa en *D* es $F = \{135\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 180\mathbf{k}\}$lb.



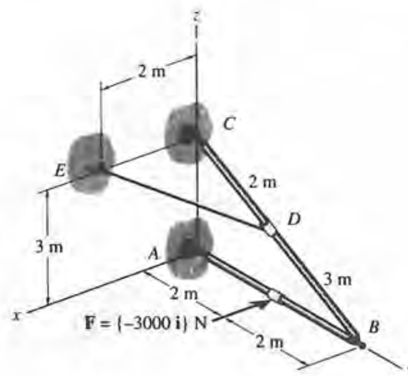
Probs. 6.96/6.97

6.98. El trípode descansa sobre la superficie lisa en *A*, *B*, y *C*. Sus tres patas que son de la misma longitud están sujetas por las puntales *DE*, *DF* y *FE*. Si todos los miembros están unidos por articulaciones de rótula, determine la fuerza en cada puntal para que haya equilibrio.



Prob. 6.98

6.99. La estructura de dos miembros tiene articulaciones de rótula en los extremos de sus miembros. Determine las componentes de la reacción en los apoyos *A* y *C* y la tensión en el cable *DE*.

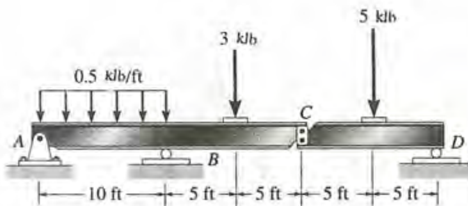


Prob. 6.99

http://librosysolucionarios.net

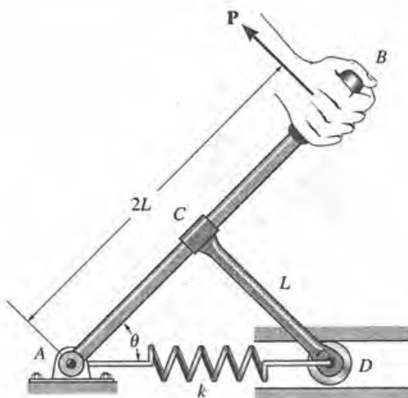
PROBLEMAS DE REPASO

*** 6.100**. Determine las reacciones en los apoyos de la viga compuesta. Hay un eslabón corto vertical en *C*.



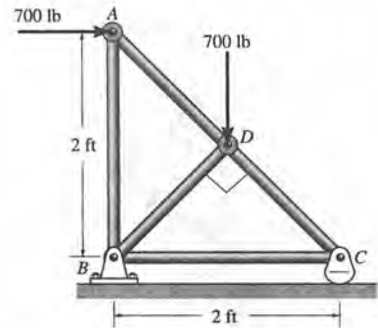
Prob. 6.100

6.101. El mecanismo de dos barras consiste en una palanca *AB* y un eslabón liso *CD*, que tiene un collarín fijo en su extremo *C* y un rodillo en el otro extremo *D*. Determine la fuerza **P** requerida para mantener la palanca en la posición θ. El resorte tiene rigidez k y longitud inextendida $2L$. El rodillo tiene contacto con la parte superior o la inferior de la guía horizontal.



Prob. 6.101

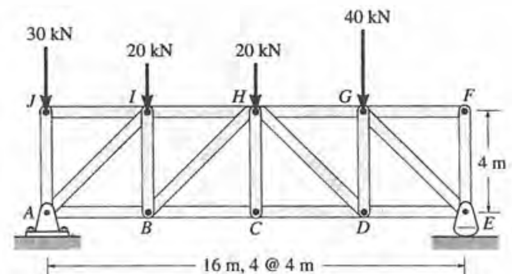
6.102. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.102

6.103. La armadura *Howe* para puente está sujeta a la carga mostrada. Determine la fuerza en los miembros *HD*, *CD* y *GD*, e indique si los miembros están en tensión o en compresión.

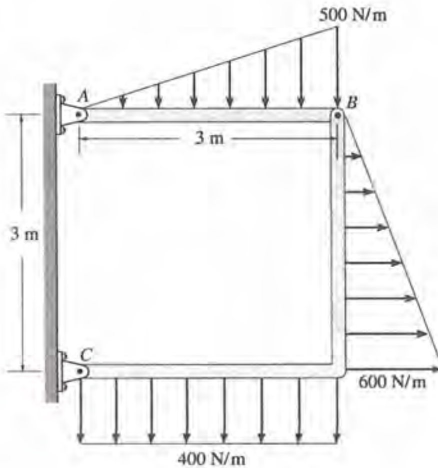
*** 6.104**. La armadura *Howe* de puente se encuentra bajo las cargas mostradas. Determine la fuerza en los miembros *HI*, *HB*, y *BC* e indique si están en tensión o en compresión.



Probs. 6.103/6.104

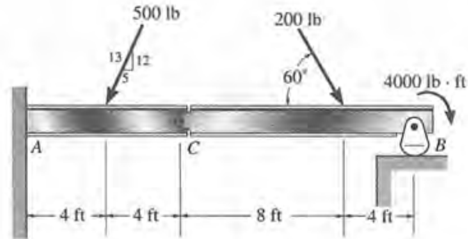
http://librosysolucionarios.net

6.105. Determine la componente horizontal y la componente vertical de fuerza en los pasadores A, B y C del bastidor de dos miembros.



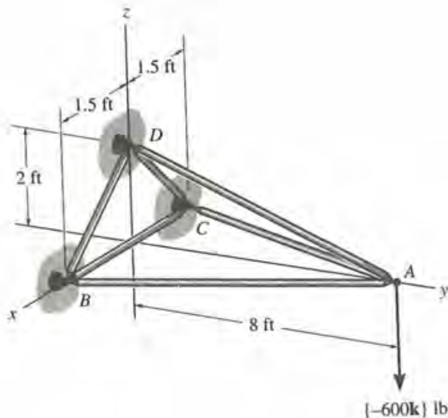
Prob. 6.105

6.107. La viga compuesta se apoya con un rodillo en B y está fija en el punto A del muro. Si está articulada en C, determine las reacciones en los soportes.



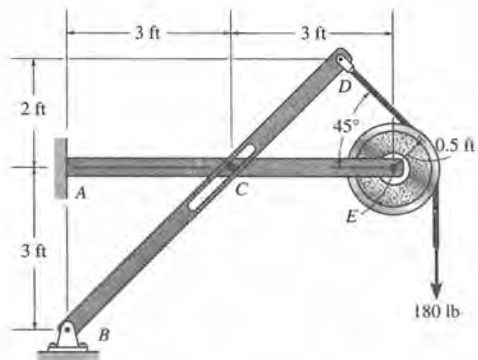
Prob. 6.107

6.106. Determine la fuerza en los miembros AB, AD y AC de la armadura espacial e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.106

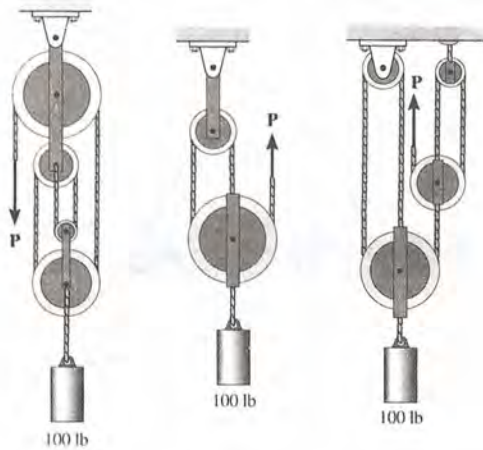
*6.108. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en A y en B. El pasador en C está sujeto al miembro AE y pasa por una ranura lisa en el miembro BD.



Prob. 6.108

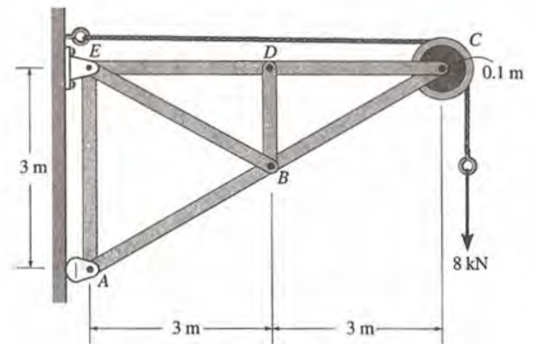
http://librosysolucionarios.net

6.109. En cada caso, determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio.



Prob. 6.109

6.110. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6.110

http://librosysolucionarios.net

7 Fuerzas internas

En este capítulo se desarrollará una técnica para encontrar la carga interna en *puntos* específicos dentro de un miembro estructural, y se generalizará este método para encontrar la variación, punto por punto, de la carga, a lo largo del eje del miembro. Una gráfica que muestre la variación de la carga interna nos permitirá encontrar los puntos críticos donde se da la carga interna *máxima*. En la última parte del capítulo se abordará el análisis de los cables.

7.1 Fuerzas internas desarrolladas en miembros estructurales

El diseño de un miembro estructural requiere una investigación de las cargas *dentro* del miembro que son necesarias para equilibrar las cargas que actuán externamente. El *método de las secciones* puede usarse con este fin. Para ilustrar el procedimiento, consideremos la viga de "apoyo simple" mostrada en la figura 7.1*a*, que está sujeta a las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. *Las reacciones de apoyo* $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, y $\mathbf{B}_y$ pueden determinarse aplicando las ecuaciones de equilibrio, usando el diagrama de cuerpo libre de *toda la viga*, figura 7.1*b*. Si las *cargas internas* en el punto *C* deben ser determinadas, es necesario pasar una sección imaginaria a través de la viga , cortándola en dos segmentos en ese punto, figura 7.1*a*. Este procedimiento "expone" las cargas internas como *externas* en el diagrama de cuerpo libre de cada segmento, figura 7.1c. Ya que se impidió que ambos segmentos (*AC* y *BC*) giraran y se trasladaran *antes* de la sección de la viga, el equilibrio de cada segmento se mantiene, si se desarrollan, en la sección de corte,

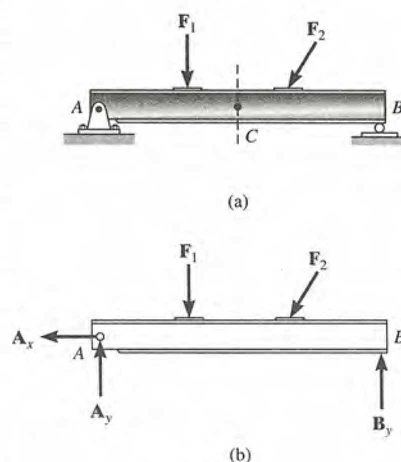


Fig. 7.1

http://librosysolucionarios.net

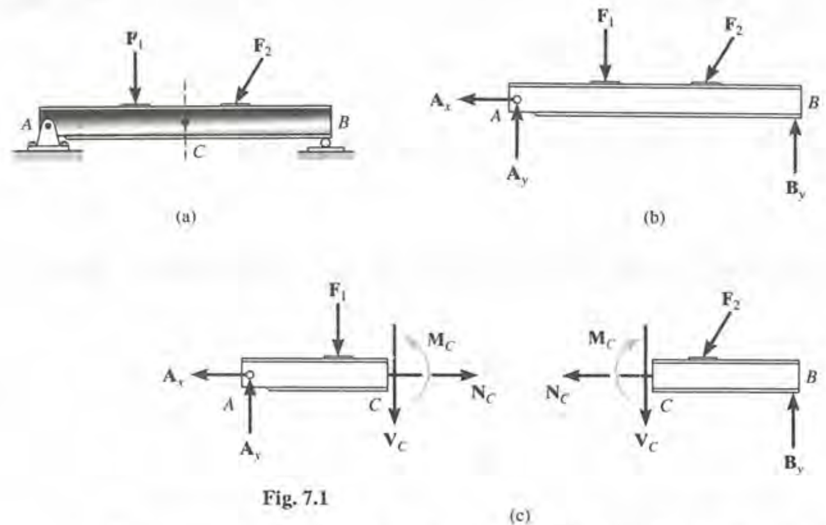


Fig. 7.1

componentes rectangulares de fuerza $\mathbf{N}_C$ y $\mathbf{V}_C$ y un momento de par resultante $\mathbf{M}_C$. Nótese que estas cargas deben ser iguales en magnitud y opuestas en dirección en cada segmento (tercera ley de Newton). La magnitud de cada incógnita puede ahora ser determinada por aplicación de las tres ecuaciones de equilibrio al segmento *AC* o *CB*. Una *solución directa* para $\mathbf{N}_C$ se obtiene aplicando $\Sigma F_x = 0$; $\mathbf{V}_C$ se obtiene directamente de $\Sigma F_y = 0$; y $\mathbf{M}_C$ se determina sumando momentos respecto al punto *C*, $\Sigma M_C = 0$, con el fin de eliminar los momentos de las incógnitas $\mathbf{N}_C$ y $\mathbf{V}_C$.

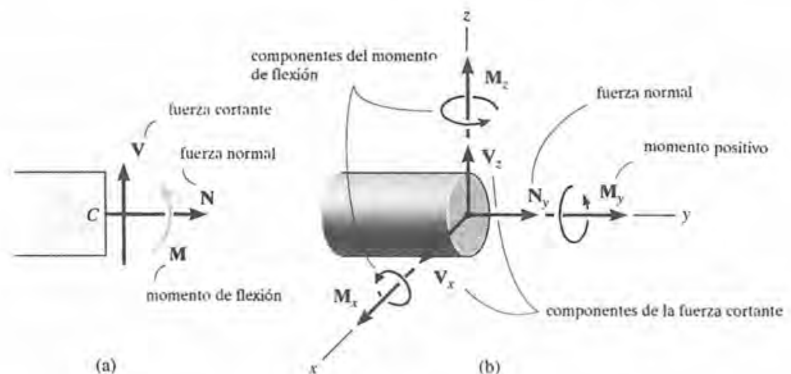


Fig. 7.2

En mecánica, las componentes de la fuerza **N**; que actúan de forma normal a la viga en la sección de corte, y **V**, que actúa tangencialmente a la sección, se denominan la fuerza *normal o axial*, y la *fuerza cortante*, respectivamente. El momento de par **M** se denomina *momento de flexión o flexionante*, figura 7.2*a*. En tres dimensiones, una fuerza interna general y un momento de par resultantes actuarán en la sección. Las componentes *x*, *y*, *z* de es-

http://librosysolucionarios.net

tas cargas se muestran en la figura 7.2*b*. Aquí $\mathbf{N}_y$ es la *fuerza normal*, $\mathbf{V}_x$ y $\mathbf{V}_z$ son *componentes de fuerza cortante*. $\mathbf{M}_y$ es un *momento de torsión* y $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ son *componentes del momento de flexión*. En la mayoría de las aplicaciones, estas *cargas resultantes* se localizarán en el centro geométrico o centroide (*C*) del área de la sección transversal. Aunque la magnitud para cada carga será, en general, diferente en puntos distintos a lo largo del eje del miembro, el método de las secciones puede siempre usarse para determinar sus valores.

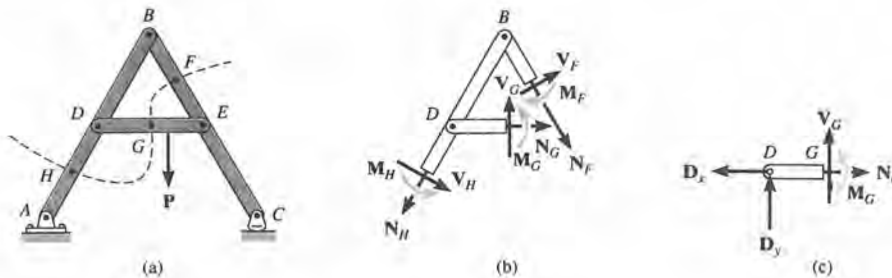


Fig. 7.3

Diagramas de cuerpo libre. Ya que los bastidores y las máquinas se componen de *miembros multiforzados*, cada uno de estos miembros estará sujeto, en general a cargas internas normales, cortantes y de flexión. Por ejemplo, considérese el bastidor mostrado en la figura 7.3*a*. Si se pasa la sección de línea segmentada a través del bastidor para determinar las cargas internas en los puntos *H*, *G* y *F*, el diagrama de cuerpo libre que resulta de la parte superior de esta sección se muestra en la figura 7.3*b*. En cada punto donde se seccione un miembro hay una fuerza normal, una fuerza cortante y un momento de flexión desconocidos. Consecuentemente, no podemos aplicar las *tres* ecuaciones de equilibrio a esta sección con el propósito de encontrar estas *nueve incógnitas*.* En vez de ello, para resolver este problema, tenemos *primeramente* que *desarmar* la estructura y determinar las reacciones en las uniones de los miembros, usando las técnicas de la sección 6.6. Hecho esto, *cada miembro* puede entonces seccionarse en su punto apropiado y se pueden aplicar las tres ecuaciones de equilibrio para determinar **N**, **V**, y **M**. Por ejemplo, el diagrama de cuerpo libre del segmento *DG*, figura 7.3*c*, puede usarse para determinar las cargas internas en *G* si se conocen las reacciones del pasador, $\mathbf{D}_x$ y $\mathbf{D}_y$.

* Recuérdese que este método de análisis es apropiado para las armaduras, pues los miembros de armaduras son *miembros rectos de dos fuerzas* que soportan tan sólo carga normal o axial.

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento sirve para aplicar el método de secciones a la determinación de las cargas internas en una localización específica en un miembro.

Reacciones en los apoyos. Antes de que el miembro se "corte" o seccione, puede ser necesario determinar las reacciones en los apoyos del miembro, de modo que las ecuaciones de equilibrio se usen solamente para resolver las cargas interiores cuando el miembro se corta. Si el miembro es parte de un bastidor o de una máquina, las reacciones en las articulaciones pueden determinarse usando los métodos de la sección 6.6.

Diagrama de cuerpo libre. Conserve todas las cargas distribuidas, momentos de pares y fuerzas que actúen sobre el miembro en su *localización exacta* y, después, pase a una sección imaginaria a través del miembro, perpendicularmente a su eje, en el punto donde se determinará la carga interna. Trace un diagrama de cuerpo libre de uno de los segmentos "cortados" a cualquier lado de la sección e indique las componentes x, y, z, de la fuerza y momento de par resultantes en la sección. En particular, si el miembro está sujeto a un sistema de fuerzas *coplanares*, solamente actuarán en la sección **N**, **V** y **M**. En muchos casos, es posible decidir por inspección el sentido correcto de las cargas desconocidas, pero si esto se dificulta, podrá suponerse el sentido.

Ecuaciones de equilibrio. Aplique las ecuaciones de equilibrio para obtener las cargas internas desconocidas. En la mayoría de los casos, deberán sumarse momentos en la sección, con respecto a ejes que pasan por el *centroide* o centro goemétrico del área de la sección transversal del miembro, para eliminar las fuerzas normal y cortante desconocidas, y así obtener soluciones directas para los momentos componentes. Si la solución de las ecuaciones de equilibrio da por resultado una cantidad que tiene una magnitud negativa, el sentido direccional supuesto para la cantidad es opuesto al indicado en el diagrama de cuerpo libre.

Lo siguientes ejemplos ilustran númericamente este procedimiento.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.1

La barra está fija en su extremo y cargada como se muestra en la figura 7.4*a*. Determine la fuerza normal interna en los puntos *B* y *C*.

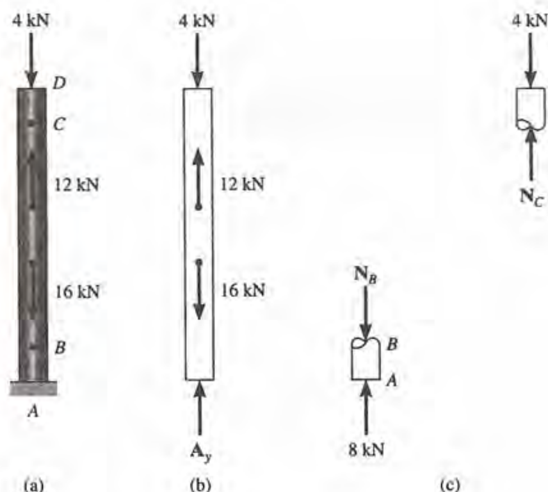


Fig. 7.4

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. En la figura 7.4*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre de la barra entera. Por inspección, en el apoyo fijo solamente actúa una fuerza normal $\mathbf{A}_y$ ya que las cargas están aplicadas simétricamente a lo largo del eje de la barra.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 16\text{ kN} + 12\text{ kN} - 4\text{ kN} = 0 \qquad A_y = 8\text{ kN}$

Diagramas de cuerpo libre. Las fuerzas internas *B* y *C* se encontrarán usando los diagramas de cuerpo libre de la barra seccionada mostrada en la figura 7.4c. En particular, aquí se escogieron los segmentos *AB* y *DC*, ya que contienen el *menor* número de fuerzas.

Ecuaciones de equilibrio

Segmento AB

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 8\text{ kN} - N_B = 0 \qquad N_B = 8\text{ kN}$ ***Resp.***

Segmento DC

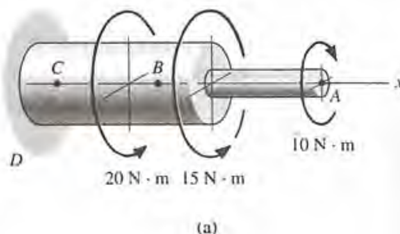
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_C - 4\text{ kN} = 0 \qquad N_C = 4\text{ kN}$ ***Resp.***

Intente desarrollar este problema de la siguiente manera: determine N_B del segmento *BD*. (Nótese que este planteamiento *no requiere* conocer la reacción en el apoyo en *A*). Usando el resultado para *NB*, aísle el segmento *BC* para determinar N_C.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.2

La flecha circular está sujeta a tres momentos de torsión como se muestra en la figura 7.5*a*. Determine el momento de torsión interior en los puntos B y C.

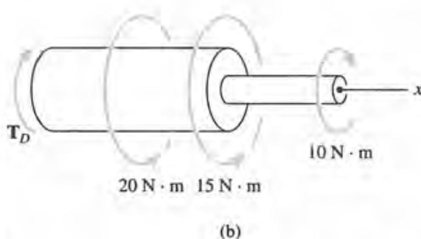


(a)

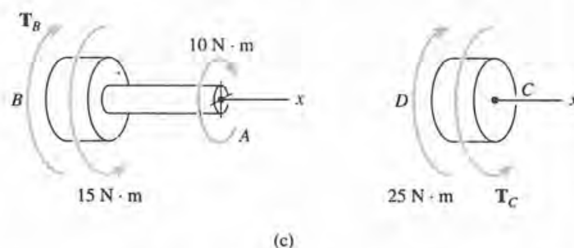
SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Como la flecha está sujeta solamente a momentos torsores colineales, en el apoyo ocurre una reacción en forma de momento de torsión. Usando la regla de la mano derecha para definir la dirección de los momentos de torsión, requerimos de

$$\Sigma M_x = 0; \quad -10\ \text{N}\cdot\text{m} + 15\ \text{N}\cdot\text{m} + 20\ \text{N}\cdot\text{m} - T_D = 0$$
$$T_D = 25\ \text{N}\cdot\text{m}$$



(b)



(c)

Fig. 7.5

Diagramas de cuerpo libre. Los momentos torsores internos en B y C se encontrarán usando los diagramas de cuerpo libre de los segmentos AB y CD de la flecha, figura 7.5*c*.

Ecuaciones de equilibrio. Si se aplica la ecuación de equilibrio de momentos a lo largo del eje de la flecha, tenemos

Segmento AB

$\Sigma M_x = 0; -10\ \text{N}\cdot\text{m} + 15\ \text{N}\cdot\text{m} - T_B = 0 \qquad T_B = 5\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

Segmento CD

$\Sigma M_x = 0; \qquad T_C - 25\ \text{N}\cdot\text{m} = 0 \qquad T_C = 25\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

Trate de desarrollar el problema para TC utilizando el segmento CA. Nótese que este planteamiento no requiere determinar la reacción en el apoyo en D.

http://librosysolucionarios.net

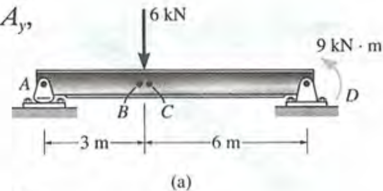
Ejemplo 7.3

La viga soporta la carga mostrada en la figura 7.6a. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan justo a la izquierda, punto B, y justo a la derecha, punto C, de la fuerza de 6 kN.

SOLUCIÓN

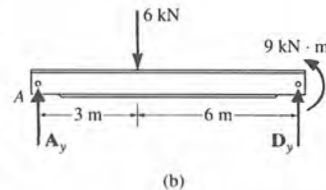
Reacciones en los apoyos. El diagrama de cuerpo libre de la viga se muestra en la figura 7.6*b*. Al determinar las reacciones externas, nótese que el momento de par de 9 kN · m es un vector libre y, por tanto, se puede situar en cualquier parte en el diagrama de cuerpo libre. Aquí sólo determinaremos A_y, pues sólo se usarán en el análisis los segmentos AB y AC.

$$\circlearrowleft +\Sigma M_D = 0; \qquad 9\text{ kN}\cdot\text{m} + (6\text{ kN})(6\text{ m}) - A_y(9\text{ m}) = 0$$
$$A_y = 5\text{ kN}$$



(a)

Diagramas de cuerpo libre. Los diagramas de cuerpo libre de los segmentos izquierdos AB y AC de la viga se muestran en las figuras 7.6*c* y 7.6*d*. En este caso, el momento de par de 9 kN · m *no se incluye* en estos diagramas, pues se le debe mantener en su *posición original* hasta *después* de hacer la sección y aislar el cuerpo apropiado. En otras palabras, las cargas internas, cuando se les determina a partir de los segmentos izquierdos de la viga, no son influidas por el efecto del momento de par, ya que este momento, de hecho, no actúa en estos segmentos.

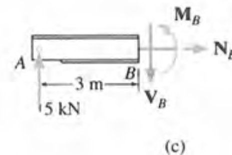


(b)

Ecuaciones de equilibrio

Segmento AB

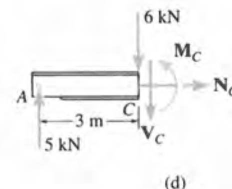
$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;$	$N_B = 0$		*Resp.*
$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$	$5\text{ kN} - V_B = 0$	$V_B = 5\text{ kN}$	*Resp.*
$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0;$	$-(5\text{ kN})(3\text{ m}) + M_B = 0$	$M_B = 15\text{ kN}\cdot\text{m}$	*Resp.*



(c)

Segmento AC

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;$	$N_C = 0$		*Resp.*
$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$	$5\text{ kN} - 6\text{ kN} - V_C = 0$	$V_C = -1\text{ kN}$	*Resp.*
$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;$	$-(5\text{ kN})(3\text{ m}) + M_C = 0$	$M_C = 15\text{ kN}\cdot\text{m}$	*Resp.*



(d)

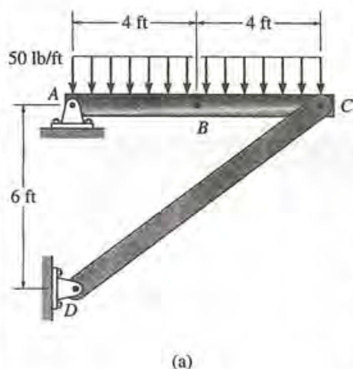
Aquí el brazo de momento para la fuerza de 5 kN es aproximadamente igual a 3 m, pues B y C son "casi" coincidentes.

Fig. 7.6

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.4

Determine la fuerza interna normal, la fuerza cortante y el momento flexión que actúan en el punto B del bastidor de dos miembros mostrado en la figura 7.7*a*.



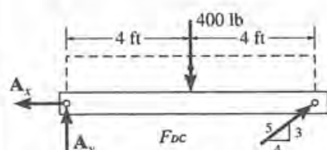
(a)

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. En la figura 7.7*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre de cada miembro. Como CD es un miembro de dos fuerzas, las ecuaciones de equilibrio deben aplicarse solamente al miembro AC.

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad -400\text{ lb}(4\text{ ft}) + (\tfrac{3}{5})F_{DC}(8\text{ ft}) = 0 \quad F_{DC} = 333.3\text{ lb}$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad -A_x + (\tfrac{4}{5})(333.3\text{ lb}) = 0 \quad A_x = 266.7\text{ lb}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad A_y - 400\text{ lb} + \tfrac{3}{5}(333.3\text{ lb}) = 0 \quad A_y = 200\text{ lb}$$

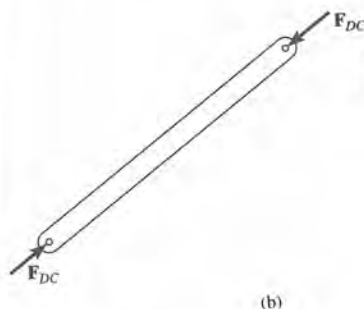
Diagramas de cuerpo libre. Al pasar una sección imaginaria perpendicular al eje del miembro AC por el punto B, se obtienen los diagramas de cuerpo libre de los segmentos AB y BC mostrados en la figura 7.7*c*. Al trazar estos diagramas es importante mantener la distribución de la carga exactamente donde está hasta *después* de la sección. ¿Por qué? También nótese que $\mathbf{N}_B$, $\mathbf{V}_B$, y $\mathbf{M}_B$ actúan con igual magnitud, pero en dirección opuesta en cada segmento: tercera ley de Newton.



Ecuaciones de equilibrio. Aplicando las ecuaciones de equilibrio al segmento AB, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad N_B - 266.7\text{ lb} = 0 \quad N_B = 267\text{ lb} \quad \textit{Resp.}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad 200\text{ lb} - 200\text{ lb} - V_B = 0 \quad V_B = 0 \quad \textit{Resp.}$$
$$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0; \quad M_B - 200\text{ lb}(4\text{ ft}) + 200\text{ lb}(2\text{ ft}) = 0$$
$$M_B = 400\text{ lb}\cdot\text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

Como ejercicio, trate de obtener estos mismos resultados usando el segmento BC.



(b)

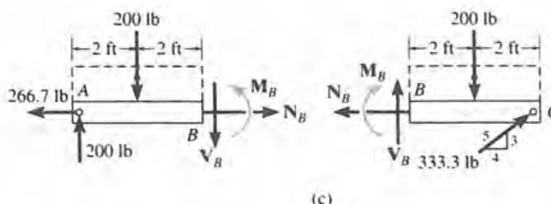
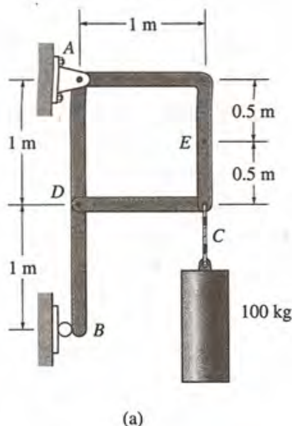


Fig. 7.7

(c)

Ejemplo 7.5

Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto E del bastidor cargado, como se ve en la figura 7.8*a*.



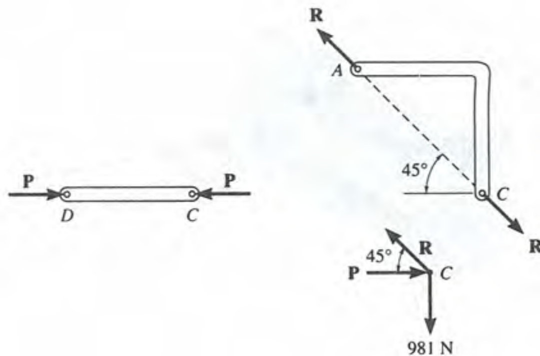
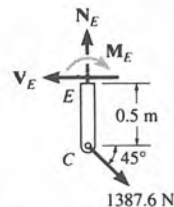


Fig. 7.8



SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Por inspección, encontramos que los miembros AC y CD son miembros de dos fuerzas, figura 7.8*b*. Con el fin de determinar las cargas internas en E, debemos primeramente determinar la fuerza **R** en el extremo del miembro AC. Para hacer esto debemos analizar el equilibrio del pasador en C. ¿Por qué?

Al sumar fuerzas en dirección vertical sobre el pasador, figura 7.8*b*, tenemos

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\qquad R \text{ sen } 45° - 981 \text{ N} = 0 \qquad R = 1387.6 \text{ N}$

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del segmento CE se muestra en la figura 7.8*c*.

Ecuaciones de equilibrio

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\qquad 1387.6 \cos 45° \text{ N} - V_E = 0 \qquad V_E = 981 \text{ N}$ ***Resp.***

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\qquad -1387.6 \text{ sen } 45° \text{ N} + N_E = 0 \qquad N_E = 981 \text{ N}$ ***Resp.***

$\circlearrowleft +\Sigma M_E = 0;\qquad 1387.6 \cos 45° \text{ N}(0.5 \text{ m}) - M_E = 0 \qquad M_E = 490 \text{ N} \cdot \text{m}$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.6

Una fuerza de $\mathbf{F} = \{-3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\}$ kN actúa en la esquina de una viga que se extiende a partir de una pared fija, como se muestra en la figura 7.9*a*. Determine las cargas internas en *A*.

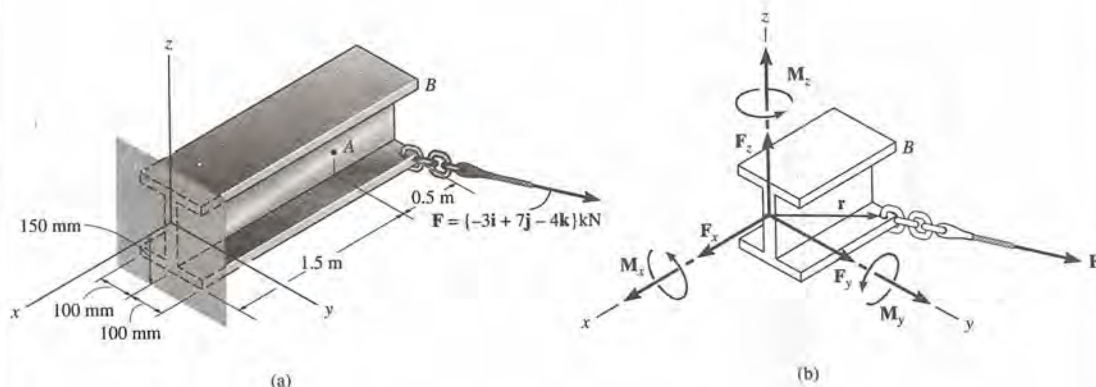


Fig. 7.9

SOLUCIÓN

Este problema será resuelto considerando el segmento *AB* de la viga, ya que *no* involucra las reacciones en el apoyo.

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del segmento *AB* se muestra en la figura 7.9*b*. Las componentes de la fuerza resultante $\mathbf{F}_A$ y el momento $\mathbf{M}_A$ pasan a través del *centroide* o centro geométrico de la sección transversal en *A*.

Ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_A - 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{F}_A = \{3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\} \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M}_A + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_A + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.5 & 0.1 & -0.15 \\ -3 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

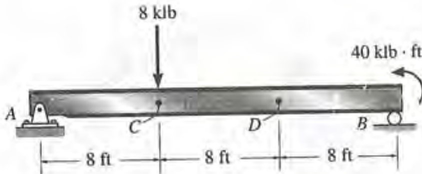
$$\mathbf{M}_A = \{-0.650\mathbf{i} + 1.55\mathbf{j} + 3.20\mathbf{k}\} \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Aquí $\mathbf{F}_x = \{3\mathbf{i}\}$kN representa la fuerza normal N, mientras que $\mathbf{F}_y = \{-7\mathbf{j}\}$ kN y $\mathbf{F}_z = \{4\mathbf{k}\}$ kN son las componentes de la fuerza cortante $V = \sqrt{F_y^2 + F_z^2}$ También, el momento de torsión es $\mathbf{T} = \mathbf{M}_z = \{-0.65\mathbf{i}\}$ kN · m, y el momento flexionante está determinado según las componentes $\mathbf{M}_y = \{1.55\mathbf{j}\}$ kN · m y $\mathbf{M}_z = \{3.20\mathbf{k}\}$ kN · m; es decir, $M_b = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$

http://librosysolucionarios.net

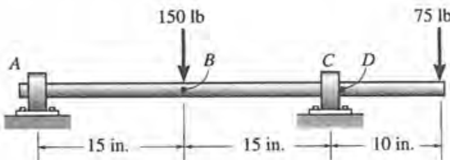
PROBLEMAS

7.1. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en la viga en los puntos *C* y *D*. El punto *C* está localizado justo a la derecha de la carga de 8 klb.



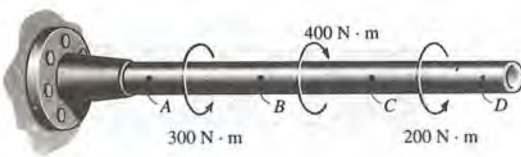
Prob. 7.1

7.2 Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en la flecha en los puntos *B* y *D*. Estos puntos se encuentran justo a la derecha de la fuerza de 150 lb y de la chumacera en *C*, respectivamente. En *A* se encuentra una chumacera de empuje y en *C*, una chumacera simple.



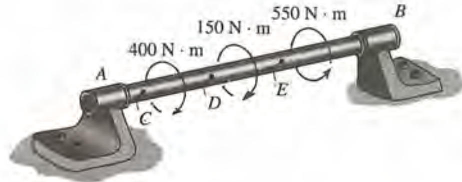
Prob. 7.2

7.3. En la flecha actúan tres momentos de torsión, como se muestra. Determine el momento de torsión en los puntos *A*, *B*, *C*, y *D*.



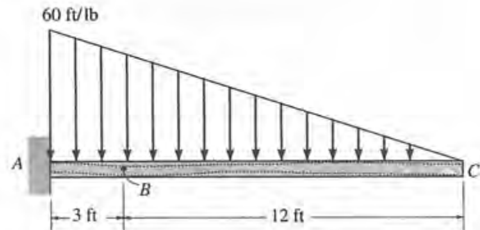
Prob. 7.3

***7.4**. La flecha se apoya en las chumaceras lisas que se encuentran en *A* y *B*, y está sometida a los torques que se indican. Determine el torque en el punto *C*, en el punto *D* y en el punto *E*.



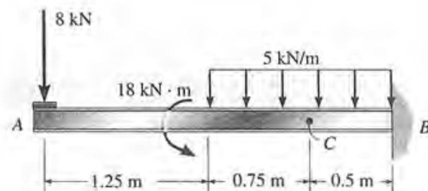
Prob. 7.4

7.5. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en la viga en el punto *B*.



Prob. 7.5

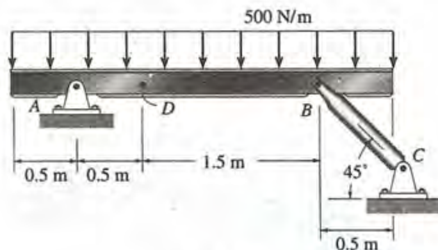
7.6. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento que actúan en el punto *C*.



Prob. 7.6

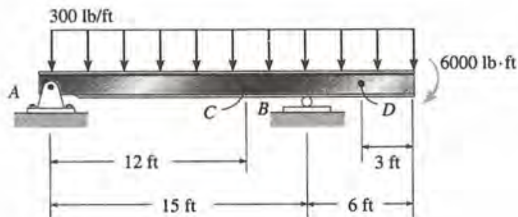
http://librosysolucionarios.net

7.7. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento que actúan en el punto D de la viga.



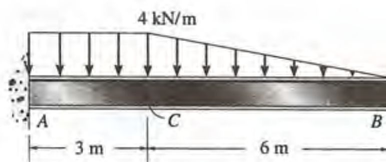
Prob. 7.7

***7.8.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento que actúan en los puntos C y D de la viga.



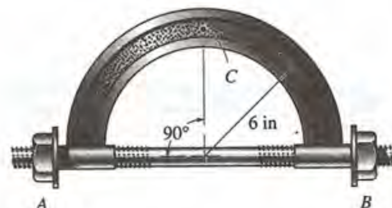
Prob. 7.8

7.9. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento que actúan en el punto C.



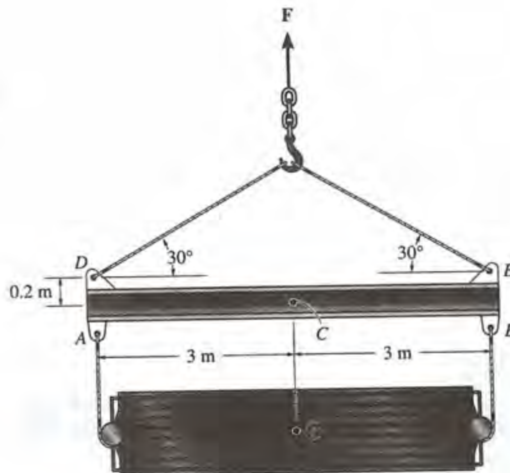
Prob. 7.9

7.10. La espiga de perno está sujeta a una tensión de 80 lb. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento que actúan en el punto C.



Prob. 7.10

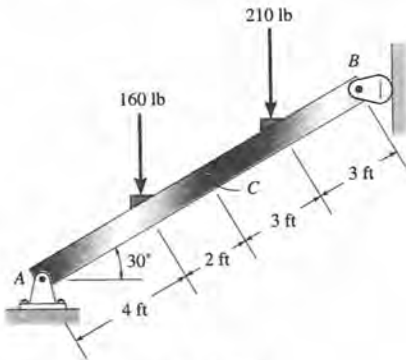
7.11. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento que actúan en el punto C. La unidad de enfriamiento tiene un peso total de 52 klb y centro de gravedad en G.



Prob. 7.11

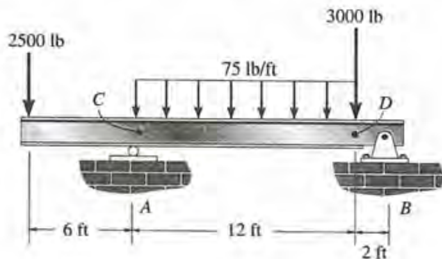
http://librosysolucionarios.net

*7.12. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento que actúan en el punto C. Desprecie el espesor de la viga.



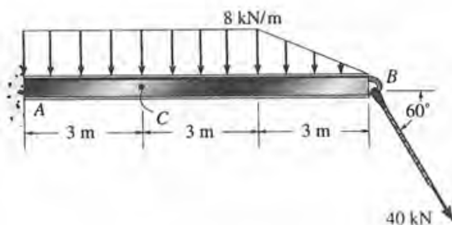
Prob. 7.12

7.13. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en (a) punto C, que está justo a la derecha del rodillo en A, y (b) punto D, que está justo a la izquierda de la fuerza concentrada de 3000 lb.



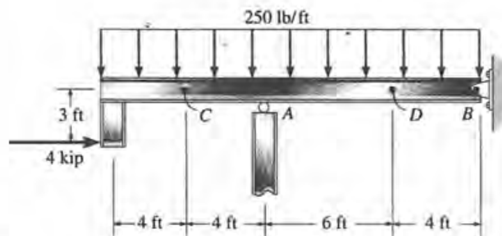
Prob. 7.13

7.14. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en el punto C.



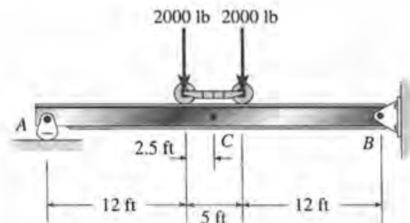
Prob. 7.14

7.15. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en la viga en los puntos C y D.



Prob. 7.15

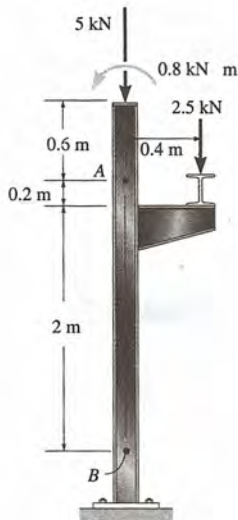
*7.16. El carro de la grúa ejerce fuerzas de 2000 lb sobre la viga. Determine el momento desarrollado en la viga en el punto C, cuando el carro está en la posición mostrada. Desprecie el peso de la viga y el carro.



Prob. 7.16

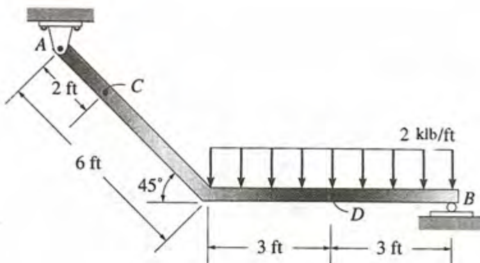
http://librosysolucionarios.net

7.17. La viga-columna está fija en el suelo y soporta la carga mostrada. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en los puntos A y B, debido a esta carga.



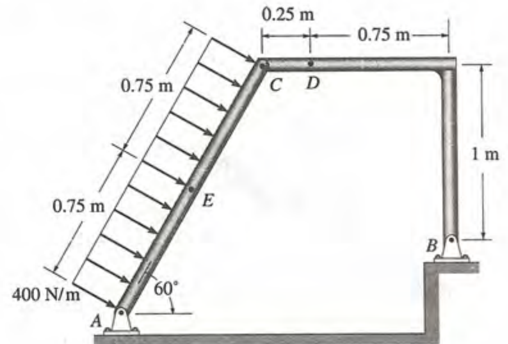
Prob. 7.17

7.18. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en los puntos C y D de la viga.



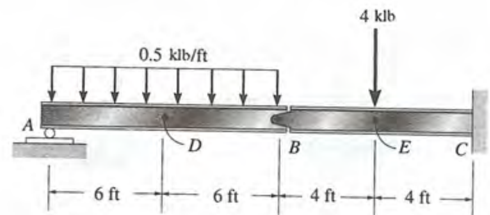
Prob. 7.18

7.19. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en los puntos D y E del bastidor.



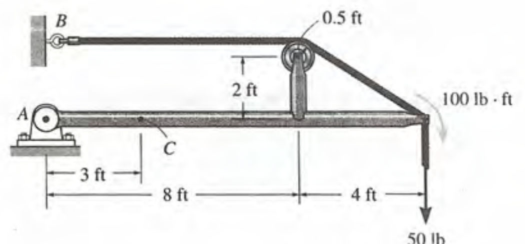
Prob. 7.19

***7.20.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en la viga en los puntos D y E. El punto E está justo a la derecha de la carga de 4 klb. La unión en B es un pasador.



Prob. 7.20

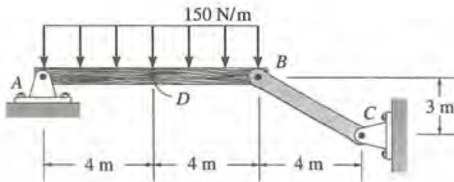
7.21. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en el punto C.



Prob. 7.21

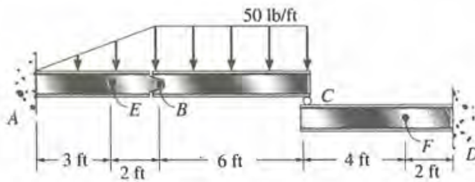
http://librosysolucionarios.net

7.22. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento en el punto *D*.



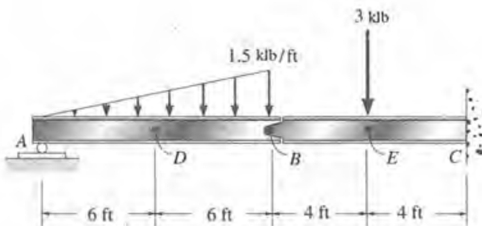
Prob. 7.22

7.23. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento en los puntos *E* y *F*.



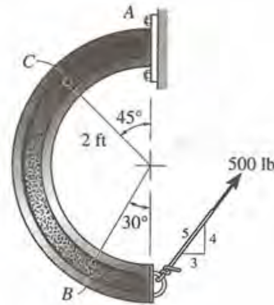
Prob. 7.23

* **7.24.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento en la viga en los puntos *D* y *E*. El punto *E* está justo a la derecha de la carga de 3 klb.



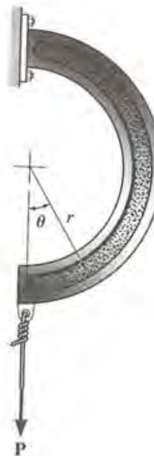
Prob. 7.24

7.25. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento que actúan en los puntos *B* y *C* del miembro curvo.



Prob. 7.25

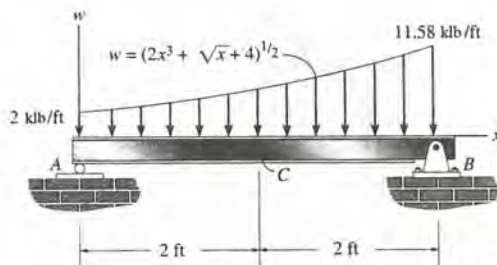
7.26. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y momento en el miembro curvo como función de θ.



Prob. 7.26

http://librosysolucionarios.net

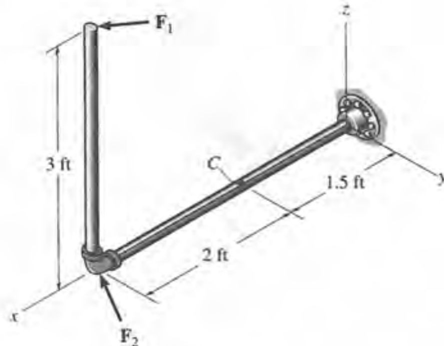
■ **7.27.** Determine la fuerza cortante y momento que actúan en el punto C de la viga. Utilice la regla de Simpson para evaluar las integrales requeridas en el cálculo.



Prob. 7.27

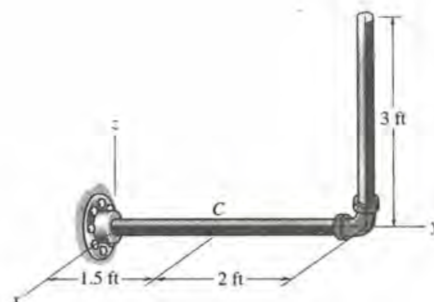
* **7.28.** Determine las componentes x, y, z de la fuerza y el momento en el punto C de la tubería. Despreciando el peso del tubo; suponga que $\mathbf{F}_1 = \{350\mathbf{i} - 400\mathbf{j}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{-300\mathbf{j} + 150\mathbf{k}\}$ lb.

7.29. Determine las componentes x, y, z de la fuerza y el momento en el punto C de la tubería. No tome en cuenta el peso del tubo. Considere que $\mathbf{F}_1 = \{200\mathbf{i} - 300\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{-150\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 250\mathbf{k}\}$lb.



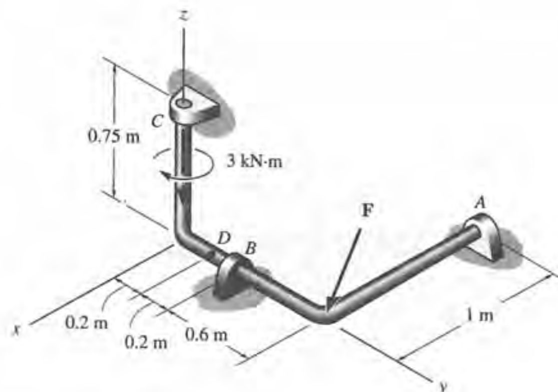
Probs. 7.28/7.29

7.30. Determine las componentes x, y, z de la fuerza y el momento en el punto C de la tubería. Haga caso omiso del peso del tubo. La carga que actúa en (0, 3.5 ft, 3 ft) es $\mathbf{F}_1 = \{-24;-10\mathbf{k}\}$ lb y $M = \{-30\mathbf{k}\}$ lb · ft y en el punto (0, 3.5 ft, 0) $\mathbf{F}_2 = \{-80\mathbf{i}\}$ lb.



Prob. 7.30

7.31. Determine las componentes x, y, z de la fuerza y el momento en el punto D de la varilla. Considere que $\mathbf{F} = \{7\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\}$kN. Los apoyos en A, B, C son chumaceras.



Prob. 7.31

http://librosysolucionarios.net

*7.2 Diagramas y ecuaciones de fuerza cortante y de momento

Las *vigas* son miembros estructurales que se diseñan para soportar cargas aplicadas perpendicularmente a su eje. En general, las vigas son barras rectas, largas, que tienen sección transversal de área constante. Suelen clasificarse por la naturaleza de sus apoyos. Por ejemplo, una *viga de apoyo simple* está articulada en un extremo, y el otro se apoya con un rodillo, figura 7.10, en tanto que una *viga voladiza* se halla fija en un extremo y libre en el otro. El diseño real de una viga requiere conocimiento detallado de la variación de la fuerza cortante interna V y del momento de flexión M que actúan en *cada punto* a lo largo del eje de la viga. Luego de efectuar el análisis de fuerzas y de momentos de flexión, uno puede usar la teoría de la mecánica de materiales para determinar el área de la sección transversal requerida de la viga.

Las *variaciones* de V y M como funciones de la posición x de un *punto arbitrario* a lo largo del eje de la viga pueden obtenerse usando el método de las secciones discutido en la sección 7.1. Aquí, sin embargo, es necesario efectuar la sección imaginaria a una distancia arbitraria x del extremo de la viga, en vez de hacerlo en un punto especificado. Si se grafican los resultados, las gráficas de V y M como funciones de x reciben el nombre de *diagrama de fuerzas cortantes y diagrama de momentos de flexión*, respectivamente.

En general, las funciones de la fuerza cortante y el momento de flexión internos serán discontinuas, o su pendiente será discontinua en los puntos donde la carga distribuida cambia o donde se aplican fuerzas concentradas o momentos de pares. Debido a esto, las funciones de la fuerza cortante y el momento de flexión deben determinarse para *cada segmento* de la viga localizado entre dos discontinuidades cualesquiera de la carga. Por ejemplo, habrá que usar secciones localizadas en x_1, x_2 y x_3 para describir la variación de V y M, a través de toda la longitud de la viga en la figura 7.10. Estas funciones serán válidas *solamente* dentro de las regiones que van desde *0* hasta a para x_1, desde a hasta b para x_2 y desde b hasta L para x_3.

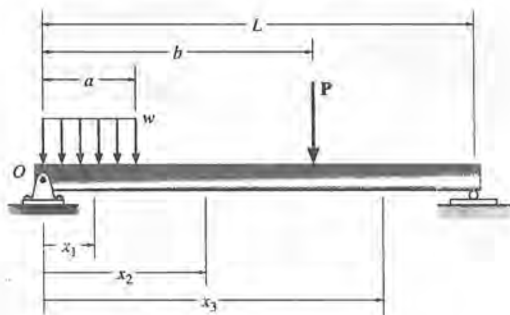


Fig. 7.10

http://librosysolucionarios.net

La fuerza normal interna no se considerará en la siguiente discusión, por dos razones. En la mayoría de los casos, las cargas aplicadas a la viga actúan perpendicularmente al eje de la viga y, por tanto, sólo producen fuerza cortante y momento de flexión internos. Para fines de diseño, la resistencia de la viga a la fuerza cortante, y particularmente al momento de flexión, es más importante que su capacidad para resistir la fuerza normal.

Convención de signo. Antes de presentar un método para determinar la fuerza cortante y el momento de flexión como funciones de x y, después graficar estas funciones (diagramas de fuerzas cortantes y de momentos de flexión), es necesario establecer una *convención de signos* para definir la fuerza cortante y el momento de flexión "positivos" y "negativos" que actúan en la viga. [Esto es análogo a asignar las direcciones positivas de los ejes coordenados, del eje x positivo hacia la derecha, y del eje y positivo hacia arriba, al graficar una función $y = f(x)$]. Aun cuando es arbitraria la elección de una convención de signo, elegiremos en este libro la utilizada en la mayoría de los libros de mecánica. Se ilustra en la figura 7.11. Aquí las direcciones positivas corresponden a una *fuerza cortante* interna que causa *rotación* del miembro en que actúa en el *sentido de las manecillas de un reloj*, y un *momento* interno que causa *compresión en la parte de arriba* del miembro. Las cargas opuestas a las que se acaban de describir se consideran negativas.



Fig. 7.11

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS.

El siguiente procedimiento proporciona un medio de construcción de los diagramas de fuerzas cortantes y momentos de flexión para una viga.

Reacciones en los apoyos. Determine todas las fuerzas y pares reactivos que actúan sobre la viga y descomponga las fuerzas en componentes que actúen perpendicular y paralelamente al eje de la viga.

Funciones de momento y fuerza cortante. Especifique coordenadas separadas x con origen en el *extremo izquierdo* de la viga y que se extienden a regiones de la viga entre fuerzas concentradas y/o momentos de pares, o donde no hay discontinuidad de la distribución de cargas. Corte la viga perpendicularmente a su eje en cada distancia x. En el diagrama de cuerpo libre, es importante asegurarse de que **V** y **M** actuán en el *sentido positivo* que corresponde, según el convenio de signo dado en la figura 7.11. V se obtiene sumando las fuerzas perpendiculares al eje de la viga, y M se obtiene sumando momentos respecto al extremo seccionado al segmento.

Diagramas de fuerza cortante y de momento. Grafique el diagrama de fuerza cortante (V contra x) y el diagrama de momento (M contra x). Si los valores calculados de las funciones que describen V y M son *positivos*, los valores se marcan arriba del eje x, en tanto que valores *negativos*, abajo. En general, es conveniente hacer las gráficas de fuerza cortante y momento de flexión directamente abajo del diagrama de cuerpo libre de la viga.

Los siguientes ejemplos ilustran numéricamente este procedimiento.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.7

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento de flexión para la viga indicada en la figura 7.12*a*.

SOLUCIÓN

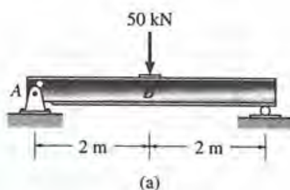
Reacciones en los apoyos. Se han calculado las reacciones en los apoyos, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 7.12*d*.

Funciones de momento y fuerza cortante. La viga está seccionada a una distancia arbitraria x a partir del punto A, que se extiende dentro de la región AB, y el diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo se muestra en la figura 7.12*b*. Las incógnitas **V** y **M** actúan en la *dirección positiva* sobre la cara derecha del segmento, de acuerdo con la convención de signos establecida. ¿Por qué? Aplicando las ecuaciones de equilibrio se llega a

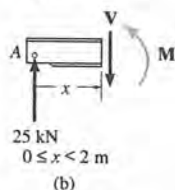
$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\qquad V = 25\text{ kN} \qquad (1)$

$\circlearrowleft +\Sigma M = 0;\qquad M = 25x\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad (2)$

En la figura 7.12*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre para el segmento izquierdo de la viga, que se extiende una distancia x dentro de la región BC. Como siempre, **V** y **M** actúan en el sentido positivo. Por lo tanto,

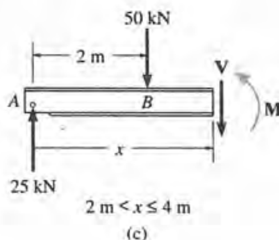


(a)



$0 \le x < 2$ m

(b)



$2\text{ m} < x \le 4$ m

(c)

http://librosysolucionarios.net

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\qquad 25 - 50 - V = 0$

$$V = -25 \text{ kN} \qquad (3)$$

$\circlearrowleft +\Sigma M = 0;$ $\qquad M + 50(x-2) - 25(x) = 0$

$$M = (100 - 25x) \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad (4)$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento. Cuando las ecuaciónes 1 a 4 se grafican dentro de las regiones en las que son válidas, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y de momento de flexión mostrados en la figura 7.12*d*. El diagrama de fuerza cortante indica que la fuerza cortante interna es siempre de 25 kN (positiva) a lo largo del segmento *AB* de la viga. Justo a la derecha del punto *B*, la fuerza cortante cambia de signo y se conserva a un valor constante de –25 kN para el segmento *BC*. El diagrama de momento de flexión parte de cero, se incrementa linealmente hasta el punto *C* en $x = 2$ m, donde $M_{máx} = 25$ kN(2 m) = 50 kN · m, y de ahí en adelante decrece hasta cero.

En la figura 7.12*d* se ve que los diagramas de fuerza cortante y de momento de flexión son discontinuos en los puntos donde hay fuerzas concentradas; es decir, en los puntos *A*, *B* y *C*. Por esta razón, como ya se estableció anteriormente, es necesario expresar tanto la función de la fuerza cortante como la del momento de flexión, separadamente, por regiones entre cargas concentradas. Debería tenerse en cuenta, sin embargo, que todas las discontinuidades de la carga son matemáticas y provienen de la *idealización de una fuerza y de un par concentrados.* Físicamente, las cargas se aplican sobre un área finita, y si esta variación de la carga pudiera tomarse en cuenta, todos los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos de flexión serían en realidad continuos sobre toda la longitud de la viga.

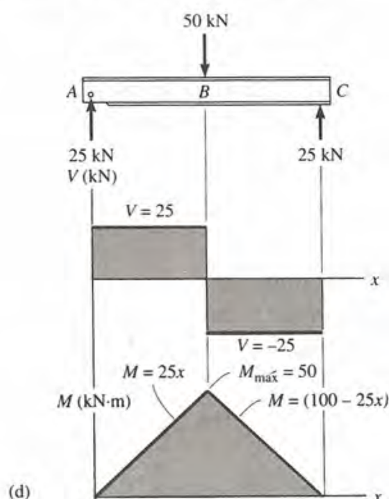


Fig. 7.12

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.8

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento de flexión para la viga indicada en la figura 7.13*a*.

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Se han calculado las reacciones en los apoyos, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 7.13*c*.

Funciones de momento y fuerza cortante. En la figura 7.13*b* se indica el diagrama de cuerpo libre para un segmento izquierdo de longitud de la viga. La carga distribuida que actúa sobre este segmento, que tiene una intensidad de $\frac{2}{3}x$ en su extremo, se sustituye por una fuerza resultante *después* de que se aisla el segmento como diagrama de cuerpo libre. La *magnitud* de la fuerza resultante es igual a $\frac{1}{2}(x)(\frac{2}{3}x) = \frac{1}{3}x^2$. Esta fuerza *actúa en el centroide* del área de la carga distribuida, a una distancia de $\frac{1}{3}x$ a partir del extremo derecho. Al aplicar las dos ecuaciones de equilibrio se obtiene como resultado

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 9 - \frac{1}{3}x^2 - v = 0$$

$$V = \left(9 - \frac{x^2}{3}\right) \text{kN} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M = 0; \qquad M + \frac{1}{3}x^2\left(\frac{x}{3}\right) - 9x = 0$$

$$M = \left(9x - \frac{x^3}{9}\right) \text{kN} \cdot \text{m} \qquad (2)$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento. Los diagramas de la fuerza cortante y del momento de flexión indicados en la figura 7.10*c* se obtienen graficando las ecuaciones 1 y 2.

El punto donde la *fuerza cortante* es *cero* puede encontrarse mediante la ecuación 1:

$$V = 9 - \frac{x^2}{3} = 0$$

$$x = 5.20 \text{ m}$$

Este valor de x representa el punto sobre la viga donde hay *momento máximo* (véase la sección 7.3). Sí usamos la ecuación 2, tenemos

$$M_{\text{máx}} = \left(9(5.20) - \frac{(5.20)^3}{9}\right) \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$= 31.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

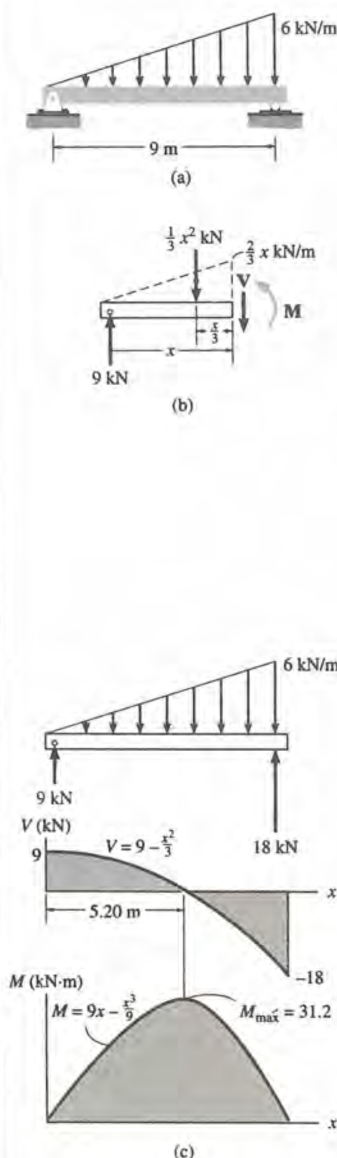


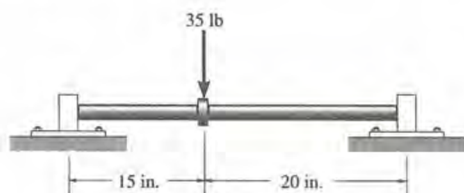
Fig. 7.13

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

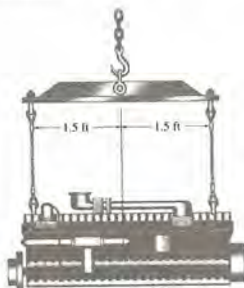
Para cada uno de los problemas que siguen, establezca el eje x con origen en el extremo izquierdo de la viga, y obtenga la fuerza cortante interna y el momento como función de x. Use estos resultados para graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento.

***7.32.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la flecha.



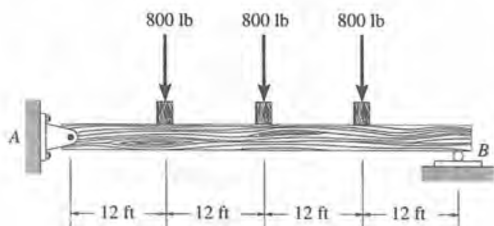
Prob. 7.32

7.33. La barra sostiene el motor de 600 lb. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la barra de suspensión.



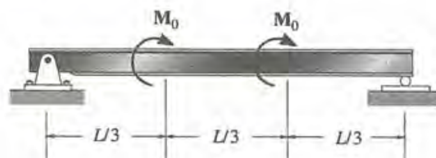
Prob. 7.33

7.34. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga.



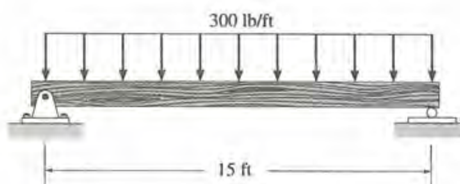
Prob. 7.34

7.35. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en términos de los parámetros mostrados.



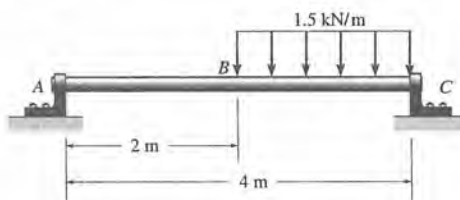
Prob. 7.35

***7.36.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



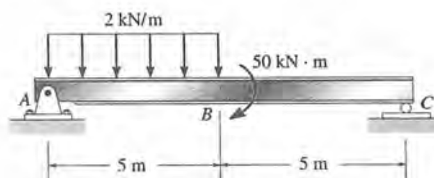
Prob. 7.36

7.37. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la flecha. Los apoyos en A y C son chumaceras.



Prob. 7.37

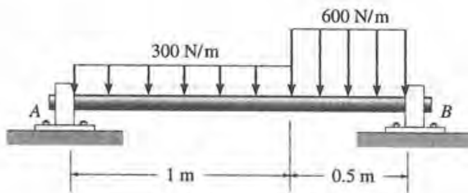
7.38. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 7.38

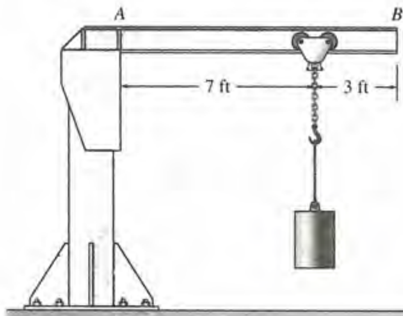
http://librosysolucionarios.net

7.39. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la flecha. Los soportes en A y B son chumaceras.



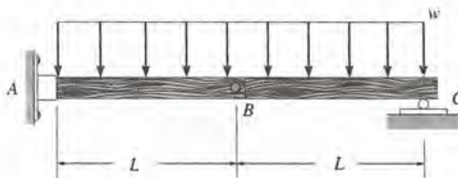
Prob. 7.39

***7.40.** La grúa de brazo soporta un peso de 750 lb. Si el aguilón AB tiene un peso uniforme de 60 lb/ft, trace los diagramas de fuerza cortante y momento para el aguilón.



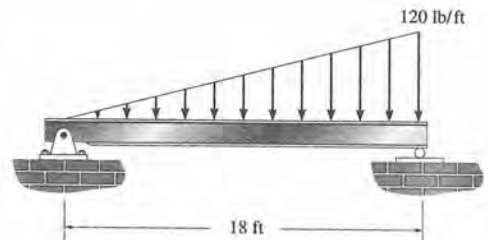
Prob. 7.40

7.41. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga ABC. Nótese que A es un soporte fijo y que en B hay un pasador. Resuelva el problema usando los parámetros que se muestran.



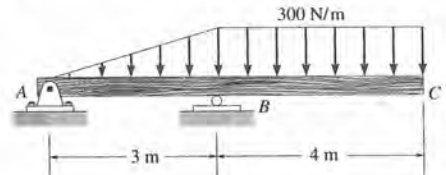
Prob. 7.41

7.42. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



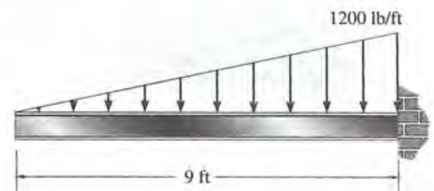
Prob. 7.42

7.43. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga.



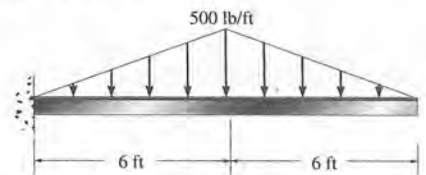
Prob. 7.43

***7.44.** Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga.



Prob. 7.44

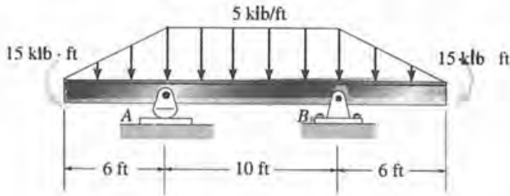
7.45. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 7.45

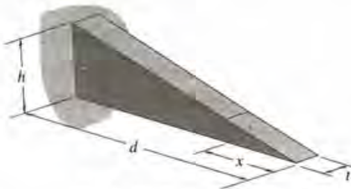
http://librosysolucionarios.net

7.46. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



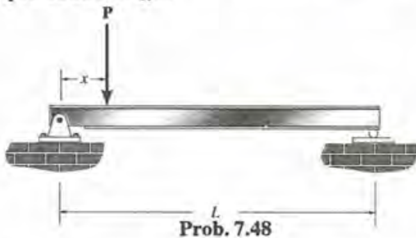
Prob. 7.46

7.47. La viga voladiza es de un material con peso específico. γ Determine la fuerza cortante y el momento como función de x.



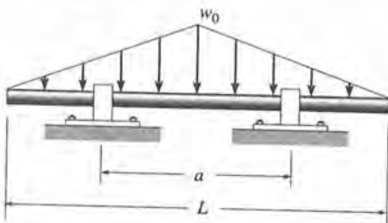
Prob. 7.47

*** 7.48.** La viga cederá cuando el momento máximo desarrollado en ella sea de $M_{máx}$. Determine la posición x de la fuerza concentrada **P** y su mínima magnitud para que ceda la viga.



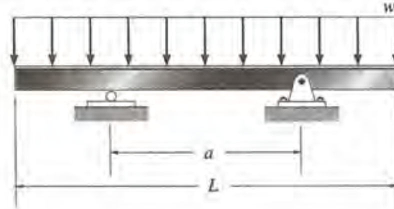
Prob. 7.48

7.49. Determínese la distancia a entre los apoyos en términos de la longitud L de la viga, de manera que el momento de flexión en la flecha *simétrica* sea cero en el centro de la flecha. La intensidad de la carga distribuida en el centro de la flecha es w_o. Los apoyos son chumaceras.



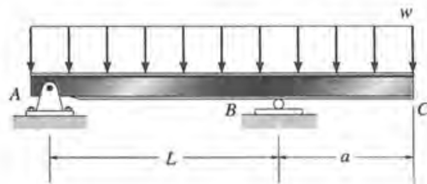
Prob. 7.49

7.50. Determine la distancia a entre los apoyos en términos de la longitud, L , de la viga, de manera que el momento en el centro de la viga *simétrica* sea cero.



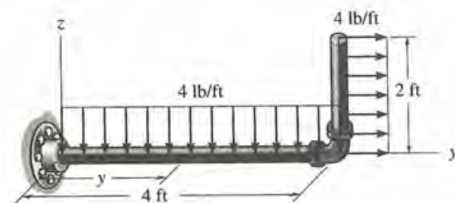
Prob. 7.50

7.51. Determine la colocación a del rodillo B desde C, de modo que se igualen las magnitudes respectivas del momento máximo y el momento mínimo.



Prob. 7.51

7.52. Exprese las componentes de fuerza cortante y de momento que actúan en el tubo como función de y, donde $0 \leq y \leq 4$ft.



Prob. 7.52

http://librosysolucionarios.net

7.3 Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento

En los casos en los que una viga se sujeta a la acción de varias fuerzas concentradas, momentos de par y cargas distribuidas, el método para trazar los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos de flexión que se discutió en la sección 7.2 puede volverse muy tedioso. En esta sección se discutirá un método más simple para trazar estos diagramas un método basado en las relaciones diferenciales que existen entre la carga, fuerza cortante y momento de flexión.

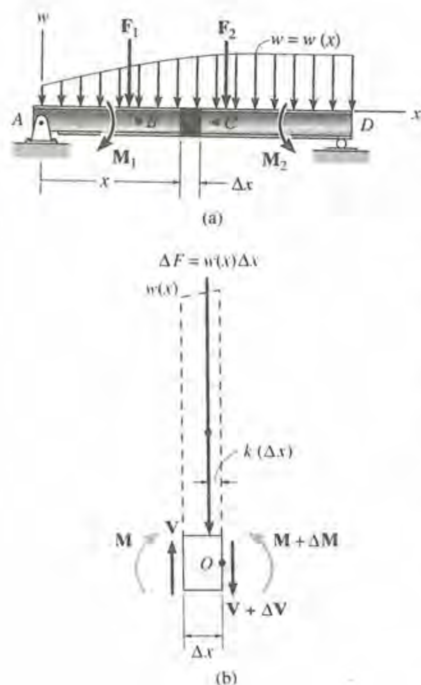


Fig. 7.14

Carga distribuida. Considere la viga *AD* indicada en la figura 7.14*a*, que está sujeta a la acción de una carga distribuida arbitraria $w = w(x)$ y a una serie de fuerzas concentradas y momentos de par. En lo que sigue, *la carga distribuida* se considerará *positiva* cuando la *carga actúe hacia abajo*. En la figura 7.14*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre para un pequeño segmento de la viga que tiene una longitud Δx. Como este segmento se ha elegido en un punto x a lo largo de la viga, que *no* está sujeto a una fuerza o a un momento de par concentrados, cualesquiera de los resultados que se obtengan no podrán aplicarse a puntos donde se apliquen cargas concentradas. La fuerza cortante y el momento de flexión internos mostrados en el diagrama de cuerpo libre se supone que actúan en la *dirección positiva*, de acuerdo con la convención de signos establecida, figura 7.14*b*. Nótese que tanto la fuerza cortante como el momento de flexión que actúan en la cara derecha deben incrementarse en una cantidad finita pequeña, para mantener al segmento en equilibrio. La carga distribuida se ha sustituido por una fuerza concentrada $\Delta F = w(x)\,\Delta x$ que actúa a una distancia muy pequeña $k(\Delta x)$ del extremo derecho, donde $0 < k < 1$ [por ejemplo, si $w(x)$ es *uniforme*, $k = \frac{1}{2}$]. Aplicando las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad V - w(x)\,\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$
$$\Delta V = -w(x)\,\Delta x$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0; \quad -V\,\Delta x - M + w(x)\,\Delta x[k(\Delta x)] + (M + \Delta M) = 0$$
$$\Delta M = V\,\Delta x - w(x)k(\Delta x)^2$$

Dividiendo por Δx y tomando el límite cuando, $\Delta x \to 0$, estas dos ecuaciones vienen a ser

http://librosysolucionarios.net

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \tag{7.1}$$

Pendiente del diagrama de fuerza cortante	=	Negativo de la intensidad de carga distribuida

y

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.2}$$

Pendiente del diagrama de momento	=	Fuerza cortante

Estas dos ecuaciones proporcionan una forma conveniente para trazar los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos de flexión. Para un punto específico de la viga, la ecuación 7.1 establece que la *pendiente del diagrama de fuerzas cortantes es igual al negativo de la intensidad de la carga distribuida en el punto*, mientras que la ecuación 7.2 establece que *la pendiente del diagrama de momentos es igual a la fuerza cortante en el punto*. En particular, si la fuerza cortante es igual a cero, $dM/dx = 0$, por consiguiente, *los puntos de fuerza cortante cero corresponden a puntos de momento de flexión máximo (o posiblemente mínimo).*

Las ecuaciones 7.1 y 7.2 pueden también reescribirse en la forma $dV = -w(x)\,dx$ y $dM = V\,dx$. Tomando en cuenta que $w(x)\,dx$ y $V\,dx$ representan áreas diferenciales bajo los diagramas de carga distribuida y fuerza cortante, respectivamente, se podrán integrar estas áreas entre dos puntos B y C a lo largo de la viga, figura 7.14*a*, y escribir

$$\Delta V_{BC} = -\int w(x)\,dx \tag{7.3}$$

Cambio en fuerza cortante	=	Negativo del área bajo la curva de cargas

y

$$\Delta M_{BC} = \int V\,dx \tag{7.4}$$

Cambio en momento	=	Área bajo diagrama de fuerza cortante

http://librosysolucionarios.net

La ecuación 7.3 afirma que el *cambio en la fuerza cortante entre los puntos B y C es igual al negativo del área bajo la curva de la distribución de cargas entre estos dos puntos.* Análogamente, de la ecuación 7.4, el *cambio del momento entre B y C es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante dentro de la región BC.* Ya que se hacen dos integraciones, la primera para determinar el cambio en fuerza cortante, ecuación 7.3, y la segunda para determinar el cambio del momento, ecuación 7.4, podemos decir que si la curva de cargas $w = w(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $V = V(x)$ será una curva de grado $n + 1$, y $M = M(x)$ será una curva de grado $n + 2$.

Como se dijo previamente, las ecuaciones anteriores no se aplican en puntos donde actúa una fuerza o momento de par *concentrado.* Estos casos especiales crean *discontinuidades* en los diagramas de fuerza cortante y de momento y, por tanto, necesitan, cada uno, tratamiento por separado.

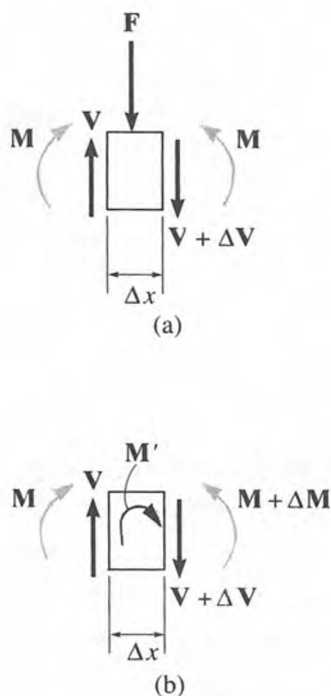


Fig. 7.15

http://librosysolucionarios.net

Fuerza. Un diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento de la viga en la figura 7.14*a*, tomado debajo de una de las fuerzas, se muestra en la figura 7.15*a*. Aquí puede verse que el equilibrio de fuerzas requiere

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \Delta V = -F \qquad (7.5)$$

Así pues, el *cambio en fuerza cortante es negativo*, de modo que en el diagrama de fuerza cortante, la fuerza cortante "salta" *hacia abajo cuando* **F** *actúa hacia abajo* sobre la viga. Así también, el salto en la fuerza cortante (ΔV) es hacia arriba cuando **F** actúa hacia arriba.

Momento de par. Si tomamos un segmento de viga en la figura 7.14*a* que se encuentre en el momento de par, el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 7.15*b* es lo que obtenemos. En este caso, haciendo, $\Delta x \rightarrow 0$, el equilibrio de momentos requiere

$$\curvearrowright + \Sigma M = 0; \qquad \Delta M = M \qquad (7.6)$$

Así, el *cambio en momento es positivo*, o el diagrama de momento "salta" *hacia arriba si* $\mathbf{M}_O$ *tiene el sentido de las manecillas de un reloj*. Así también, el salto ΔM es hacia abajo, cuando $\mathbf{M}_O$ tiene el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Los siguientes ejemplos ilustran aplicaciones de las ecuaciones precedentes para la construcción de los diagramas de fuerza cortante y de momento. Luego de estudiarlos, se recomienda resolver los ejemplos 7.7 y 7.8, usando este método.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.9

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga mostrada en la figura 7.16*a*.

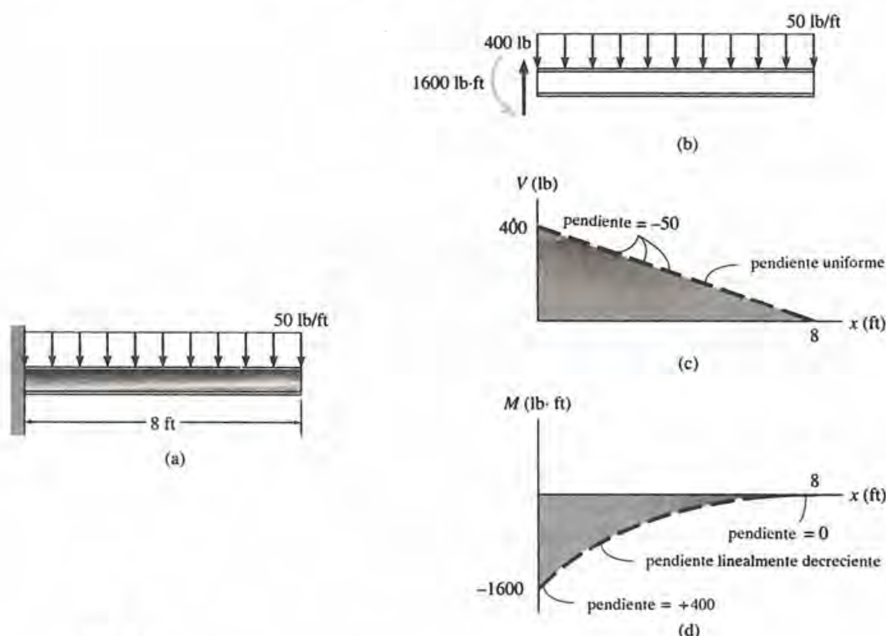


Fig. 7.16

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las reacciones en el apoyo fijo han sido calculadas y mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 7.16*b*.

Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante en los extremos se grafica primero, figura 7.16*c*. Por el convenio de signos, figura 7.11, $V = +400$ en $x = 0$ y $V = 0$ en $x = 8$. Puesto que $dV/dx = -w = -50$, se tiene una recta con pendiente *negativa* que conecta los puntos extremos.

Diagrama de momento. De nuestra convención de signos, figura 7.11, los momentos en los extremos de la viga, $M = -1600$ en $x = 0$ y $M = 0$ en $x = 8$, se marcan primeramente, figura 7.16*d*. Valores sucesivos de la fuerza cortante tomados del diagrama de fuerzas cortantes, figura 7.16*c*, indican que la pendiente $dM/dx = V$ del diagrama de momentos, figura 7.16*d*, siempre es positiva aunque *linealmente decreciente* de $dM/dx = 400$ en $x = 0$ a $dM/dx = 0$ en $x = 8$. Así, debido a la integración, w, valor constante, da lugar a V una recta inclinada (curva de primer grado) y M, una parábola (curva de segundo grado).

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.10

Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga mostrada en la figura 7.17*a*.

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las reacciones en el apoyo fijo han sido calculadas y mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 7.17*b*.

Diagrama de fuerza cortante. Usando el convenio de signos establecido, se marcan primero los valores de la fuerza cortante en los extremos de la viga, esto es, $x = 0$, $V = +1080$; $x = 20$, $V = +600$, figura 7.17*c*.

Ya que la carga uniformemente distribuida es hacia abajo y *constante*, la pendiente del diagrama de fuerzas cortantes es $dV/dx = -w = -40$ para $0 \leq x \leq 12$ como se indica.

La magnitud de la fuerza cortante en $x = 12$ es $V = +600$. Esto puede determinarse encontrando primeramente el área entre el diagrama de cargas entre $x = 0$ y $x = 12$. Lo anterior representa el cambio en fuerza cortante. Esto es, $\Delta V = -\int w(x)dx = -40(12) = -480$. Así $V|_{x=12} = V|_{x=0} + (-480) = 1080 - 480 = 600$. También, podemos obtener este valor usando el método de las secciones, figura 7.17*e*, donde para equilibrio $V = +600$.

Ya que la carga entre $12 < x \leq 20$ es $w = 0$, la pendiente $dV/dx = 0$ como se indica. Esto le da a la fuerza cortante el valor requerido de $V = +600$ en $x = 20$.

Diagrama de momentos. De nuevo, usando el convenio de signos establecido, figura 7.11, los momentos en los extremos de la viga se marcan primero; es decir, $x = 0$, $M = -15{,}880$; $x = 20$, $M = -1000$, figura 7.17*d*.

Cada valor de la fuerza cortante da el valor de la pendiente del diagrama de momento, ya que $dM/dx = V$. Como se indica, en $x = 0$, $dM/dx = +1080$; y en $x = 12$, $dM/dx = +600$. Para $0 < x < 12$, los valores específicos del diagrama de fuerza cortante son positivos, pero linealmente decrecientes. Por tanto, el diagrama de momento es parabólico con pendiente lineal decreciente y positiva.

La magnitud del momento en $x = 12$ ft es -5800. Esto puede encontrarse determinando primero el área trapezoidal bajo el diagrama de fuerza cortante que representa el cambio de momento, $\Delta M = \int V dx = 600(12) + \frac{1}{2}(1080 - 600)(12) = +10{,}080$. Así, $M|_{x=12} = M|_{x=0} + 10{,}080 = -15{,}880 + 10{,}080 = -5800$. El método "más básico" de las secciones también puede usarse, donde el equilibrio en $x = 12$, requiere $M = -5800$, figura 7.17e.

El diagrama de momento tiene pendiente constante para $12 < x \leq 20$, ya que, a partir del diagrama de fuerza cortante, $dM/dx = V = +600$. Esto trae el valor $M = -1000$ en $x = 20$, como debe ser.

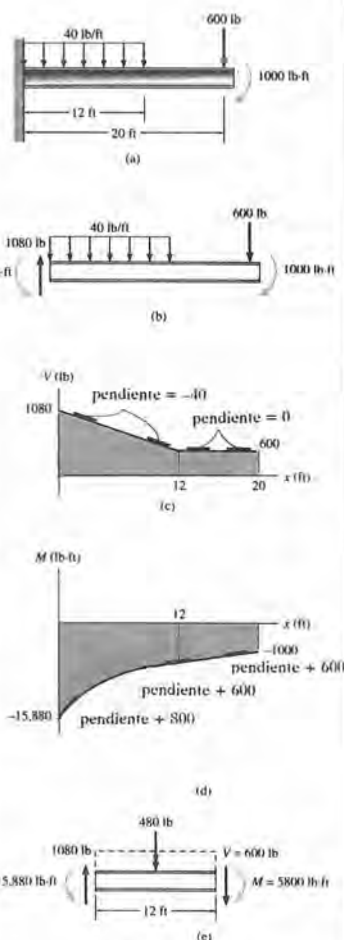
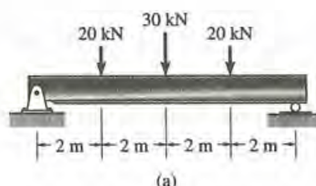


Fig. 7.17

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.11

Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga en la figura 7.18*a*.



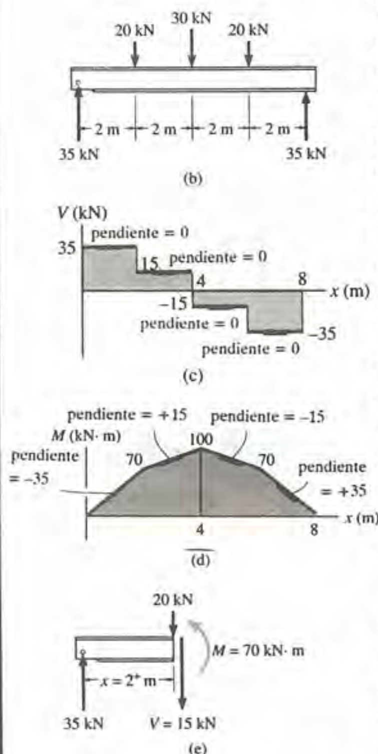


Fig. 7.18

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las reacciones en los apoyos pueden verse en el diagrama del cuerpo libre de la figura 7.18*b*.

Diagrama de fuerza cortante. Los puntos extremos $x = 0$, $V = +35$ y $x = 8$, $V = -35$ se marcan, primero, como en la figura 7.18*c*. Ya que no existe carga distribuida en la viga, la pendiente del diagrama de fuerza cortante a todo lo largo de la viga es cero ; es decir, $dV/dx = -w = 0$. Sin embargo hay una discontinuidad o salto del diagrama de fuerza cortante, en cada fuerza concentrada. De la ecuación 7.5, $\Delta V = -F$, el cambio en fuerza cortante es negativo cuando la fuerza actúa hacia abajo, y positivo, cuando actúa hacia arriba. Dicho de otra forma, el "salto" sigue a la fuerza, es decir, que una fuerza hacia abajo provoca un salto hacia abajo, y viceversa. Así, la fuerza de 20 kN en $x = 2$ m, cambia la fuerza cortante de 35 kN a 15 kN; la fuerza de 30 kN en $x = 4$ m cambia la fuerza cortante de 15 kN a –15 kN, etcétera. También se pueden obtener valores numéricos para la fuerza cortante en un punto especificado en la viga, usando el método de las secciones, como, por ejemplo, $x = 2^+$ m, $V = 15$ kN en la figura 7.18*e*.

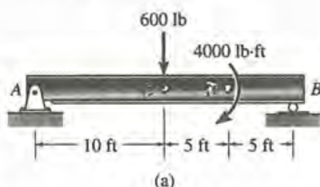
Diagrama de momento. Se marcan en la gráfica los puntos $x = 0$, $M = 0$ y $x = 8$, $M = 0$, para empezar, como se muestra en la figura 7.18*d*.

Ya que la fuerza cortante es constante en cada región de la viga, el diagrama de momento tiene una pendiente correspondiente constante positiva o negativa, como se indica en el diagrama. Los valores numéricos para el cambio en el momento en cualquier punto se pueden calcular a partir del *área* bajo el diagrama de fuerza cortante. Por ejemplo, en $x = 2$ m, $\Delta M = \int V\,dx = 35(2) = 70$. Así, $M|_{x=2} = M|_{x=0} + 70 = 0 + 70 = 70$. También, por el método de las secciones, podemos determinar el momento en un punto especificado, como por ejemplo, $x = 2^+$ m, $M = 70$ kN · m, figura 7.18*e*.

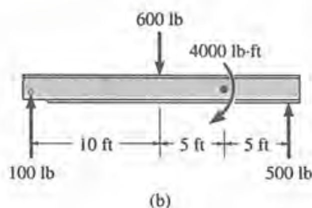
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.12

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento de flexión para la viga mostrada en la figura 7.19*a*.



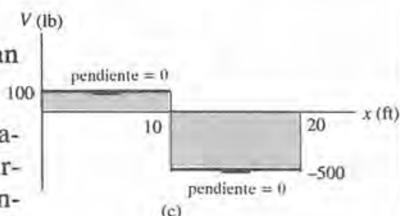
(a)



(b)

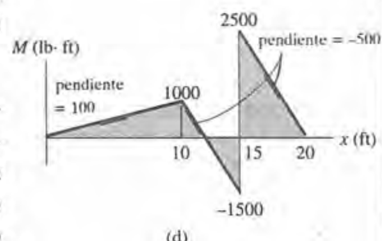
SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las reacciones se calculan e indican en el diagrama de cuerpo libre, figura 7.19*b*.



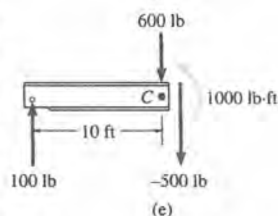
(c)

Diagrama de fuerza cortante. Como en el ejemplo 7.11, el diagrama de cuerpo libre puede ser construido "siguiendo la carga" en el diagrama de cuerpo libre. A este respecto, empezando en A, $V_A = +100$ lb. No hay carga que actúe entre *A* y *C*, de modo que la fuerza cortante permanece constante; es decir, $dV/dx = -w(x) = 0$. En el punto *C*, la fuerza de 600 lb actúa hacia abajo, de modo que la fuerza cortante salta 600 lb hacia abajo, de 100 lb a –500 lb. De nuevo, la fuerza cortante es constante (no hay carga) y termina en –500 lb, punto *B*. Nótese que en *D* no hay salto o discontinuidad de la fuerza cortante, el punto donde se aplica el momento de par de 4000 lb · ft, figura 7.19*a*. Esto es porque para el equilibrio, $\Delta V = 0$ en la figura 7.15*b*.

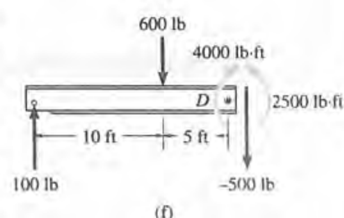


(d)

Diagrama de momentos. El momento en cada extremo de la viga es cero. Estos dos puntos se ponen primero en la gráfica, figura 7.19*d*. La pendiente del diagrama de momentos de *A* hasta *C* es constante, ya que $dM/dx = V = +100$. El valor del momento en *C* puede determinarse por el método de las secciones o calculando primero el área rectangular bajo el diagrama de fuerzas cortantes entre *A* y *C*. Esto da el cambio del momento $\Delta M_{AC} = (100 \text{ lb})(10 \text{ ft}) = 1000$ lb ft. Puesto que $M_A = 0$, se tiene $M_C = 0 + 1000 \text{ lb} \cdot \text{ft} = 1000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$. De *C* a *D*, la pendiente del diagrama de momentos es $dM/dx = V = -500$, figura 7.19*c*. El área bajo el diagrama de fuerzas cortantes entre los puntos *C* y *D* es $\Delta M_{CD} = M_D - M_C = (-500 \text{ lb})(5\text{ft}) = -2500 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, de manera que $M_D = 1000 - 2500 = -1500 \text{ lb} \cdot \text{ft}$. Un salto en el diagrama de momentos ocurre en el punto *D*, causado por el momento de par concentrado de 4000 lb · ft. De la ecuación 7.6, el salto es *positivo*, ya que el momento de par tiene el *sentido de las manecillas de un reloj*. Así, en $x = 15^+$ ft, el momento es $M_D = -1500 + 4000 = 2500$ lb · ft. Este valor puede también determinarse por el método de las secciones. Desde el punto *D*, la pendiente de $dM/dx = -500$ se mantiene hasta que el diagrama termina en cero en *B*, figura 7.19*d*.



(e)



(f)

Fig. 7.19

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

7.53. Trace los diagramas de fuerzas cortantes y momentos para la viga en el problema 7.34.

7.54. Trace los diagramas de fuerzas cortantes y momentos para la viga en el problema 7.37.

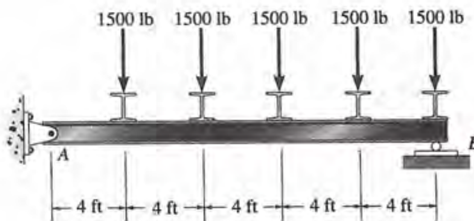
7.55. Trace los diagramas de fuerzas cortantes y momentos para la viga en el problema 7.38.

* **7.56.** Trace los diagramas de fuerzas cortantes y momentos para la viga en el problema 7.44.

7.57. Trace los diagramas de fuerzas cortantes y momentos para la viga en el problema 7.43.

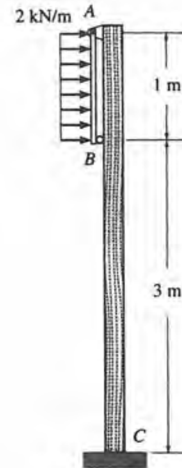
7.58. Trace los diagramas de fuerzas cortantes y momentos para la viga en el problema 7.45.

7.59. La trabe *AB* tiene un peso uniforme de 500 lb/ft y está sujeta a las fuerzas concentradas causadas por las vigas de piso. Trace los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos para la trabe.



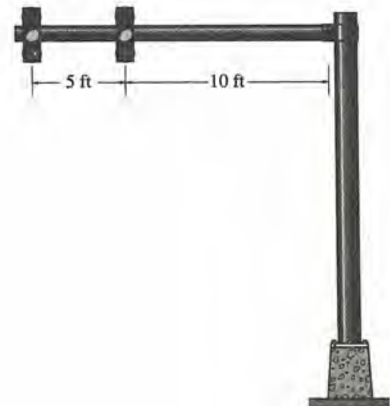
Prob. 7.59

* **7.60.** El miembro *ABC* soporta una señal de carretera que transmite una carga debida a la fuerza del viento de 2 kN/m a lo largo de la señal. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para el miembro. La señal está articulada al miembro en *A* y tiene un apoyo de rodillo en *B*.



Prob. 7.60

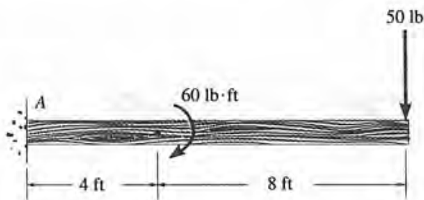
7.61. Cada uno de los semáforos tiene un peso de 20 lb, y el brazo de soporte un peso de 5 lb/ft. Trace el diagrama de fuerza cortante y el de momento del brazo de soporte.



Prob. 7.61

http://librosysolucionarios.net

7.62. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga voladiza.



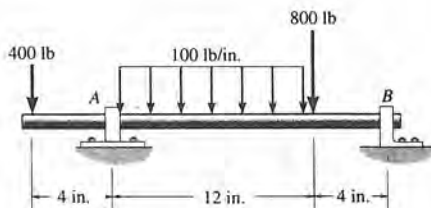
Prob. 7.62

7.63. Trace los diagramas de momento y de fuerza cortante para la viga. En *C* hay un pasador, y *A* es soporte fijo.



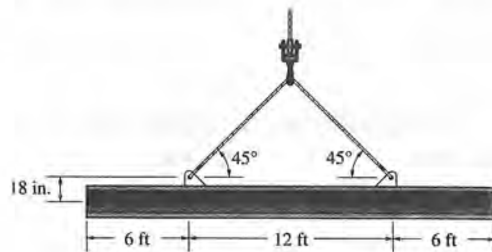
Prob. 7.63

***7.64.** Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la flecha. En *A* y *B* se encuentran chumaceras.



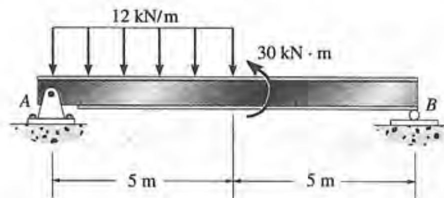
Prob. 7.64

7.65. La viga tiene un peso de 150 lb/ft. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



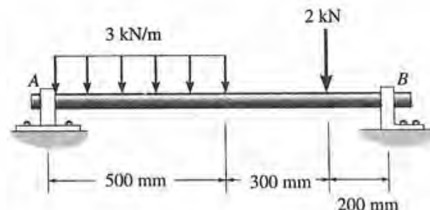
Prob. 7.65

7.66. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 7.66

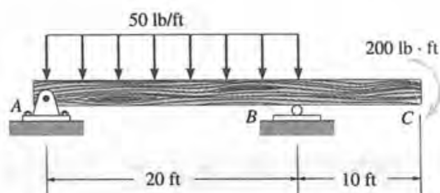
7.67. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la flecha. En *A* y *B* los apoyos son chumaceras.



Prob. 7.67

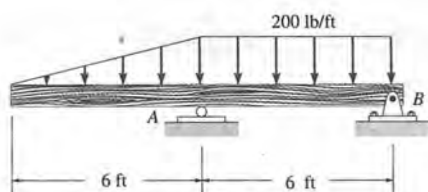
http://librosysolucionarios.net

* **7.68.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



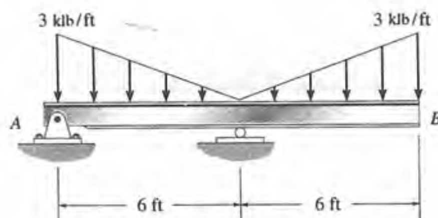
Prob. 7.68

7.69. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



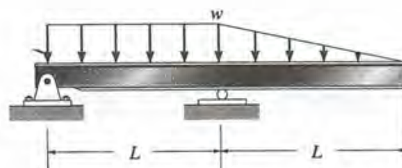
Prob. 7.69

7.70. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



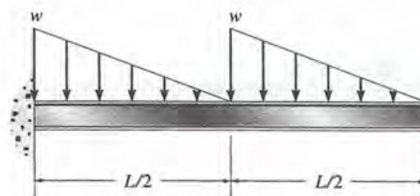
Prob. 7.70

7.71. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga, en términos de los parámetros mostrados.



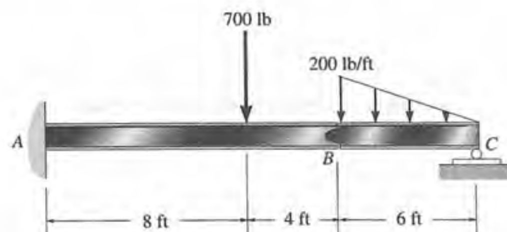
Prob. 7.71

* **7.72.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 7.72

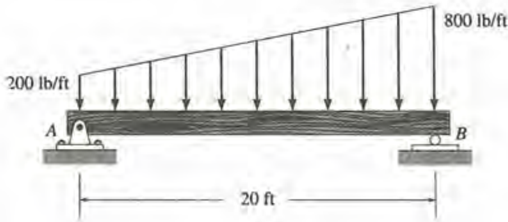
7.73. La viga consiste en dos segmentos articulados en B. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 7.73

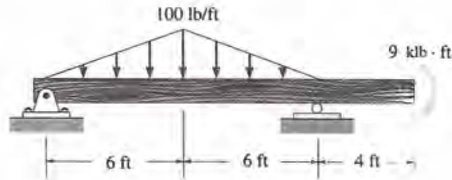
http://librosysolucionarios.net

7.74. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 7.74

7.75. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga.



Prob. 7.75

* 7.4 Cables

En la ingeniería de estructuras suelen usarse cables flexibles y cadenas como soportes y para transmitir cargas de un miembro a otro. Cuando se usan en puentes colgantes o como apoyo de poleas de troles, los cables son los elementos principales de soporte de cargas de la estructura. En el análisis de fuerzas de sistemas tales, el peso del cable en sí puede ser despreciado, pero cuando se usan cables como líneas de transmisión o como tensores para antenas de radio o grúas de retenidas, el peso del cable puede cobrar importancia y entonces debe incluirse en el análisis. Tres casos serán los considerados en el siguiente análisis: (1) cable sujeto a cargas concentradas; (2) cable sujeto a distribución de cargas; (3) cable sujeto a su propio peso. Independientemente de cuál de las condiciones de carga se presente, y suponiendo que las cargas son coplanares con el cable, las condiciones de equilibrio se formulan de una manera idéntica.

Al deducir las condiciones necesarias entre la fuerza en el cable y su pendiente, haremos la hipótesis de que el cable es *perfectamente flexible* e *inextensible*. Debido a su flexibilidad, el cable no ofrece resistencia a flexiones y, por tanto, la fuerza de tensión que actúan en el cable será siempre tangente al cable en todos los puntos del mismo. Por ser inextensible, el cable tiene longitud constante, antes y después de aplicar la carga. Consecuentemente, una vez aplicada la carga, la geometría del cable se mantiene fija, y el cable o uno de sus segmentos, puede considerarse como cuerpo rígido.

http://librosysolucionarios.net

Cable sujeto a cargas concentradas. Cuando un cable de peso despreciable sostiene numerosas cargas concentradas toma la forma de segmentos rectilíneos, cada uno de los cuales sometido a una fuerza de tensión constante. Considérese, por ejemplo, el cable mostrado en la figura 7.20, donde las distancias h, L_1, L_2 y L_3 y las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ son conocidas. Aquí el problema es determinar las *nueve incógnitas* que consisten en la tensión en cada uno de los *tres* segmentos, las *cuatro* componentes de la reacción en A y en B y los pandeos (o flechas) y_C y y_D en los dos puntos C y D. Para la solución, podemos escribir dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada uno de los puntos A, B, C y D. Esto da un total de *ocho ecuaciones.** Para completar la solución, será necesario saber algo de la geometría del cable con el fin de obtener la necesaria novena ecuación. Por ejemplo, si se especifica la *longitud* total L del cable, entonces, puede aplicarse el teorema de Pitágoras para relacionar cada una de las tres longitudes de segmentos, escritas en términos de h, y_C, y_D, L_1, L_2 y L_3, con la longitud total L. Por desgracia, no es fácil resolver un problema de este tipo manualmente. Otra posibilidad, sin embargo, es la de especificar uno de los pandeos, y_C o y_D, en vez de la longitud del cable. Haciéndolo así, las ecuaciones de equilibrio son suficientes para obtener las fuerzas desconocidas y el pandeo que resta. Una vez que se obtenga el pandeo, se tendrá la longitud del cable por trigonometría. El ejemplo que sigue ilustra un procedimiento para realizar el análisis del equilibrio en un problema de esta clase.

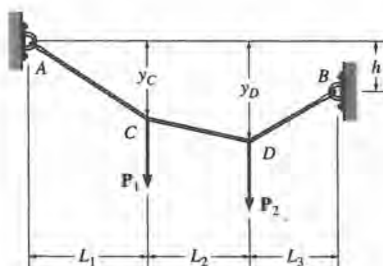


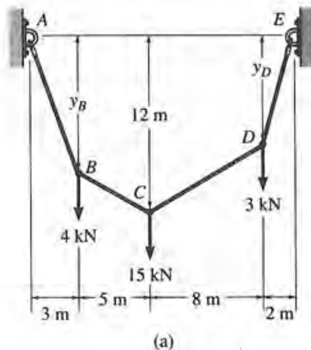
Fig. 7.20

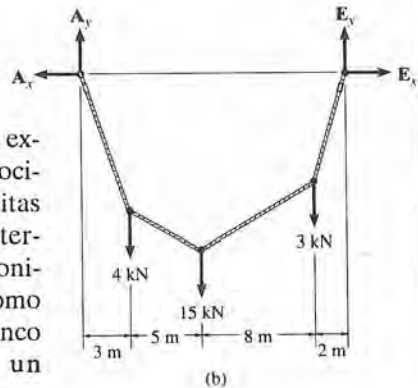
* Como se verá en el siguiente ejemplo, las ocho ecuaciones de equilibrio pueden también escribirse para la totalidad del cable o cualquiera de sus partes. Pero *no hay más que ocho* ecuaciones disponibles.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.13

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura 7.21*a*.

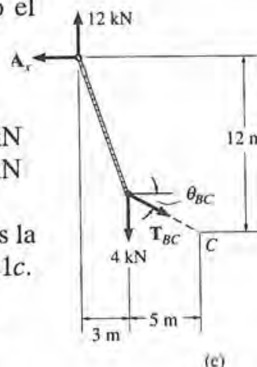




SOLUCIÓN

Por inspección, se verifica que hay cuatro reacciones externas (A_x, A_y, E_x, y E_y) y cuatro tensiones de cable desconocidas, una en cada segmento del cable. Estas ocho incógnitas junto con los dos pandeos desconocidos y_B y y_D pueden determinarse a partir de las diez ecuaciones de equilibrio disponibles. Un método consiste en aplicar estas ecuaciones como equilibrio de fuerzas ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$) a cada uno de los cinco puntos *A* hasta *E*. Aquí, sin embargo, haremos un planteamiento más directo.

Consideremos el diagrama de cuerpo libre para todo el cable, figura 7.21*b*. Así,



$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad -A_x + E_x = 0$$
$$\circlearrowleft + \Sigma M_E = 0; \quad -A_y(18) + 4(15) + 15(10) + 3(2) = 0 \qquad A_y = 12 \text{ kN}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 12 - 4 - 15 - 3 + E_y = 0 \qquad E_y = 10 \text{ kN}$$

Ya que el pandeo $y_C = 12$ m es conocido, consideremos la sección más a la izquierda, que corta al cable *BC*, figura 7.21*c*.

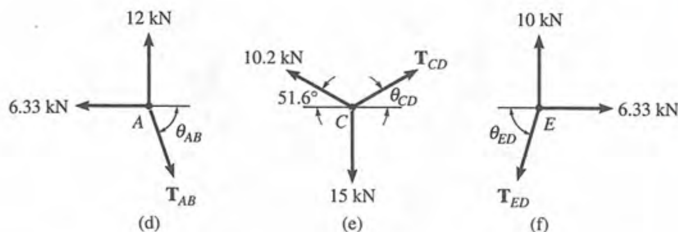
$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \quad A_x(12) - 12(8) + 4(5) = 0 \qquad A_x = E_x = 6.33 \text{ kN}$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad T_{BC} \cos \theta_{BC} - 6.33 = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 12 - 4 - T_{BC} \operatorname{sen} \theta_{BC} = 0$$

Así,

$$\theta_{BC} = 51.6°$$
$$T_{BC} = 10.2 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Fig. 7.21

http://librosysolucionarios.net



Procediendo ahora al análisis del equilibrio de los puntos A, C, y E sucesivamente, tenemos

Punto A (Fig. 7.21 *d*)

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;\qquad T_{AB}\cos\theta_{AB} - 6.33 = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\qquad -T_{AB}\,\text{sen}\,\theta_{AB} + 12 = 0$

$$\theta_{AB} = 62.2°$$

$$T_{AB} = 13.6 \text{ kN}$$ ***Resp.***

Punto C (Fig. 7.21*e*)

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;\qquad T_{CD}\cos\theta_{CD} - 10.2\cos 51.6° = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\qquad T_{CD}\,\text{sen}\,\theta_{CD} + 10.2\,\text{sen}\,51.6° - 15 = 0$

$$\theta_{CD} = 47.9°$$

$$T_{CD} = 9.44 \text{ kN}$$ ***Resp.***

Punto E (Fig. 7.21*f*)

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;\qquad 6.33 - T_{ED}\cos\theta_{ED} = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\qquad 10 - T_{ED}\,\text{sen}\,\theta_{ED} = 0$

$$\theta_{ED} = 57.7°$$

$$T_{ED} = 11.8 \text{ kN}$$ ***Resp.***

Comparativamente, la tensión máxima del cable se da en el segmento AB, ya que este segmento tiene la pendiente máxima (θ) y se requiere que para todo segmento de la izquierda, la componente horizontal $T\cos\theta = A_x$ (constante). También, ya que los ángulos de pendiente que los segmentos del cable hacen con la horizontal han sido determinados, es posible determinar los pandeos y_B y y_D, figura 7.21*a*, mediante métodos trigonométricos.

http://librosysolucionarios.net

Cable sometido a carga distribuida. Consideremos el cable sin peso mostrado en la figura 7.22*a* que está sometido a una función de carga $w = w(x)$ *medida en la dirección x*. El diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento del cable de longitud Δs puede verse en la figura 7.22*b*. Ya que la fuerza de tensión en el cable cambia continuamente en dirección y en magnitud a lo largo del cable, se denota este cambio en el diagrama de cuerpo libre por ΔT. La carga distribuida se representa mediante su fuerza resultante, $w(x)(\Delta x)$, que actúa a una distancia fraccional $k(\Delta x)$ desde el punto O, donde $0 < k < 1$. Aplicando las ecuaciones de equilibrio, se obtiene

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -T\cos\theta + (T + \Delta T)\cos(\theta \Delta\theta) = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -T\operatorname{sen}\theta - w(x)(\Delta x) + (T + \Delta T)\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) = 0$$
$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0; \qquad w(x)(\Delta x)k(\Delta x) - T\cos\theta\,\Delta y + T\operatorname{sen}\theta\,\Delta x = 0$$

Dividiendo cada una de estas ecuaciones por Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ y, por tanto, y $\Delta y \to 0$, $\Delta\theta \to 0$ y $\Delta T \to 0$, obtenemos

$$\frac{d(t\cos\theta)}{dx} = 0 \tag{7.7}$$

$$\frac{d(T\operatorname{sen}\theta)}{dx} - w(x) = 0 \tag{7.8}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \tag{7.9}$$

Integrando la ecuación 7.7, tenemos

$$T\cos\theta = \text{constante} = F_H \tag{7.10}$$

Aquí F_H representa la componente horizontal de la fuerza de tensión en cualquier punto a lo largo del cable.

Integrando la ecuación 7.8, se obtiene

$$T\operatorname{sen}\theta = \int w(x)\,dx \tag{7.11}$$

Dividiendo la ecuación 7.11 por la ecuación 7.10 se elimina T. Entonces, usando la ecuación 7.9, podemos obtener la pendiente

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H}\int w(x)\,dx$$

http://librosysolucionarios.net

Realizando una segunda integración, se tendrá

$$y = \frac{1}{F_H}\int\left(\int w(x)\,dx\right)dx \qquad (7.12)$$

Esta ecuación se usa para determinar la curva para el cable, $y = f(x)$. La componente horizontal de fuerza F_H y las dos constantes, digamos C_1 y C_2, que resultan de la integración, se determinan aplicando las condiciones de frontera para el cable.

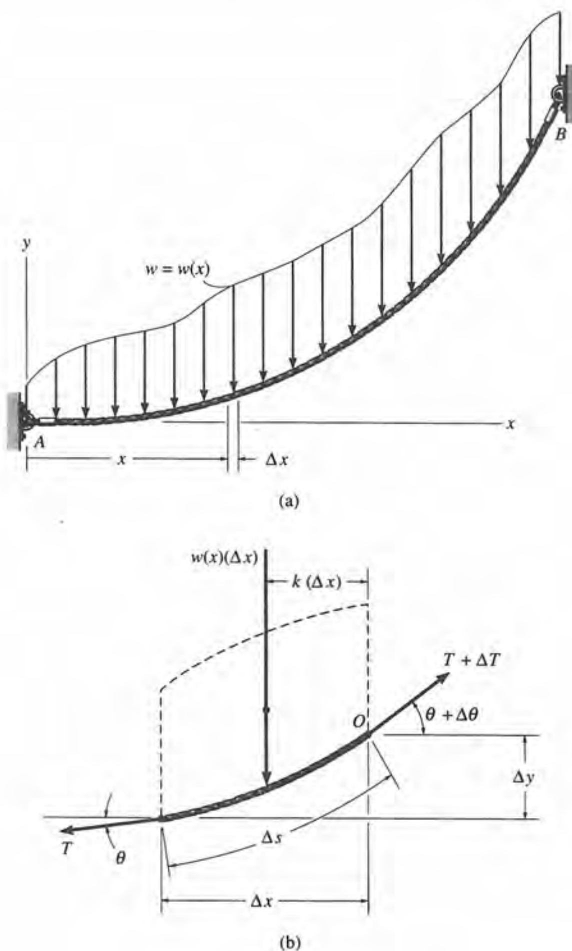
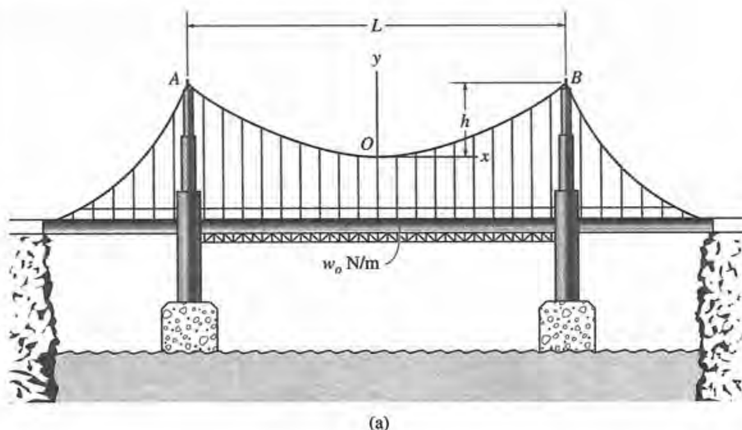


Fig. 7.22

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.14

El cable de un puente colgante soporta la mitad de la carretera uniforme entre las dos columnas A y B, como se muestra en la figura 7.23a. Si esta carga es w_o N/m, determine la fuerza máxima desarrollada en el cable y la longitud requerida del cable. Se conocen el claro L y el pandeo h.



(a)

Fig. 7.23

SOLUCIÓN

Podemos determinar las incógnitas en el problema, encontrando primero la curva que define la forma del cable, usando la ecuación 7.12. Por razones de simetría, el origen de coordenadas ha sido situado en el centro del cable. Notando si tomamos nota de que $w(x) = w_o$, tenemos

$$y = \frac{1}{F_H}\int\left(\int w_o\,dx\right)dx$$

Integrando esta ecuacion dos veces, se tiene

$$y = \frac{1}{F_H}\left(\frac{w_o x^2}{2} + C_1 x + C_2\right) \tag{1}$$

Las constantes de integración pueden determinarse usando las condiciones de frontera $y = 0$ en $x = 0$ y $dy/dx = 0$ en $x = 0$. Sustituyendo en la ecuación 1 se tiene $C_1 = C_2 = 0$. La curva, entonces, viene a ser

$$y = \frac{w_o}{2F_H}x^2 \tag{2}$$

Ésta es la ecuación de una parábola. La constante F_H puede obtenerse usando la condición de frontera $y = h$ en $x = L/2$. Así,

$$F_H = \frac{w_o L^2}{8h} \tag{3}$$

http://librosysolucionarios.net

De modo que la ecuación 2 viene a ser

$$y = \frac{4h}{L^2}x^2 \tag{4}$$

Como se conoce F_H, la tensión en el cable puede ser determinada usando la ecuación 7.10, escrita $T = F_H/\cos\theta$. Para $0 \le \theta < \pi/2$, la tensión máxima tendrá lugar cuando θ sea máxima, es decir, en el punto B, figura 7.23*a*. De la ecuación 2, la pendiente en este punto es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L/2} = \tan\theta_{\text{máx}} = \left.\frac{w_o}{F_H}x\right|_{x=L/2}$$

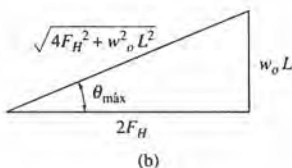
o

$$\theta_{\text{máx}} = \tan^{-1}\left(\frac{w_o L}{2F_H}\right) \tag{5}$$

Por lo tanto,

$$T_{\text{máx}} = \frac{F_H}{\cos(\theta_{\text{máx}})} \tag{6}$$

Si utilizamos la relación triangular mostrada en la figura 7.23*b*, que se basa en la ecuación 5, la ecuación 6 puede escribirse



(b)

$$T_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{4F_H^2 + w_o^2L^2}}{2}$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación anterior, dará

$$T_{\text{máx}} = \frac{w_oL}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{L}{4h}\right)^2} \qquad \textit{Resp.}$$

Para un segmento diferencial del cable de longitud ds, escribimos

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dx)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Luego, la longitud del cable, $\mathcal{L}$, se puede determinar por integración. Utilizamos la ecuación 4, y tenemos

$$\mathcal{L} = \int ds = 2\int_0^{L/2}\sqrt{1 + \left(\frac{8h}{L^2}x\right)^2}\,dx \tag{7}$$

Integrando y sustituyendo los límites de integración, se tendrá

$$\mathcal{L} = \frac{L}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{4h}{L}\right)^2} + \frac{L}{4h}\,\text{senh}^{-1}\left(\frac{4h}{L}\right)\right] \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Cable sometido a su propio peso. Cuando el peso del cable cobra importancia en el análisis de fuerzas, la función de carga a lo largo del cable será función de la longitud de arco, s, en vez de la longitud proyectada x. Una función de carga generalizada $w = w(s)$ que actúa a lo largo del cable se muestra en la figura 7,24*a*. La figura 7.24*b* muestra el diagrama de cuerpo libre para un segmento del cable. Aplicando las ecuaciones de equilibrio al sistema de fuerzas en este diagrama, se obtienen relaciones idénticas a las que se dieron mediante las ecuaciones 7.7 a 7.9, pero reemplazando *ds* por *dx*. Por tanto, puede demostrarse que

$$T \cos \theta = F_H \tag{7.13}$$

$$T \operatorname{sen} \theta = \int w(s)\, ds$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(s)\, ds \tag{7.14}$$

Para realizar una integración directa de la ecuación 7.14, es necesario reemplazar *dy*/*dx* por *ds*/*dx*. Ya que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1}$$

por tanto,

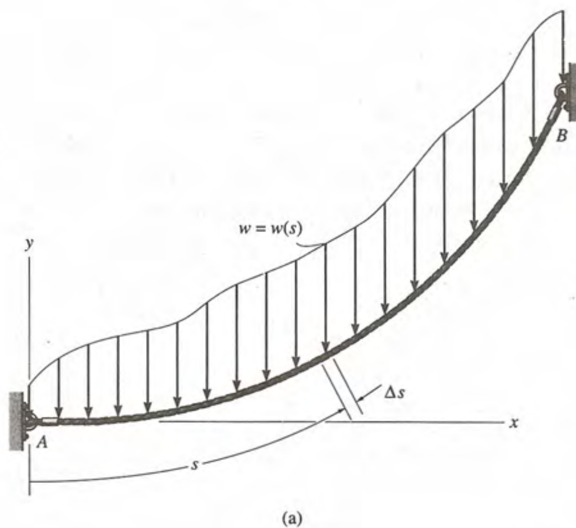
$$\frac{ds}{dx} = \left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s)\, ds \right)^2 \right\}^{1/2}$$

separando las variables e integrando, se tiene

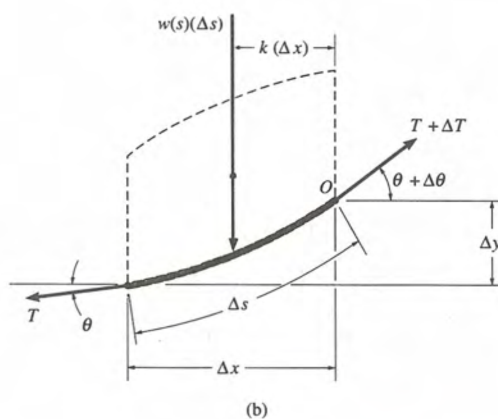
$$x = \int \frac{ds}{\left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s)\, ds \right)^2 \right\}^{1/2}} \tag{7.5}$$

Las dos constantes de integración, digamos C_1 y C_2 se encuentran usando las condiciones de frontera para el cable.

http://librosysolucionarios.net



(a)



(b)

Fig. 7.24

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 7.15

Determine la curva de deflexión, la longitud, y la tensión máxima en el cable uniforme mostrado en la figura 7.25. El cable pesa $w_o = 5$ N/m.

SOLUCIÓN

Por razones de simetría, se sitúa el origen de coordenadas en el centro del cable. La deflexión de la curva está expresada como $y = f(x)$. Podemos determinarla aplicando primero la ecuación 7.15, donde $w(s) = w_o$,

$$x = \int \frac{ds}{[1 + (1/F_H^2)(\int w_o\, ds)^2]^{1/2}}$$

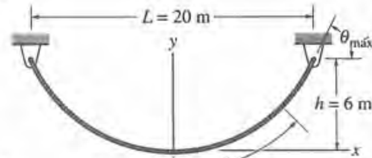


Fig. 7.25

Integrando el término bajo el signo de integral que aparece en el denomimador, tenemos

$$x = \int \frac{ds}{[1 + (1/F_H^2)(w_o s + C_1)^2]^{1/2}}$$

Sustituyendo $u = (1/F_H)(w_o\, s + C_1)$ de modo que $du = (w_o\, /F_H)\, ds$, una nueva integración dará

$$x = \frac{F_H}{w_o}(\text{senh}^{-1}\, u + C_2)$$

o

$$x = \frac{F_H}{w_o}\left\{ \text{senh}^{-1}\left[\frac{1}{F_H}(w_o s + C_1)\right] + C_2\right\} \qquad (1)$$

Para evaluar las constantes, nótese que de la ecuación 7.14,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H}\int w_o\, ds \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H}(w_o s + C_1)$$

Ya que $dy/dx = 0$ en $s = 0$, entonces $C_1 = 0$. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w_o s}{F_H} \qquad (2)$$

La constante C_2 puede evaluarse usando la condición $s = 0$ en $x = 0$ en la ecuación 1, en cuyo caso $C_2 = 0$. Para obtener la curva de deflexión, resuelva s en la ecuación 1, obteniendo

$$s = \frac{F_H}{w_o}\,\text{senh}\left(\frac{w_o}{F_H}x\right) \qquad (3)$$

Ahora sustitúyase en la ecuación 2, y obtendremos

$$\frac{dy}{dx} = \text{senh}\left(\frac{w_o}{F_H}x\right)$$

http://librosysolucionarios.net

De donde

$$y = \frac{F_H}{w_o}\cosh\left(\frac{w_o}{F_H}x\right) + C_3 \qquad (4)$$

Si se aplica la condición a la frontera $y = 0$ en $x = 0$, la constante $C_3 = -F_H/w_o$ y, por tanto, la curva de deflexión viene a ser

$$y = \frac{F_H}{w_o}\left[\cosh\left(\frac{w_o}{F_H}x\right) - 1\right]$$

Esta ecuación define la forma de una *curva catenaria.* La constante F_H se obtiene usando la condición de frontera $y = h$ en $x = L/2$, en cuyo caso

$$h = \frac{F_H}{w_o}\left[\cosh\left(\frac{w_o L}{2F_H}\right) - 1\right] \qquad (5)$$

Ya que $w_O = 5$ N/m, $h = 6$ m y $L = 20$ m, las ecuaciones 4 y 5 vienen a ser

$$y = \frac{F_H}{5\text{N/m}}\left[\cosh\left(\frac{5\text{ N/m}}{F_H}x\right) - 1\right] \qquad (6)$$

$$6\text{ m} = \frac{F_H}{5\text{N/m}}\left[\cosh\left(\frac{50\text{ N}}{F_H}\right) - 1\right] \qquad (7)$$

La ecuación 7 se puede resolver para F_H usando un proceso de prueba y error. El resultado es

$$F_H = 45.8\text{ N}$$

y, por tanto, la curva de deflexión, ecuación 6, viene a ser

$$y = 9.16[\cosh(0.109x) - 1]\text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Usando la ecuación 3, con $x = 10$, la mitad de la longitud del cable es

$$\frac{\mathcal{L}}{2} = \frac{45.8\text{ N}}{5\text{ N/m}}\,\text{senh}\left[\frac{5\text{ N/m}}{45.8\text{ N}}(10\text{ m})\right] = 12.1\text{ m}$$

Luego

$$\mathcal{L} = 24.2\text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Ya que $T = F_H/\cos\theta$, ecuación 7.13, la tensión máxima ocurre cuando θ es máxima, es decir, en $s = \mathcal{L}/2 = 12.1$ m. Usando la ecuación, se tendrá

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{s=12.1\text{ m}} = \tan\theta_{\text{máx}} = \frac{5\text{ N/m}(12.1\text{ m})}{45.8\text{N}} = 1.32$$

$$\theta_{\text{máx}} = 52.9°$$

luego,

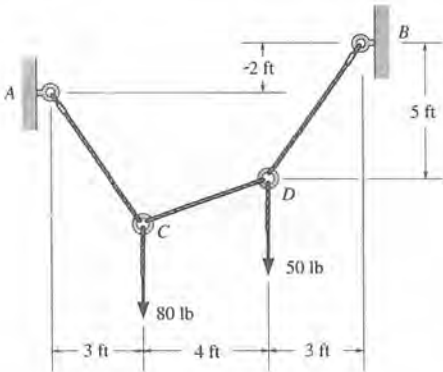
$$T_{\text{máx}} = \frac{F_H}{\cos\theta_{\text{máx}}} = \frac{45.8\text{ N}}{\cos 52.9°} = 75.9\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

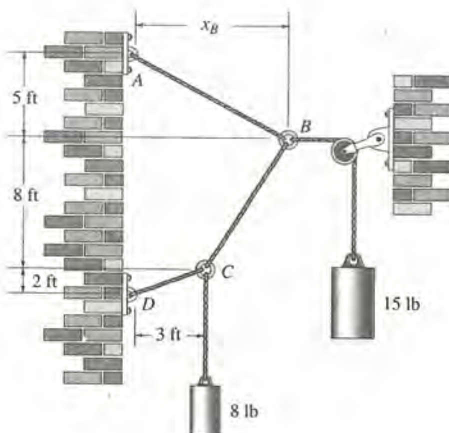
Se despreciará el peso del cable en los problemas siguientes, *salvo* que se especifique lo contrario.

* **7.76.** Determine la tensión en cada segmento del cable y la longitud total del cable.



Prob. 7.76

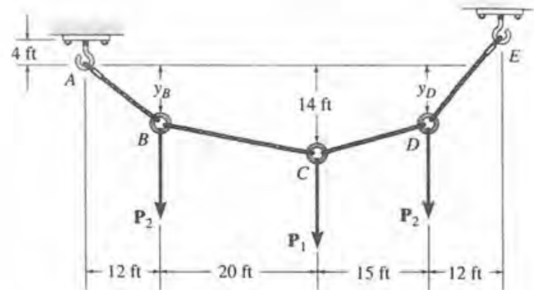
7.77. El cable soporta las cargas mostradas. Determine la distancia x_B de la pared al punto B.



Prob. 7.77

7.78. El cable soporta las tres cargas mostradas. Determine las flechas y_B y y_D de los puntos B y D. Considere que, tomar P_1 = 400 lb, P_2 = 250 lb.

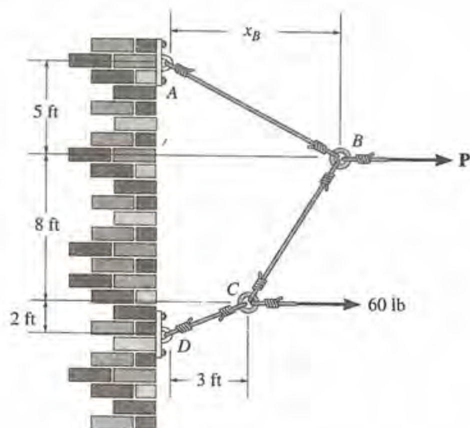
7.79. El cable soporta las tres cargas mostradas. Determine la magnitud de P_1 si P_2 = 300 lb y y_B = 8 ft., encuéntrese También la flecha y_D.



Probs. 7.78/7.79

* **7.80.** El cable soporta la carga mostrada. Determine la distancia x_B de la fuerza en B al punto A. Considere P = 40 lb.

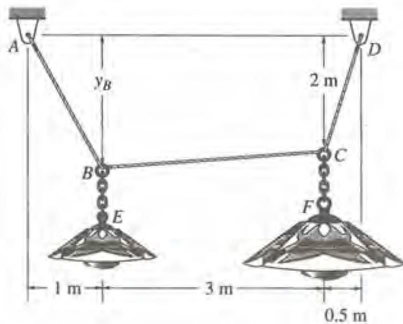
7.81. El cable soporta la carga mostrada. Determine la magnitud de la fuerza horizontal P de modo que x_B = 6 ft.



Probs. 7.80/7.81

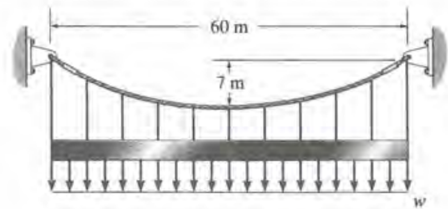
http://librosysolucionarios.net

7.82. El cable *ABCD* soporta la lámpara *E* de 10 kg y la lámpara *F* de 15 kg. Determine la tensión máxima en el cable y la flecha del punto *B*.



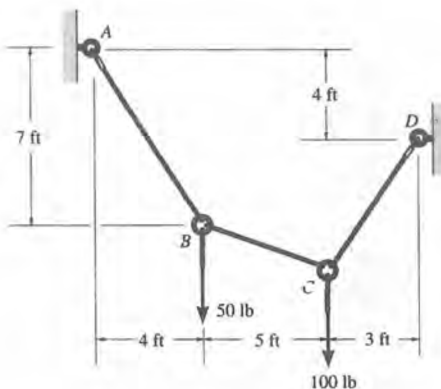
Prob. 7.82

*** 7.84.** Determine la carga uniforme máxima *w* N/m que soporta el cable si tiene capacidad para sostener una tensión máxima de 60 kN antes de la ruptura.



Prob. 7.84

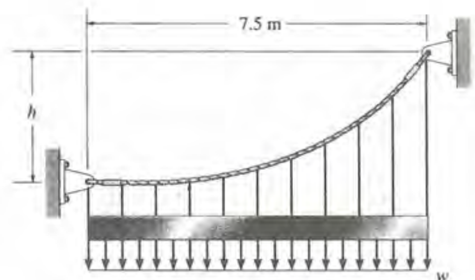
7.83. Determine la tensión en cada segmento del cable y la longitud total del cable.



Prob. 7.83

7.85. Si la carga lateral en el puente colgante en el ejemplo 7.14 es $w_o = 0.75$ kN/m y $L = 190$ m, $h = 20$ m, Determine la tensión máxima en el cable.

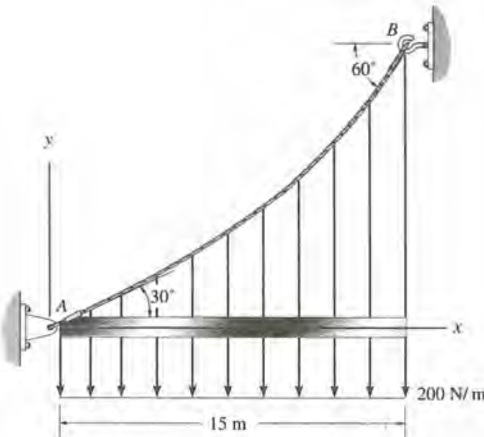
7.86. El cable se rompe cuando la tensión máxima alcanza $T_{\text{máx}} = 12$ kN. Determine la carga distribuida uniforme *w* que se requiere para desarrollar esta tensión máxima. Escríbase $h = 6$ m.



Prob. 7.86

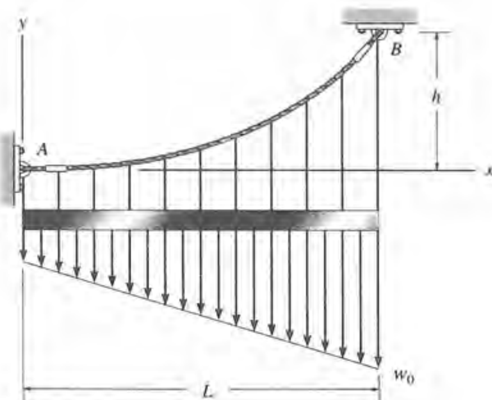
http://librosysolucionarios.net

7.87. El cable AB está sometido a una carga uniforme de 200 N/m. Si el peso del cable se desprecia y los ángulos de pendiente en los puntos A y B son 30° y 60°, respectivamente, Determine la curva de deflexión del cable y la tensión máxima desarrollada en el cable.



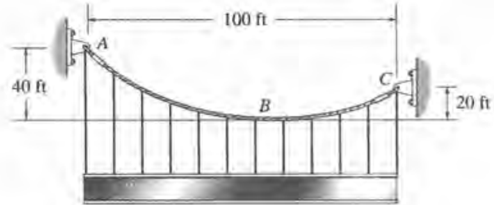
Prob. 7.87

*** 7.88.** El cable sin peso está sometido a la carga triangular. Si la pendiente del cable en el punto A es cero, Determine la curva de deflexión del cable y la tensión máxima desarrollada en el cable. L, h, y w_o son conocidos.



Prob. 7.88

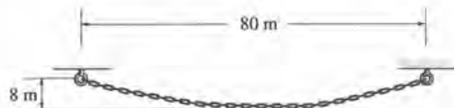
7.89. El cable soporta una trabe que pesa 850 lb/ft. Determine la tensión en el cable en los puntos A, B y C.



Prob. 7.89

7.90. Se suspende una cuerda uniforme entre dos puntos que tienen la misma elevación. Determine el cociente de la flecha entre el claro, de modo que la tensión máxima en la cuerda iguale el peso total de la misma.

7.91. Si la cadena tiene una masa de 3 kg/m, Determine la tensión máxima en el cable. ¿Cuál es la longitud del cable?



Prob. 7.91

*** 7.92.** Una cadena de 50 m de longitud tiene una masa de 100 kg y está suspendida entre dos puntos separados 10 m y situados a misma altura. Determine la tensión máxima y la flecha en la cadena.

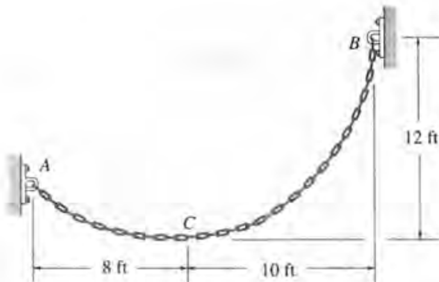
7.93. Un cable de 100 lb está sujeto por sus extremos a dos puntos separados una distancia de 50 ft y situados a la misma altura. Si la máxima tensión desarrollada en el cable es de 75 lb, Determine la longitud del cable y la flecha o flambeo.

7.94. Demuestre que la curva de deflexión del cable, discutida en el ejemplo 7.15, se reduce a la ecuación (4) en el ejemplo 7.14 cuando la función coseno hiperbólico se desarrolla en términos de una serie y sólo se retienen los dos primeros términos. (La respuesta indica que la catenaria puede ser sustituida por una parábola en el análisis de los problemas en los que la fecha sea pequeña. En este caso, el peso del cable se supone uniformemente distribuido por la horizontal).

http://librosysolucionarios.net

7.95. Una cadena de 100 ft tiene un peso de 150 lb y se suspende entre dos puntos separados 25 ft, y a la misma altura. Determine la tensión máxima y la fecha en la cadena.

***7.96.** La cadena tiene un peso de 3 lb/ft. Determine la tensión en los puntos A, B y C que es necesaria para el equilibrio.

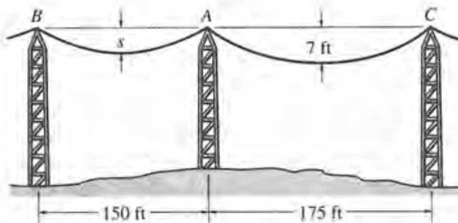


Prob. 7.96

7.97. La línea de transmisión está sostenida en A por la torre. Si el cable pesa 0.75 lb/ft, y la flecha $s = 3$ ft, determine la fuerza resultante horizontal que el cable ejerce en A.

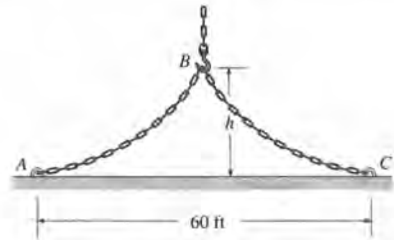
7.98. La línea de transmisión está sostenida en A por la torre. Si el cable pesa 0.75 lb/ft, Determine la longitud total del cable, BAC. Escriba $s = 3$ ft.

7.99. La línea de transmisión está sostenida en A por la torre. Si el cable tiene un peso de 0.75 lb/ft, Determine la flecha, s, requerida, de manera que la fuerza resultante horizontal que el cable ejerce en A sea cero.



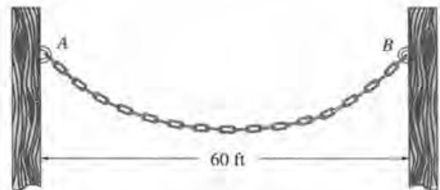
Probs. 7.97/7.98/7.99

***7.100.** La cadena de 80 ft está fija en sus extremos y alzada en su punto medio B, por una grúa. Si la cadena tiene peso 0.5 lb/ft, Determine la altura mínima h del gancho para que se levante la cadena *por completo* por arriba del suelo. ¿Cuál es la fuerza horizontal en la articulación A o C cuando la cadena está en esta posición? *Sugerencia:* Cuando h es un mínimo, la pendiente en A y en C es cero.



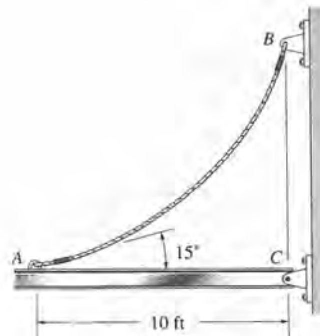
Prob. 7.100

7.101. La cadena está suspendida entre los puntos A y B. Si tiene un peso de 0.5 lb/ft y la flecha tiene 3 ft, Determine la tensión máxima en la cadena.



Prob. 7.101

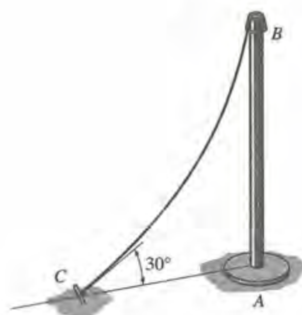
7.102. La viga uniforme pesa 80 lb/ft y se mantiene horizontal por medio del cable AB, que tiene un peso de 10 lb/ft. Si la pendiente del cable en A es 15°, Determine la longitud del cable.



Prob. 7.102

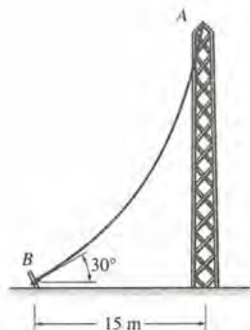
http://librosysolucionarios.net

7.103. El cable tiene un peso de 8 N/m y una longitud de 10 m. Si la tensión en el cable en *C* es 300 N, Determine la distancia que hay de *A* a *C*.



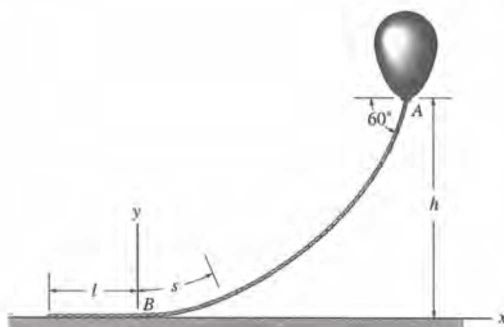
Prob. 7.103

*** 7.104.** El cable tiene masa de 0.5 kg/m y 25 m de longitud. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce en el punto más alto de la torre.



Prob. 7.104

7.105. Para sujetar el globo se usa una cuerda de 400 ft que tiene un peso de 0.8 lb/ft y hace un ángulo de 60° con la horizontal. Si la tensión en la cuerda en el punto *A* es de 150 lb, determine la longitud de la cuerda, *l*, que reposa en el suelo, y la altura, *h*. *Sugerencia*: establezca el sistema de coordenadas en *B* como se muestra.

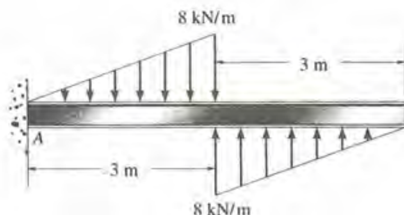


Prob. 7.105

http://librosysolucionarios.net

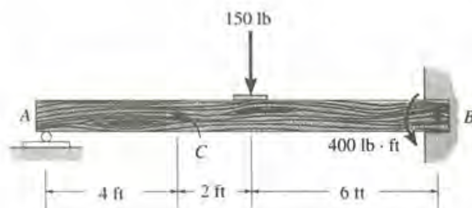
PROBLEMAS DE REPASO

7.106. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 7.106

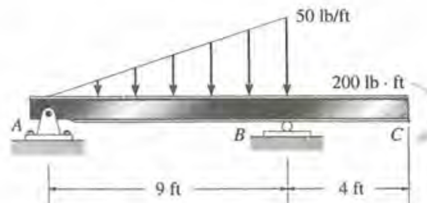
7.107. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en el punto C. Supónga que el apoyo en A es un rodillo, y en B, un pasador.



Prob. 7.107

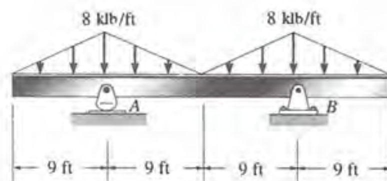
***7.108.** Un cable de 50 ft de longitud está suspendido entre dos puntos de la misma elevación y separados una distancia de 15 ft. Si la tensión mínima en el cable es de 200 lb, Determine el peso total del cable y la tensión máxima desarrollada en el cable.

7.109. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga.



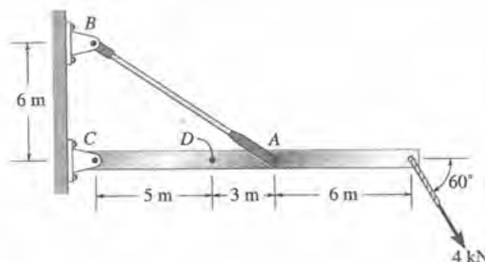
Prob. 7.109

7.110. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga.



Prob. 7.110

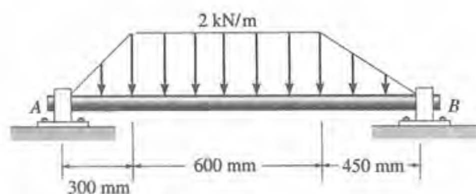
7.111. La viga está apoyada en C por un pasador y por la barra AB. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en el punto D.



Prob. 7.111

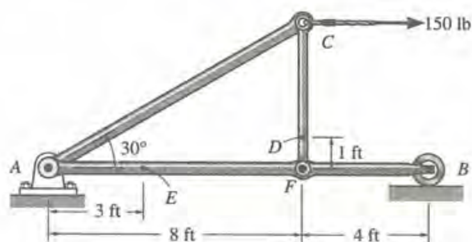
http://librosysolucionarios.net

***7.112.** Trace los diagramas de momento y de fuerza cortante para la flecha. Los apoyos son chumaceras en *A* y en *B*.



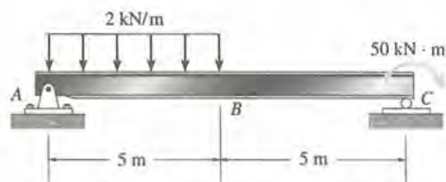
Prob. 7.112

7.113. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en los puntos *D* y *E* del bastidor.



Prob. 7.113

7.114. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 7.114

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

8 Fricción

En los capítulos anteriores las superficies de contacto entre dos cuerpos se consideraban perfectamente *lisas*. Debido a esto, la fuerza de interacción entre los cuerpos siempre actúa *perpendicularmente* a la superficie en los puntos de contacto. Sin embargo, en realidad todas las superficies son *rugosas* y, dependiendo de la naturaleza del problema, debe considerarse la capacidad de un cuerpo para soportar una fuerza *tangencial*, tanto como una fuerza *normal* en la superficie de contacto. La fuerza tangencial es producida por la fricción, y en este capítulo indicaremos cómo analizar problemas que involucren fuerzas de fricción. La aplicación específica incluirá fuerzas de fricción en tornillos, cojinetes, discos y bandas. El análisis de la resistencia al rodamiento se presenta en la última parte del capítulo.

8.1 Características de la fricción en seco.

La *fricción* puede definirse como una fuerza resistente que actúa sobre un cuerpo, que impide o retarda el deslizamiento del cuerpo respecto a otro cuerpo o superficie con que esté en contacto. Esta fuerza siempre actúa *tangencialmente* a la superficie en los puntos de contacto con otros cuerpos, y tiene un sentido tal que se opone al movimiento posible o existente del cuerpo respecto a estos puntos.

En general, pueden ocurrir dos tipos de fricción entre las superficies. La *fricción fluida* existe cuando las superficies en contacto estén separadas por una película de fluido (gas o líquido). La naturaleza de la fricción fluida se estudia en mecánica de flui-

http://librosysolucionarios.net

dos, ya que depende del conocimiento de la velocidad del fluido y de la habilidad del mismo para resistir fuerza cortante. En este libro sólo se presentarán los efectos de la *fricción en seco.* Este tipo de fricción se denomina a menudo *fricción de Coulomb,* ya que sus características fueron extensamente estudiadas por C. A. Coulomb, en 1781. Específicamente, la fricción en seco ocurre entre las superficies en contacto de cuerpos rígidos en ausencia de un líquido lubricante.

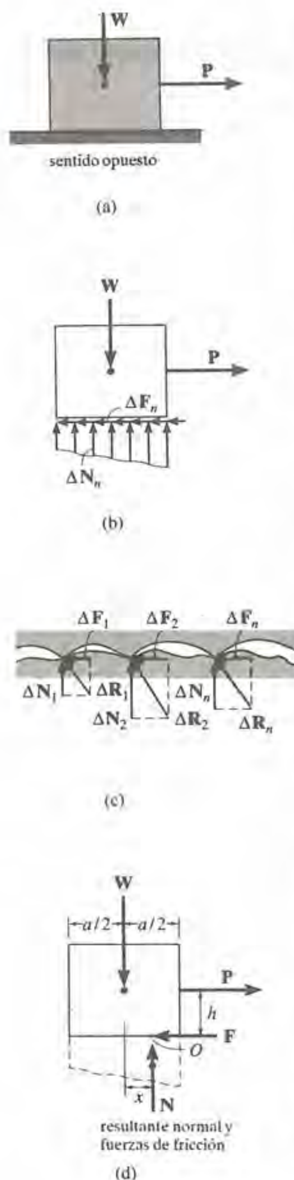


Fig. 8.1

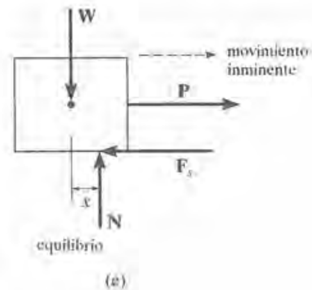
Teoría de la fricción en seco. La teoría de la fricción en seco puede explicarse mejor considerando qué efectos se producen tirando horizontalmente un bloque de peso uniforme **W** que descansa sobre una superficie horizontal rugosa, figura 8.1a. Para tener un entendimiento cabal de la naturaleza de la fricción, es necesario considerar a las superficies de contacto como *no rígidas o deformables.* Sin embargo, la otra porción del bloque deberá considerarse rígida. Como se indica en el diagrama de cuerpo libre del bloque, figura 8.1*b*, el piso ejerce una distribución, tanto de *fuerza normal* $\Delta \mathbf{N}_n$, como de *fuerza de fricción* $\Delta \mathbf{F}_n$ sobre de la superficie de contacto. En equilibrio, las fuerzas normales deben actuar *hacia arriba* para balancear el peso del bloque **W** y las fuerzas de fricción actúan hacia la izquierda, para impedir que la fuerza aplicada **P** mueva el bloque hacia la derecha. Un examen minucioso entre las superficies en contacto del piso y del bloque revela cómo se desarrollan estas fuerzas de fricción y normales, figura 8.1*c*. Puede verse que existen muchas irregularidades microscópicas entre las dos superficies y, como resultado de ello, se desarrollan fuerzas de reacción $\Delta \mathbf{R}_n$ en cada una de las protuberancias.* Estas fuerzas actúan en todos los puntos de contacto y, como se indica, cada fuerza de reacción contribuye tanto con una componente de fricción $\Delta \mathbf{F}_n$ como con una componente normal $\Delta \mathbf{N}_n$.

Equilibrio. Para simplificar el siguiente análisis, el efecto de las cargas distribuidas normales y de fricción se indicará mediante sus *resultantes* **N** y **F** que se representan en el diagrama de cuerpo libre del bloque, como se muestra en la figura 8.1*d*. Claramente, la distribución de $\Delta \mathbf{F}_n$ en la figura 8.1*b* indica que **F** siempre actúa *tangencialmente* a la superficie en *contacto, con sentido opuesto* al de **P**. La fuerza normal **N** está determinada por la distribución de $\Delta \mathbf{N}_n$ en la figura 8.1*b* y está dirigida hacia arriba para equilibrar el peso **W**. Observe que actúa a una distancia x a la derecha de la línea de acción **W**, figura 8.1*d*. Esta localización es necesaria para equilibrar el "efecto de volcamiento" producido

*Además de las interacciones mecánicas que se aplican aquí, un tratamiento detallado de la naturaleza de las fuerzas de fricción también debe incluir los efectos de temperatura, densidad, limpieza y atracción atómica o molecular entre las superficies de contacto. Véase D. Tabor, *Journal of Lubrication Technology,* 103, 169, 1981.

http://librosysolucionarios.net

por **P**. Por ejemplo, si **P** se aplica a una altura h de la superficie, figura 8.1*d*, el equilibrio de momentos con respecto al punto O se satisface, si $Wx = Ph$, o $x = Ph/W$. En particular, note que el bloque estará a punto de volcarse si $x = a/2$.



(e)

Movimiento inminente. En los casos en que h es pequeña o las superficies en contacto son "resbaladizas", la fuerza de fricción **F** puede *no* ser lo suficientemente grande para equilibrar la magnitud de **P** y, consecuentemente, el bloque tenderá a deslizar *antes* de que pueda volcarse. En otras palabras, conforme la magnitud de **P** se incrementa lentamente, la magnitud correspondiente de **F** se incrementa hasta que adquiere un cierto *valor máximo* F_s, llamado *fuerza de fricción estática límite*, figura 8.1*e*. Cuando se alcanza este valor, el bloque está en *equilibrio inestable*, ya que cualquier incremento adicional en P producirá deformaciones y fracturas en los puntos del contacto superficial y consecuentemente el bloque empezará a moverse. Experimentalmente se ha determinado que la magnitud de la fuerza de fricción estática límite $\mathbf{F}_s$ es *directamente proporcional* a la magnitud de la fuerza resultante normal **N**. Esto puede expresarse de un modo matemático como

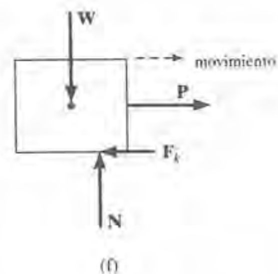
$$F_s = \mu_s N \tag{8.1}$$

donde la constante de proporcionalidad, μ_s, (mu "sub" s) recibe el nombre de *coeficiente de fricción estática*.

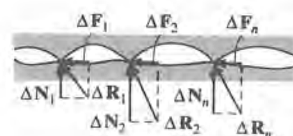
Tabla 8.1 Valores típicos para μ_s

Materiales en contacto	*Coeficiente de fricción estática* (μ_s)
Metal sobre hielo	0.03-0.05
Madera sobre madera	0.30-0.70
Cuero sobre madera	0.20-0.50
Cuero sobre metal	0.30-0.60
Aluminio sobre aluminio	1.10-1.70

En la Tabla 8.1 se presentan valores típicos de μ_s, que se encuentran en muchos de los manuales de ingeniería. Aunque este coeficiente es generalmente menor que 1, debe tenerse presente que en algunos casos, como el del aluminio sobre aluminio, μ_s puede ser mayor que 1. Físicamente, ello significa que en este caso la fuerza de fricción es mayor que la fuerza normal correspondiente. También habrá que notar que μ_s carece de dimensiones y depende solamente de las características de las dos superficies en contacto. Se da un amplio intervalo de valores por cada valor de μ_s, ya que las pruebas experimentales se hicieron bajo condiciones variables de rugosidad y limpieza de las superficies en contacto. Por consiguiente, para las aplicaciones es importante actuar con cautela y buen criterio al seleccionar un coeficiente de fricción para un conjunto dado de condiciones. Cuando se requiere un cálculo exacto de F_s, el coeficiente de fricción debería determinarse directamente mediante un experimento que involucre los dos materiales que se usarán.



(f)



(g)

Movimiento. Si la magnitud de **P**, que actúa sobre el bloque, se incrementa, de modo que llega a ser mayor que F_s, la fuerza de fricción en las superficies en contacto disminuye ligeramente hasta un valor más pequeño F_k, llamado *fuerza de fricción cinéti-*

http://librosysolucionarios.net

ca. El bloque *no* se mantendrá en equilibrio ($P > F_k$); en vez de ello, empieza a deslizar con velocidad creciente, figura 8.1*f*. La disminución producida en la magnitud de la fuerza de fricción, desde F_s (estática) hasta F_k (cinética), puede explicarse examinando otra vez las superficies en contacto, figura 8.1*g*. Aquí se ve que, si $P > F_s$, P puede seccionar los picos en las superficies de contacto y "levantar" un tanto el bloque de su posición de reposo haciéndolo "cabalgar" sobre las crestas de la superficie de contacto. Una vez que el bloque empieza a deslizar, las altas temperaturas en los puntos de contacto causan adhesión momentánea (soldadura) de estos puntos. El corte continuado de estas soldaduras es el mecanismo dominante de creación de la fricción. Dado que las fuerzas de contacto resultantes $\Delta\mathbf{R}_n$ se alinean un poco más en la dirección vertical que antes, figura 8.1*c*, por ello contribuyen componentes *más pequeñas* de fricción $\Delta\mathbf{F}_n$ que cuando las irregularidades se encuentran endentadas.

Los experimentos con bloques deslizantes indican que la magnitud de la fuerza de fricción resultante $\mathbf{F}_k$ es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza normal resultante $\mathbf{N}$. Esto puede expresarse matemáticamente como

$$F_k = \mu_k N \tag{8.2}$$

donde la constante de proporcionalidad, μ_k, se llama *coeficiente de fricción cinética*. Los valores típicos de μ_k son aproximadamente 25% más *pequeños* que los de la lista dada en la tabla 8.1 para μ_s.

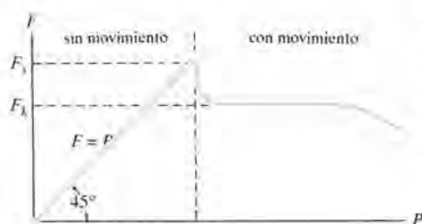


Fig. 8.2

Los efectos anteriores relativos a la fricción pueden resumirse mediante referencia a la gráfica de la figura 8.2, que muestra la variación de la fuerza de fricción **F** contra la carga aplicada **P**. Aquí, la fuerza de fricción se divide en tres categorías, a saber: **F** es una *fuerza de fricción estática* si se mantiene el equilibrio; **F** es una *fuerza límite de fricción estática* $\mathbf{F}_s$ cuando su magnitud alcanza un valor máximo requerido para mantener el equilibrio; y, por último, **F** se denomina *fuerza de fricción cinética*, $\mathbf{F}_k$, cuando hay deslizamiento en la superficie de contacto. También se observará en la gráfica que, para grandes valores de **P** o para altas velocidades, debido a los efectos aerodinámicos, $\mathbf{F}_k$ así como μ_k empiezan a decrecer.

Características de la fricción en seco. Como resultado de los *experimentos* relacionados con lo anteriormente expuesto, pueden establecerse las siguientes reglas para los cuerpos sujetos a fuerzas de fricción en seco.

1. La fuerza de fricción actúa *tangencialmente* a las superficies en contacto en un sentido *opuesto* al *movimiento relativo* o a

http://librosysolucionarios.net

la tendencia al movimiento de una superficie con respecto a la otra.

2. La magnitud de la fuerza de fricción estática máxima $\mathbf{F}_s$, que puede desarrollarse, es independiente del área de contacto, con tal que la presión normal no sea muy pequeña o bien tan grande como para deformar severamente o aplastar las superficies en contacto de los cuerpos.
3. La magnitud de la fuerza de fricción estática máxima $\mathbf{F}_s$ es, generalmente, mayor que la magnitud de la fuerza de fricción cinética $\mathbf{F}_k$ para dos superficies en contacto cualesquiera. Sin embargo, si uno de los cuerpos se está moviendo con una *velocidad muy pequeña* sobre la superficie del otro, $\mathbf{F}_k$ se vuelve aproximadamente igual a F_s, o sea $\mu_s \approx \mu_k$.
4. Cuando el *deslizamiento* en el punto de contacto está *próximo a ocurrir,* la magnitud de la fuerza de fricción estática límite $\mathbf{F}_s$ es proporcional a la magnitud de la fuerza normal, de tal modo que $F_s = \mu_s N$, ecuación 8.1.
5. Cuando el *deslizamiento* en el punto de contacto está *ocurriendo,* la magnitud de la fuerza de fricción cinética es proporcional a la magnitud de la fuerza normal N en el punto de contacto, de tal modo que $F_k = \mu_k N$ (ecuación 8.2).

Ángulo de fricción. Debe observarse que las ecuaciones 8.1 y 8.2 tienen un uso específico, aunque *limitado,* en la solución de problemas de fricción. En particular, la fuerza de fricción que actúa en una superficie de contacto se determina a partir de $F_k = \mu_k N$ *solamente* si existe *movimiento relativo* entre las dos superficies. Además, si dos cuerpos son *estacionarios*, la magnitud de la fuerza de fricción F *no* es *necesariamente* igual a $\mu_s N$; en vez de ello, F debe satisfacer la desigualdad $F \leq \mu_s N$. Sólo cuando se presenta *movimiento inminente* alcanza F su límite superior, $F = F_s = \mu_s N$. Esta situación puede comprenderse mejor considerando el bloque mostrado en la figura 8.3a, que está sujeto a la acción de una fuerza **P**. En este caso, considere $P = F_s$, de modo que el bloque está a *punto de deslizar.* Para el equilibrio, la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción $\mathbf{F}_s$, se combinan para producir una fuerza resultante $\mathbf{R}_s$. El ángulo Φ_s que forma $\mathbf{R}_s$ con **N** se llama *ángulo de fricción* estática. A partir de la figura,

$$\phi_s = \tan^{-1} \mu_s\left(\frac{F_s}{N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_s N}{N}\right) = \tan^{-1} \mu_s$$

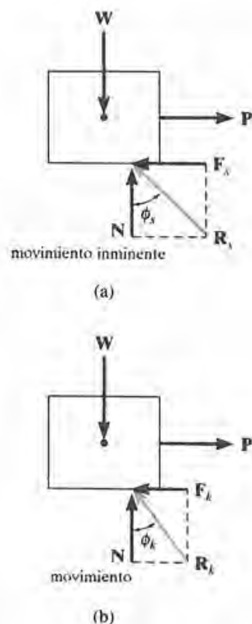


Fig. 8.3

Siempre que el bloque *no esté en movimiento,* cualquier fuerza horizontal $P < F_s$ produce una fuerza resultante **R**, que tiene una línea de acción dirigida según un ángulo con respecto a la vertical, tal que $\Phi \leq \Phi_s$. Si la fuerza aplicada **P** produce el *movimiento* uniforme del bloque, entonces $P = F_k$. En este caso, la resultante

http://librosysolucionarios.net

$\mathbf{R}_k$ tiene una línea de acción definida por Φ_k, figura 8.3*b*. Este ángulo se conoce como el *ángulo de fricción cinética*, donde

$$\Phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{F_k}{N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_k N}{N}\right) = \tan^{-1}\mu_k$$

Por comparación, $\Phi_s \geq \Phi_k$.

Ángulo de reposo. Un método experimental que puede usarse para medir el coeficiente de fricción entre dos superficies en contacto consiste en colocar un bloque de un material con peso W sobre un plano hecho de otro material, figura 8.4*a*. El plano tiene ángulo de inclinación θ_s, cuando el bloque está *a punto de deslizar* y, por tanto, $F_s = \mu_s N$. El diagrama de cuerpo libre del bloque en este instante se muestra en la figura 8.4*b*. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, la fuerza normal $N = W \cos\theta_s$, y la fuerza de fricción $F_s = W \operatorname{sen}\theta_s$. Ya que $F_s = \mu_s N$, entonces $W \operatorname{sen}\theta_s = \mu_s (W \cos\theta_s)$ o

$$\theta_s = \tan^{-1}\mu_s$$

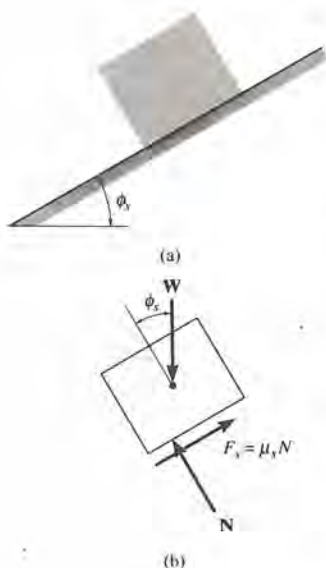


Fig. 8.4

El ángulo θ_s se denomina *ángulo de reposo* y, por comparación, es igual al ángulo de fricción estática Φ_s. Una vez que se mida, el coeficiente de fricción estática se obtiene de $\mu_s = \tan\theta_s$. Observe que este cálculo es independiente del peso del bloque, de manera que para el experimento, es innecesario el conocimiento de W.

8.2 Problemas de fricción en seco

Si un cuerpo rígido está en equilibrio cuando se le somete a un sistema de fuerzas que incluye el efecto de fricción, el sistema de fuerzas debe satisfacer no sólo las ecuaciones de equilibrio sino también las leyes que rigen a las fuerzas de fricción.

Tipos de problemas de fricción. En general, existen tres tipos de problemas en la mecánica que involucran fricción en seco. Se les puede clasificar fácilmente, una vez que se haya hecho el diagrama del cuerpo libre e identificado todas las incógnitas, y se haya comparado su número con el número de ecuaciones de equilibrio disponibles. Cada tipo de problema se explicará e ilustrará gráficamente con ejemplos a continuación. En todos estos casos se supondrán conocidas la geometría y las dimensiones en el problema.

http://librosysolucionarios.net

Equilibrio. Los de esta categoría son estrictamente problemas de equilibrio que requieren que el *número total de incógnitas sea igual al número de ecuaciones de equilibrio disponibles.* Una vez determinadas las fuerzas de fricción a partir de la solución, sin embargo, sus valores numéricos se verificarán para que satisfagan la desigualdad $F \leq \mu_s N$; de otro modo, habrá deslizamiento, y el cuerpo no permanecerá en equilibrio. En la figura 8.5*a* se muestra un problema de este tipo. Aquí debemos determinar las fuerzas de fricción en A y en C para verificar si se puede mantener la posición de equilibrio de las barras. Si las barras son uniformes con un peso de 100 N cada una, los diagramas de cuerpo libre son como se muestran en la figura 8.5*b*. Hay seis componentes de fuerza desconocidas que se pueden determinar estrictamente a partir de las seis ecuaciones de equilibrio (tres para cada miembro). Una vez que $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{F}_C$ y $\mathbf{N}_C$ se han determinado, las barras permanecerán en equilibrio, a condición de que $F_A \leq 0.3\,N_A$ y $F_C \leq 0.5 N_C$ se cumplan.

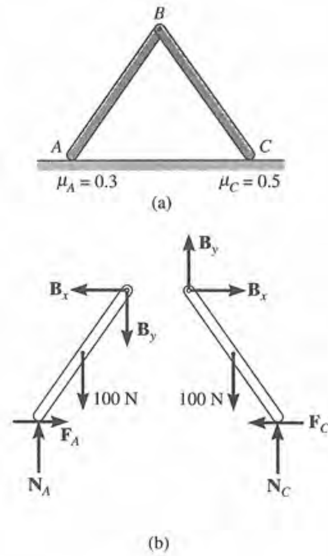
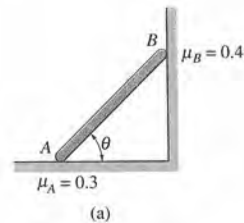


Fig. 8.5

Movimiento inminente en todos los puntos. En este caso *el número total de incógnitas será igual al número de ecuaciones de equilibrio disponibles más el número de ecuaciones de fricción disponibles,* $F = \mu N$. En particular, *si el movimiento es inminente* en los puntos de contacto, entonces $F_s = \mu_k N$; mientras que si el cuerpo está deslizándose, entonces $F_k = \mu_k N$. Por ejemplo, consideremos el problema de encontrar el mínimo ángulo θ en el que la barra de 100 N de la figura 8.6*a* puede apoyarse contra la pared sin resbalar. El diagrama del cuerpo libre se muestra en la figura 8.6*b*. Aquí hay *cinco* incógnitas: F_A, N_A, F_B, N_B, θ. Para la solución, hay *tres* ecuaciones de equilibrio y dos ecuaciones de fricción estática que se aplican en *ambos* puntos de contacto, de manera que $F_A = 0.3N_A$ y $F_B = 0.4N_B$. (Note también que la barra no se encontrará en estado de movimiento inminente salvo que resbale en A y B simultáneamente).



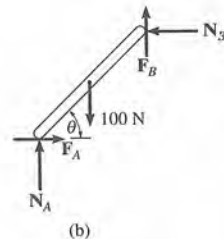


Fig. 8.6

Volcamiento o movimiento inminente en algunos puntos. Aquí *el número total de incógnitas será menor que el número de ecuaciones de equilibrio disponibles más el número total de ecuaciones de fricción o ecuaciones condicionales de volcamiento.* Consecuentemente, existirán varias posibilidades para movimiento o movimiento inminente y el problema incluirá una determinación de qué tipo de movimiento se presenta realmente. Por ejemplo, consideremos la estructura de dos miembros de la figura 8.7*a*. En este problema, deseamos determinar la fuerza horizontal **P** requerida que cause el movimiento. Si cada miembro tiene un peso de 100 N, los diagramas de cuerpo libre son como se muestra en la figura 8.7*b*. Hay *siete* incógnitas: N_A, F_A, N_C, F_C, B_x, B_y, P. Para tener solución única se deben satisfacer las *seis* ecuaciones de equilibrio (tres para cada miembro) y sólo *una* de dos posibles

http://librosysolucionarios.net

ecuaciones de fricción estática. Esto significa que al incrementarse la magnitud de **P** causará deslizamiento en A y no en C, de modo que $F_A = 0.3\,N_A$ y $F_C \leq 0.5N_C$; o se tendrá deslizamiento en C y no en A y, en este caso, $F_C = 0.5N_C$ y $F_A \leq 0.3N_A$. La situación puede determinarse calculando P para cada caso y eligiendo el caso para el que P es *mínima.* Si en los dos casos se obtiene por cálculo el *mismo valor* de P, cosa muy improbable en la práctica, entonces hay deslizamiento simultáneo en ambos puntos; esto es, las *siete incógnitas* satisfarán *ocho ecuaciones.* Como segundo ejemplo, consideremos un bloque de ancho b, altura h, y peso W que descansa en una superficie rugosa, figura 8.8*a*. Se determinará la fuerza **P** requerida para causar movimiento. La inspección del diagrama de cuerpo libre, figura 8.8*b*, indica que hay *cuatro incógnitas,* a saber, P, F, N y x. Para unicidad de la solución, sin embargo, debemos satisfacer las *tres* ecuaciones de equilibrio, además de *una* ecuación de fricción estática o bien una ecuación condicional que requiere que no haya volcamiento. Así pues, existen dos posibilidades de movimiento. O el bloque se *desliza*, figura 8.8*b*, en cuyo caso $F = \mu_s N$ y el valor obtenido para x debe satisfacer $0 \leq x \leq b/2$; o el bloque se vuelca, figura8.8*c*, caso en el que $x = b/2$ y la fuerza de fricción satisfará la desigualdad $F \leq \mu_s N$. La solución que da el valor más pequeño de P definirá el tipo de movimiento que experimentará el bloque. Si se calculara el mismo valor de P en ambos casos, aunque sea muy improbable, entonces habrá deslizamiento y volcamiento simultáneos; o sea que las *cuatro* incógnitas satisfacerán *cinco ecuaciones.*

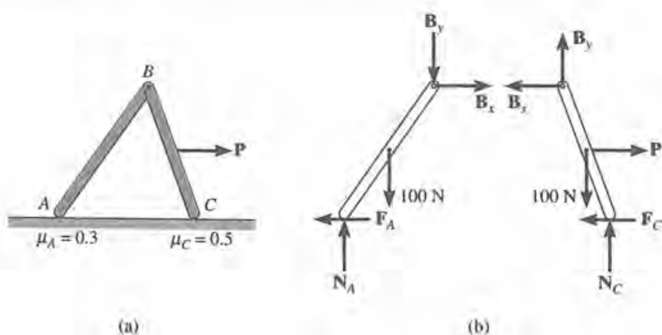


Fig. 8.7

Ecuaciones de equilibrio y ecuaciones de fricción. Como anteriormente se dijo, la fuerza de fricción *siempre* actúa para oponerse o bien para impedir el movimiento de un cuerpo sobre su superficie de contacto. Sin embargo, es importante observar que se puede *suponer* el sentido de la fuerza de fricción

http://librosysolucionarios.net

en problemas donde se requiere que F sea una "fuerza de equilibrio" y satisfaga la desigualdad $F < \mu_s N$. El sentido correcto se pone de manifiesto *después* de resolver las ecuaciones de equilibrio para F. Por ejemplo, si F es un escalar negativo, el sentido de **F** es contrario al supuesto. Esta conveniencia de *suponer* el sentido de **F** es posible porque las ecuaciones de equilibrio igualan a cero las *componentes de vectores* que actúan en la *misma dirección*. En los casos en que la ecuación de fricción $F = \mu N$ es utilizada en la solución de un problema, sin embargo, se *pierde* la conveniencia de *suponer* el sentido de **F**, ya que la ecuación de fricción tan sólo relaciona las *magnitudes* de dos vectores perpendiculares. Consecuentemente, *deberá* mostrarse, *siempre* que **F** actúa en su sentido correcto en el diagrama del cuerpo libre, si la ecuación de fricción se está usando en la solución del problema.

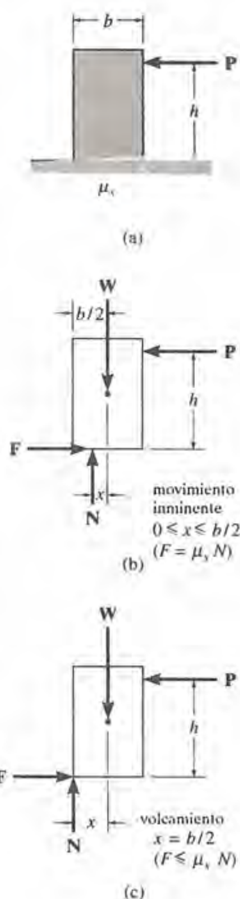


Fig. 8.8

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento es un método de solución de los problemas de equilibrio con fricción en seco.

Diagramas de cuerpo libre. Trace los diagramas de cuerpo libre que sean necesarios y determine el número de incógnitas o de ecuaciones requeridas para una solución completa. Salvo mención explícita de lo contrario, exhibira *siempre* las fuerzas de fricción como *incógnitas*; es decir, *no suponga que* $F = \mu N$. Recuerde que sólo pueden escribirse tres ecuaciones de equilibrio coplanar para cada cuerpo. Por consiguiente, si hay más incógnitas que ecuaciones de equilibrio, será necesaria la ecuación de fricción en algunos, si no en todos los puntos de contacto, para obtener las ecuaciones adicionales requeridas para una solución completa.

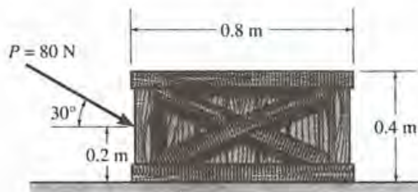
Ecuaciones de fricción y ecuaciones de equilibrio. Aplique las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de fricción necesarias (o ecuaciones condicionales, si se involucra volcamiento) y resuelva para encontrar las incógnitas. Si el problema involucra un sistema tridimensional de fuerzas, de manera que se dificulta obtener las componentes de fuerza o los necesarios brazos de momento, aplique las ecuaciones de equilibrio usando vectores cartesianos.

Los siguientes problemas de ejemplo ilustran este procedimiento numéricamente.

http://librosysolucionarios.net

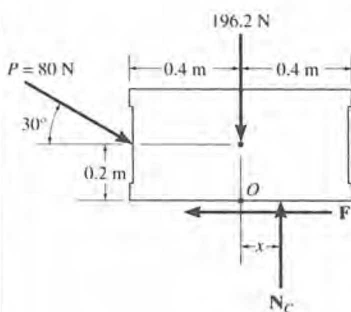
Ejemplo 8.1

El huacal uniforme mostrado en la figura 8.9*a* tiene una masa de 20 kg. Si se le aplica una fuerza de magnitud 80 N, determine si permanece en equilibrio. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$.



(a)

Fig. 8.9



(b)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 8.9b, la fuerza normal *resultante* $\mathbf{N}_C$ debe actuar a una distancia x de la línea central del huacal para contrarrestar el efecto de volcamiento causado por **P**. Hay *tres incógnitas*: F, N_C y x, que se pueden determinar estrictamente a partir de las *tres* ecuaciones de equilibrio.

Equaciones de equilibrio

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 80\cos 30° - F = 0$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad -80 \text{ sen } 30° + N_C - 196.2 = 0$$
$$\circlearrowleft +\Sigma M_o = 0; \quad 80 \text{ sen } 30°(0.4) - 80\cos 30°(0.2) + N_C(x) = 0$$

Resolviendo,

$$F = 69.3 \text{ N}$$
$$N_C = 326 \text{ N}$$
$$x = -0.00908 \text{ m} = -9.08 \text{ mm}$$

Ya que x es negativa, esto indica que la fuerza normal *resultante* actúa (ligeramente) a la *izquierda* de la línea central del huacal. No ocurre volcamiento, ya que $x \leq 0.4$ m. También, la fuerza de fricción *máxima* que se puede desarrollar en la superficie de contacto es $F_{máx} = \mu_s N_C = 0.3(236\text{N}) = 70.8$ N. Dado que $F = 69.3 \text{ N} < 70.8$ N, el huacal no *resbalará,* aunque esté muy cerca de hacerlo.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.2

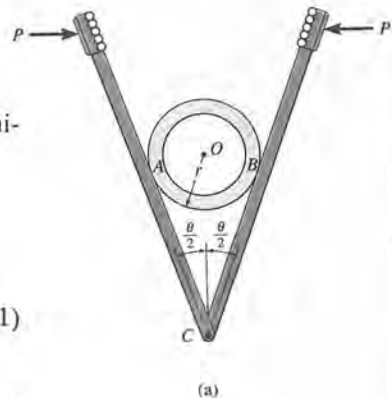
El tubo mostrado en la figura 8.10*a* está aprisionado entre dos palancas que están articuladas en *C*. Si el coeficiente de fricción entre las palancas y el tubo es $\mu = 0.3$, determine el máximo ángulo θ, de manera que el tubo quede aprisionado sin resbalar. Desprecie el peso del tubo.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 8.10*b*, hay cinco incógnitas: N_A, F_A, N_B, F_B y θ. Se aplican las *tres* ecuaciones de equilibrio y las *dos* ecuaciones de fricción en *A* y *B*. Las fuerzas de fricción actúan hacia *C* para impedir el movimiento del tubo hacia arriba.

Ecuaciones de fricción y de equilibrio. Las ecuaciones de fricción son

$$F_s = \mu_s N; \qquad F_A = \mu N_A$$
$$F_B = \mu N_B$$



(a)

Si usamos estos resultados y aplicamos las ecuaciones de equilibrio, obtenemos como resultado

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;$

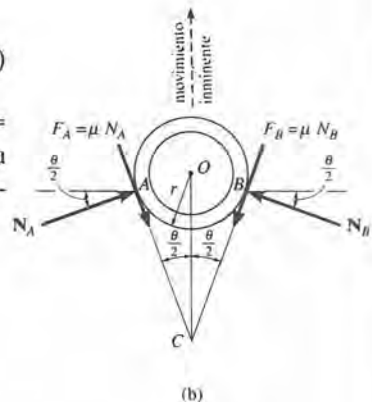
$$N_A \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mu N_A \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - N_B \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mu N_B \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0;$

$$-\mu N_B(r) + \mu N_A(r) = 0 \qquad (2)$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$

$$N_A \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mu N_A \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + N_B \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mu N_B \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \qquad (3)$$



(b)

Fig. 8.10

A partir de cualquiera de las ecuaciones 1 ó 2 se ve que $N_A = N_B$. Esto también podría haberse determinado a partir de la simetría *tanto* geométrica como de carga. Sustituyendo el resultado en la ecuación 3, obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

De manera que

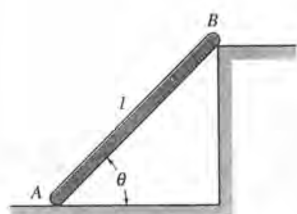
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \mu = 0.3$$

$$\theta = 2 \tan^{-1} 0.3 = 33.4° \qquad \textit{Resp.}$$

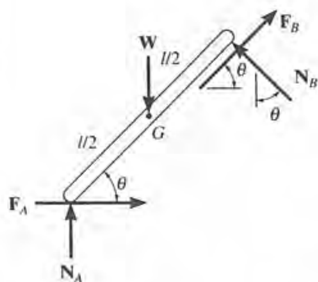
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.3

La barra uniforme que tiene peso W y longitud l está apoyada en sus extremos A y B, donde el coeficiente de fricción estática es μ, figura 8.11a. Determine el mayor ángulo θ de modo que no resbale la barra. Desprecie el espesor de la barra para el cálculo.



(a)



(b)

Fig. 8.11

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 8.11b, hay *cinco* incógnitas: F_A, N_A, F_B, N_B y θ. Éstas se pueden determinar a partir de las *tres* ecuaciones de equilibrio y las *dos* ecuaciones de fricción aplicadas en los puntos A y B. Las fuerzas de fricción deben trazarse con su sentido correcto de manera que se opongan a la tendencia al movimiento de la barra. ¿Por qué?

Ecuaciones de fricción y de equilibrio. Si escribimos las ecuaciones de fricción,

$$F = \mu_s N; \qquad F_A = \mu N_A$$
$$F_B = \mu N_B$$

Si usamos estos resultados y aplicamos las ecuaciones de equilibrio, obtendremos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad \mu N_A + \mu N_B \cos\theta - N_B \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (1)$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad N_A - W + N_B\cos\theta + \mu N_B \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (2)$$
$$\circlearrowleft +\Sigma M_G = 0; \qquad -N_A\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right) + \mu N_A\left(\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta\right) + N_B\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \qquad (3)$$

Los momentos se suman alrededor del centro de la barra, G, para eliminar $\mathbf{W}$. Podemos resolver las ecuaciones 1 y 3, que se reducen a

$$\mu N_A = N_B(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)$$
$$N_B = N_A(\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta)$$

Luego

$$\mu N_A = N_A(\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)$$
$$\mu = \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \mu\cos^2\theta - \mu\operatorname{sen}^2\theta + \mu^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\mu = (1+\mu^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \mu(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$$

Sabiendo que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, se tiene

$$2\mu = \left(\frac{1+\mu^2}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta$$

Resolviendo en θ, se obtiene

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{4\mu}{1+\mu^2}\right) \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.4

El bloque homogéneo de la figura 8.12*a* tiene un peso de 20 lb y se apoya sobre el plano inclinado, para el cual μ_s = 0.55. Determine el mayor ángulo de inclinación, θ, del plano antes de que el bloque se mueva.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 8.12*b*, la dimensión x se usa para localizar la posición de la fuerza normal resultante $\mathbf{N}_B$ debajo del bloque. Hay *cuatro* incógnitas, θ, N_B, F_B y x. Se dispone de *tres* ecuaciones de equilibrio. La *cuarta* ecuación se obtiene investigando las condiciones para volcamiento o deslizamiento del bloque.

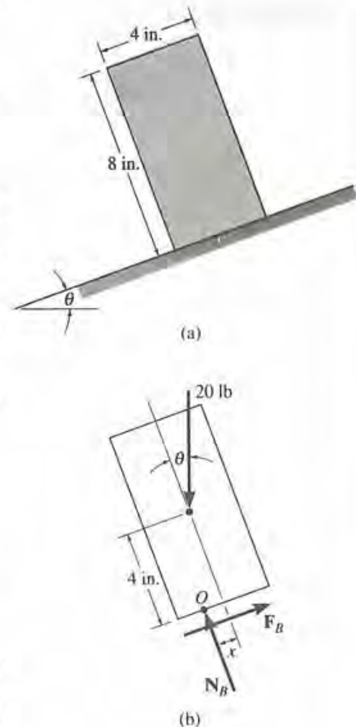


Fig. 8.12

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando las ecuaciones de equilibrio se llega a

$$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \qquad 20 \text{ sen } \theta - F_B = 0 \qquad (1)$$
$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_B - 20 \cos \theta = 0 \qquad (2)$$
$$\circlearrowright +\Sigma M_O = 0; \qquad 20 \text{ sen } \theta(4) - 20 \cos \theta(x) = 0 \qquad (3)$$

(***Deslizamiento inminente del bloque***). Esto requiere del uso de la ecuación de fricción.

$$F_s = \mu_s N; \qquad F_B = 0.55 N_B \qquad (4)$$

Resolviendo las ecuaciones 1 a 4 se obtiene

$$N_B = 17.5 \text{ lb} \quad F_B = 9.64 \text{ lb} \quad \theta = 28.8^\circ \quad x = 2.2 \text{ in.}$$

Como x = 2.2 in > 2 in, el bloque se volcará *antes* de deslizar.
(***Volcamiento del bloque***). Esto requiere que

$$x = 2 \text{ in.} \qquad (5)$$

Resolviendo las ecuaciones 1 a 3 y usando la ecuación 5, se obtiene

$$N_B = 17.9 \text{ lb} \qquad F_B = 8.94 \text{ lb}$$
$$\theta = 26.6^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

Nota: Si *primero* suponemos que el bloque se vuelca, entonces los resultados para F_B deben verificarse con la fuerza de fricción estática máxima posible, es decir,

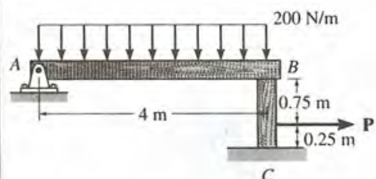
$$F_B = 8.94 \overset{?}{<} (0.55)(17.9 \text{ lb}) = 9.84 \text{ lb}$$

Puesto que la desigualdad es válida, el bloque, en efecto se vuelca antes de resbalar.

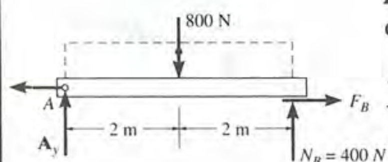
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.5

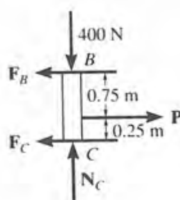
La viga AB está sujeta a una carga uniforme de 200N/m y está apoyada en B mediante la columna BC, figura 8.13*a*. Si los coeficientes de fricción estática en B y C son $\mu_B = 0.2$ y $\mu_C = 0.5$, determine la fuerza **P** necesaria para tirar la columna y sacarla fuera de la viga. Desprecie el peso de los miembros y el espesor de la columna.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8.13

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. En la figura 8.13*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga AB. Aplicando $\Sigma M_A = 0$, obtenemos $N_B = 400$ N. Este resultado se indica sobre el diagrama de cuerpo libre de la columna, figura 8.13*c*. En relación con este miembro, las *cuatro* incógnitas, F_B, P, F_C y N_C se determinan a partir de las *tres* ecuaciones de equilibrio y *una* ecuación de fricción aplicada, ya sea en B o en C.

Ecuaciones de equilibrio y de fricción. Aplicando las ecuaciones de equilibrio tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad P - F_B - F_C = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_C - 400 = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowright +\Sigma M_C = 0; \qquad -P(0.25) + F_B(1) = 0 \qquad (3)$$

(***La columna se desliza sólo en B***). Esto requiere que $F_C \leq \mu N_C$ y

$$F_B = \mu_B N_B; \qquad F_B = 0.2(400) = 80 \text{ N}$$

Si usamos este resultado y resolvemos las ecuaciones 1 a 3, obtenemos

$$P = 320 \text{ N}$$
$$F_C = 240 \text{ N}$$
$$N_C = 400 \text{ N}$$

Como $F_C = 240 \text{ N} > \mu_C N_C = 0.5(400 \text{ N}) = 200$ N, debe investigarse el otro caso de movimiento.

(***La columna se desliza sólo en C***). Aquí $F_B \leq \mu_B N_B$ y

$$F_C = \mu_C N_C; \qquad F_C = 0.5 N_C \qquad (4)$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 4, se obtiene por resultado

$$P = 267 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$N_C = 400 \text{ N}$$
$$F_C = 200 \text{ N}$$
$$F_B = 66.7 \text{ N}$$

Obviamente, este caso de movimiento ocurre primero ya que requiere un *menor* valor para P.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.6

Determine la fuerza normal que se debe ejercer sobre el carrete de 100 kg mostrado en la figura 8.14*a* para empujarlo hacia arriba del plano inclinado 20°, con velocidad constante. Los coeficientes de fricción estática y cinética en los puntos de contacto son $(\mu_s)_A = 0.18$, $(\mu_k)_A = 0.15$ y $(\mu_s)_B = 0.45$ $(\mu_k)_B = 0.4$

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 8.14*b*, hay cuatro incógnitas, N_A, F_A, N_B y F_B que actúan sobre el carrete, las cuales pueden determinarse aplicando *tres* ecuaciones de equilibrio y *una* ecuación de fricción, que sirve ya sea en A, o en B. Si el deslizamiento sólo ocurre en B, el carrete *rodará* hacia arriba del plano; mientras que si el deslizamiento sólo ocurre en A, el carrete se deslizará hacia arriba del plano inclinado. El problema requiere la determinación de N_B.

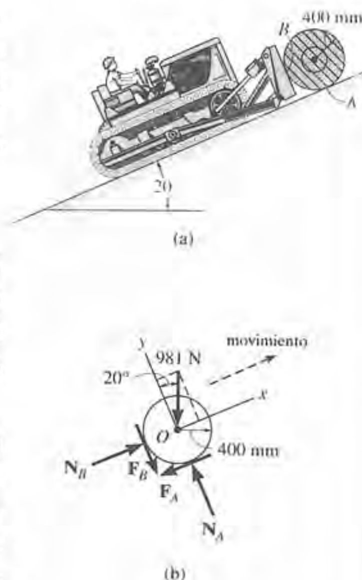


Fig. 8.14

Ecuaciones de equilibrio y de fricción.

$+\nearrow \Sigma F_x = 0; \qquad -F_A + N_B - 981 \text{ sen } 20° = 0 \qquad (1)$

$+\nwarrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_A - F_B - 981 \cos 20° = 0 \qquad (2)$

$\circlearrowright + \Sigma M_O = 0; \qquad F_B(400 \text{ mm}) - F_A(400 \text{ mm}) = 0 \qquad (3)$

(***El rodillo rueda hacia arriba del plano***). En este caso $F_A \leq 0.18\, N_A$ y

$(F_k)_B = (\mu_k)_B N_B; \qquad F_B = 0.40 N_B \qquad (4)$

El sentido de la fuerza de fricción en B debe especificarse correctamente. ¿Por qué? Como el carrete está siendo forzado a subir sobre el plano $\mathbf{F}_B$, actúa hacia abajo para impedir el movimiento de rodamiento del carrete en el sentido de las manecillas del reloj, figura 8.14*b*. Resolviendo las ecuaciones 1 a 4, tenemos

$N_A = 1146 \text{ N} \qquad F_A = 224 \text{ N} \qquad N_B = 559 \text{ N} \qquad F_B = 224 \text{ N}$

La hipótesis con respecto al no deslizamiento en A debe verificarse.

$F_A \leq (\mu_s)_A N_A; \qquad 224 \text{ N} \overset{?}{\leq} 0.18(1146) = 206 \text{ N}$

La desigualdad *no se cumple* y, por consiguiente, el deslizamiento ocurre en A y no en B. Por tanto, debe investigarse el otro caso de movimiento.

(***El rodillo se desliza hacia arriba del plano inclinado***). En este caso $F_B \leq 0.45 N_B$ y

$(F_k)_A = (\mu_k)_A N_A; \qquad F_A = 0.15 N_A \qquad (5)$

Resolviendo las ecuaciones 1 a 3 y 5 se llega a

$N_A = 1084 \text{ N} \qquad F_A = 163 \text{ N} \qquad N_B = 498 \text{ N} \qquad F_B = 163 \text{ N}$

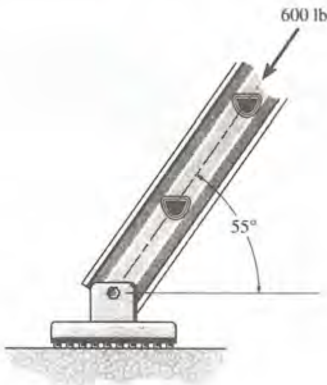
La validez de la solución ($N_B = 498$ N) puede verificarse comprobando la hipótesis de que no hay deslizamiento en B.

$F_B \leq (\mu_s)_B N_B; \qquad 163 \text{ N} < 0.45(498 \text{ N}) = 224 \text{ N} \qquad$ (verifique)

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

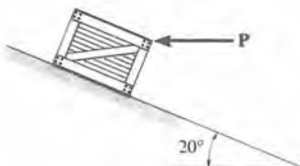
8.1. El zoclo de una escalera descansa sobre una superficie de concreto para la cual $\mu_s = 0.8$ para los dos materiales. Si la magnitud de una fuerza dirigida a lo largo del eje de la escalera es de 600 lb, determine la fuerza de fricción que actúa en la parte baja de la escalera. ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática que impedirá que resbale la escalera?



Prob. 8.1

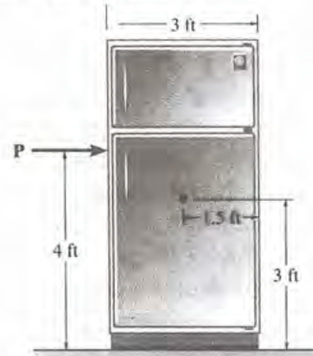
8.2. Determine la fuerza horizontal P requerida para tan sólo iniciar el moviento del huacal de 300 lb hacia arriba del plano. Considere que $\mu_s = 0.3$.

8.3. Determine el intervalo de valores para los cuales la fuerza horizontal P impedirá que resbale el huacal hacia arriba o abajo del plano inclinado. Considere que $\mu_s = 0.1$.



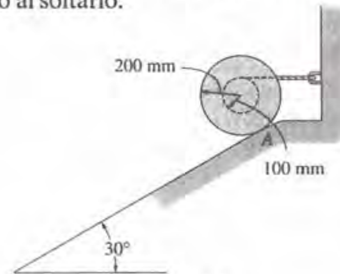
Probs. 8.2/8.3

***8.4.** El refrigerador tiene un peso de 200 lb y centro de gravedad en G. Determine la fuerza **P** requerida para moverlo. ¿El refrigerador se volcará o resbalará? Considere que $\mu_s = 0.4$.



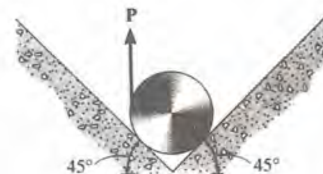
Prob. 8.4

8.5. El carrete tiene una masa de 20 kg. Si se enrolla una cuerda alrededor de su núcleo interno y se amarra a la pared, y el coeficiente de fricción estática en A es $\mu_s = 0.15$, determine si el carrete permanece en equilibrio al soltarlo.



Prob. 8.5

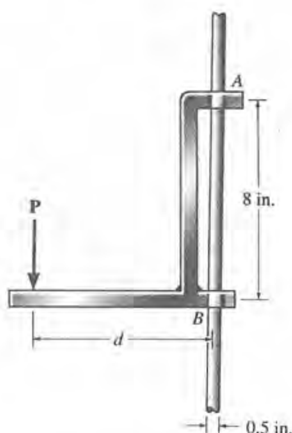
8.6. El cilindro de 100 lb descansa entre dos planos inclinados. Cuando $P = 15$ lb, el cilindro está a punto de moverse. Determine el coeficiente de fricción estática μ_s entre las superficies de contacto y el cilindro.



Prob. 8.6

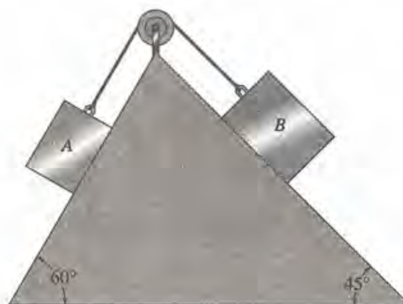
http://librosysolucionarios.net

8.7. La ménsula puede moverse libremente a lo largo del poste hasta que se coloca una carga P sobre ella. Cuando esto ocurre tiene contacto en A y en B. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.6$, determine la distancia mínima d a la que puede aplicarse la carga, de modo que la ménsula no resbale. Se ignorará el peso de la ménsula.



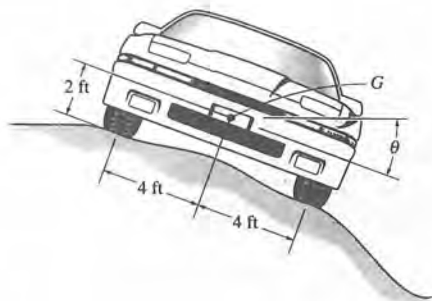
Prob. 8.7

8.9. Los bloques A y B descansan en los planos inclinados. Si el bloque A pesa 60 lb, determine el peso del bloque B para que (a) el bloque B esté a punto de resbalar hacia arriba , y (b) una vez superada la fricción estática, el bloque B se mueva a velocidad constante bajando el plano. Considere que $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.25$ para ambas superficies.



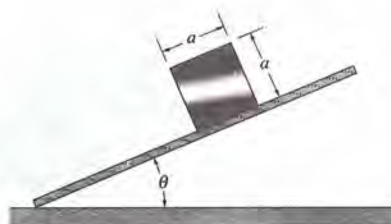
Prob. 8.9

***8.8.** El automóvil tiene un peso de 4000 lb y centro de gravedad en G. Si sale a un lado del camino, determine el ángulo máximo de inclinación, θ, que puede tener sin volcarse ni resbalar. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el suelo es $\mu_s = 0.4$



Prob. 8.8

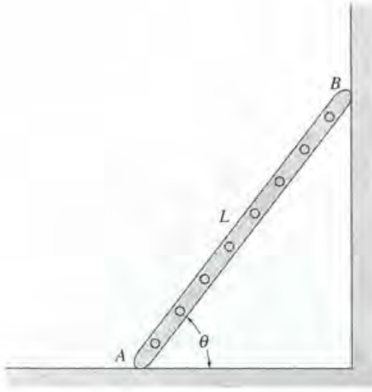
8.10. El bloque de perfil cuadrado tiene un peso W y descansa sobre la tabla. Si la tabla se inclina un ángulo θ, el bloque se vuelca. Determine θ y el coeficiente menor posible de fricción estática que permitirá que esto ocurra.



Prob. 8.10

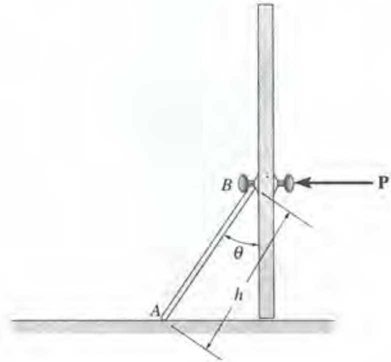
http://librosysolucionarios.net

8.11. La escalera uniforme tiene un peso de W y descansa sobre la pared en B y el piso en A. Si el coeficiente de fricción estática es μ, determine el mínimo ángulo θ en que puede ser colocada la escalera contra la pared sin que ésta resbale.



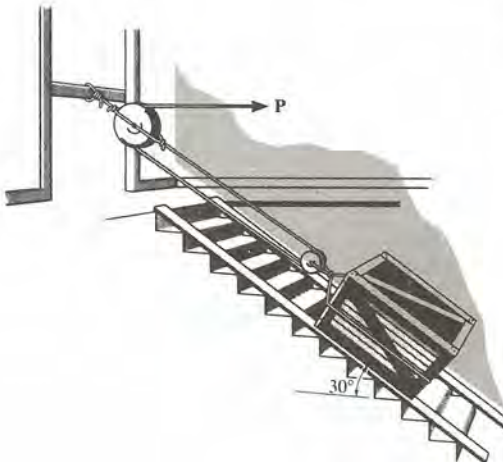
Prob. 8.11

8.13. Determine el ángulo máximo en que se puede poner el palo para inmovilizar la puerta cuando se aplica una fuerza horizontal **P** a la manija. Se ignorará el peso del palo y supondrá que no hay deslizamiento en B. El coeficiente de fricción estática en A es μ.



Prob. 8.13

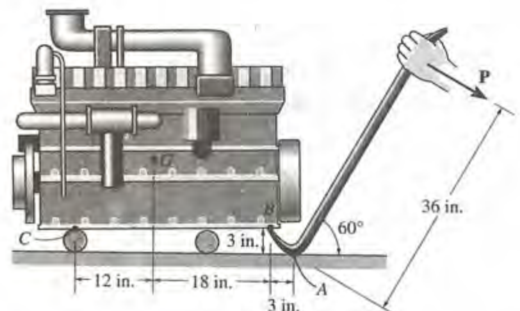
***8.12.** Si el coeficiente de fricción estática entre la rampa y el huacal de 200 lb es $\mu_s = 0.3$, determine la fuerza **P** que se debe aplicar a la cuerda para empezar a mover el huacal hacia arriba.



Prob. 8.12

8.14. La máquina tiene un peso de 500 lb. Determine la fuerza **P** que se debe aplicar a la barreta para levantarla. El coeficiente de fricción estática en A y en B es $\mu_s = 0.3$.

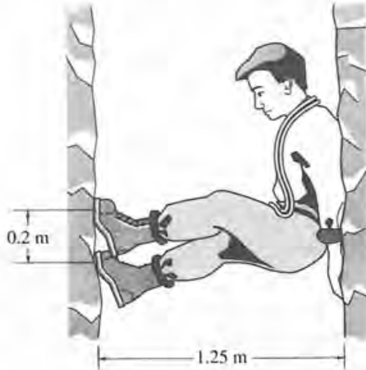
8.15. La máquina tiene un peso de 500 lb. Determine la fuerza **P** que se debe aplicar a la barreta para levantarla. El coeficiente de fricción estática en A es $\mu_A = 0.3$ y en B es $\mu_B = 0.2$.



Probs. 8.14/8.15

http://librosysolucionarios.net

***8.16.** El hombre tiene una masa de 40 kg. Está escalando la grieta, como se ve en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre sus zapatos y la roca es $\mu_s = 0.4$ y entre la roca y su espalda es $\mu'_s = 0.3$, determine la mínima fuerza horizontal que debe ejercer su cuerpo sobre la roca para lograr su escalada.



Prob. 8.16

8.17. El camión tiene una masa de 1.25 Mg y centro de masa en G. Determine la carga máxima que puede remolcar si (a) el camión tiene tracción trasera mientras que las ruedas delanteras ruedan libremente, y (b) el camión tiene tracción delantera y trasera. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el suelo es $\mu_s = 0.5$, y entre el huacal y el suelo es $\mu'_s = 0.4$.

8.18. Resuelva el problema 8.17 si el camión y el huacal se desplazan por una rampa de inclinación 10°.

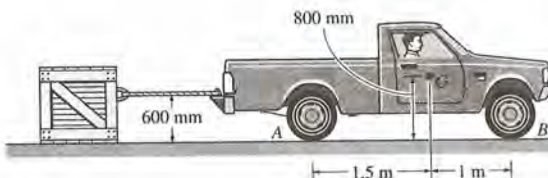
8.19. El mueble uniforme tiene un peso de 80 lb y descansa en un piso para el cual $\mu_s = 0.25$. Si el hombre lo empuja en la dirección mostrada, determine la magnitud mínima de la fuerza **F** que se necesita para desplazar el mueble. También, si el hombre tiene un peso de 150 lb, determine el coeficiente de fricción estática más pequeño posible entre las suelas de sus zapatos y el piso para que no resbale.



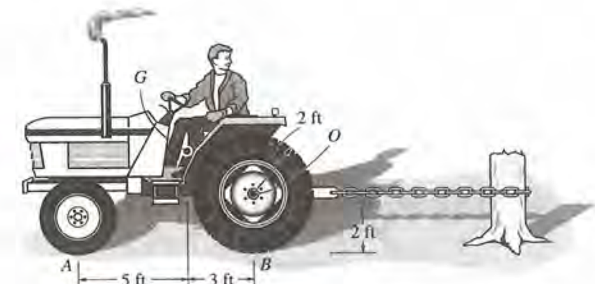
Prob. 8.19

***8.20.** El tractor está tirando el tocón. Determine el momento de torsión (torque) que debe aplicar la máquina a las ruedas traseras para que patinen. Las ruedas delanteras son libres. El tractor pesa 3500 lb y tiene centro de gravedad en G. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas traseras y el suelo es $\mu_s = 0.5$.

8.21. El tractor tira del tocón que está fijo. Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas traseras y el suelo es $\mu_s = 0.6$, determine si las ruedas traseras o las delanteras se levantan del suelo cuando el motor transmite el momento de torsión (torque) a las ruedas traseras. ¿Cuál es el momento necesario para producir el movimiento? Las ruedas delanteras son libres. El tractor pesa 2500 lb y su centro de gravedad está en G.



Probs. 8.17/8.18



Probs. 8.20/8.21

http://librosysolucionarios.net

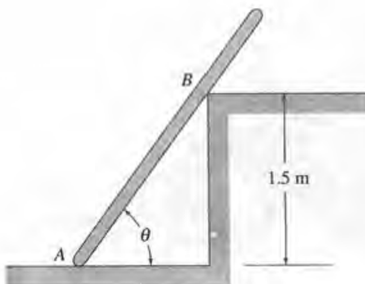
8.22. La cómoda tiene un peso de 300 lb y, debido a los objetos que contienen los cajones, tiene centro de gravedad en G. Si el coeficiente de fricción estática en A y en B es $\mu_s = 0.2$, determine si el hombre de 200–lb puede empujar la cómoda hacia la izquierda. El coeficiente de fricción estática entre sus zapatos y el suelo es $\mu'_s = 0.4$ Suponga que el hombre solamente ejerce fuerza horizontal sobre el mueble.

8.23. La cómoda tiene un peso de 300 lb y, debido a los objetos que contiene, su centro de gravedad está en G. Si el coeficiente de fricción estática en A y en B es $\mu_s = 0.2$, determine si el hombre de 200 lb puede tirar el mueble para la derecha. El coeficiente de fricción estática entre sus zapatos y el piso es $\mu'_s = 0.35$. Suponga que la fuerza ejercida por el hombre sobre el mueble es horizontal.



Probs. 8.22/8.23

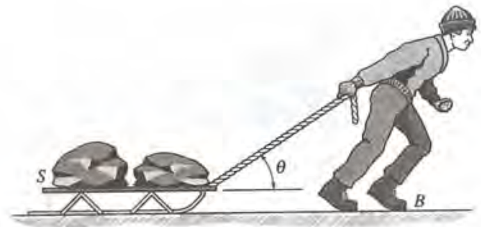
* **8.24**. La barra uniforme que tiene longitud 2 m tiene un peso W y se coloca sobre el borde. Si el ángulo mínimo de inclinación de la barra sin resbalar es $\theta = 60°$, determine el coeficiente de fricción μ estática entre las superficies de contacto A y B y la barra.



Prob. 8.24

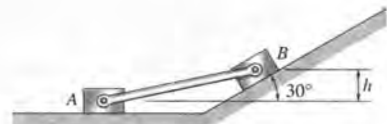
8.25. Determine la carga máxima W que el muchacho puede remolcar sobre su trineo S, si el trineo pesa 8 lb y $(\mu_S)_s = 0.1$ entre los patines y el hielo. El muchacho pesa 70 lb y $(\mu_B)_s = 0.4$ entre sus botas y el hielo. Considere que $\theta = 30°$.

8.26. Determine el ángulo θ de dirección de la cuerda para que el muchacho pueda tirar el trineo S que lleva una carga de 400 lb. El trineo pesa 8 lb y $(\mu_S)_s = 0.1$ entre los patines y el hielo. El muchacho pesa 70 lb y $(\mu_B)_s = 0.4$ entre sus botas y el hielo.



Prob. 8.25/8.26

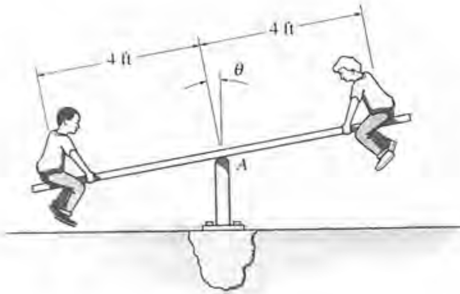
8.27. Los bloques A y B, que pesan cada uno 50 lb, se unen por una barra ligera de 3 ft articulada en cada extremo. Determine la altura máxima h en que el bloque B puede situarse sobre el plano inclinado sin que resbale hacia a bajo el ensamble. Ignore el tamaño de los bloques en los cálculos. Considere que $(\mu_A)_s = 0.3$, $(\mu_B)_s = 0.15$.



Prob. 8.27

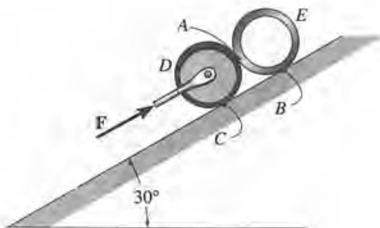
http://librosysolucionarios.net

*8.28. Dos chicos, que pesan 60 lb cada uno, están sentados en los extremos de una tabla uniforme que tiene un peso de 30 lb. Si la tabla se apoya en su punto central sobre un poste que tiene coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.6$, con la tabla, determine el ángulo máximo de báscula, θ, antes de empezar a resbalar. Ignore el tamaño del poste y de espesor de la tabla en los cálculos.



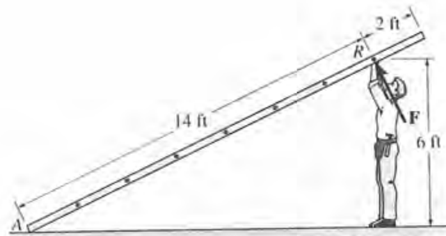
Prob. 8.28

8.29. Determine la mínima fuerza F requerida para empujar el tubo E hacia lo alto de la rampa. El tubo tiene una masa de 75 kg y el rodillo D una masa de 100 kg. La fuerza actúa paralelamente al plano y los coeficientes de fricción estática en las superficies de contacto son $\mu_A = 0.3$, $\mu_B = 0.25$ y $\mu_C = 0.4$. Cada cilindro tiene un radio de 150 mm.



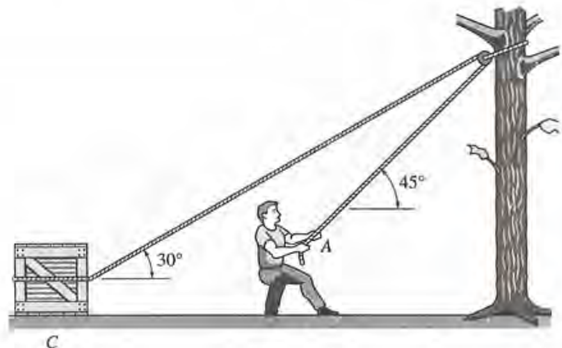
Prob. 8.29

8.30. Un hombre intenta elevar la escalera uniforme de 40 lb a la posición vertical aplicando una fuerza **F** perpendicular a la escalera en el barrote R. Determine el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el piso, asi la escalera empieza a resbalar en el piso cuando las manos alcanzan una altura de 6 ft.



Prob. 8.30

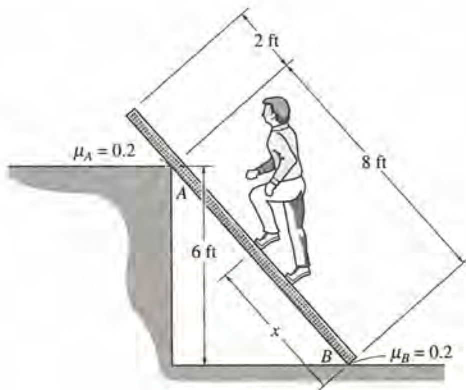
8.31. El hombre tiene una masa de 60 kg y el huacal una masa de 100 kg. Si el coeficiente de fricción estática entre sus zapatos y el suelo es $\mu_S = 0.4$ y entre el huacal y el suelo es $\mu_C = 0.3$, determine si el hombre es capaz de mover el huacal usando el sistema de cuerda y polea mostrado.



Prob. 8.31

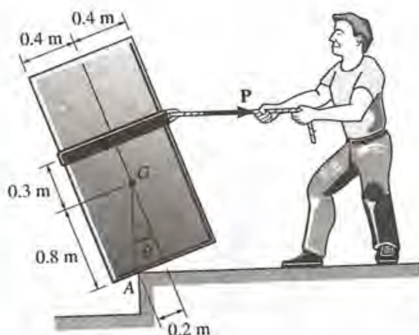
http://librosysolucionarios.net

* **8.32.** Una viga de 50 lb se apoya en dos superficies en los puntos A y B. Determine la distancia máxima x a la que un chico puede caminar hacia arriba antes de que empiece a resbalar. El chico pesa 120 lb; suponga que asciende a velocidad constante. Desprecie el espesor de la viga.



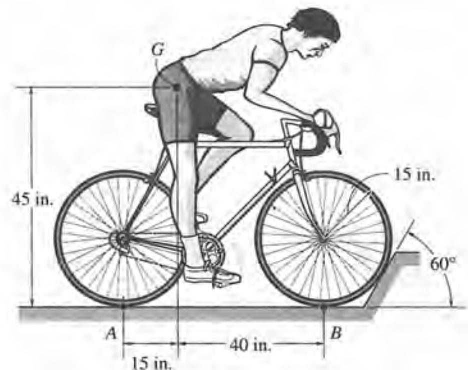
Prob. 8.32

8.33. El hombre intenta mover el bloque, que tiene un peso de 800 lb y centro de gravedad en G, sobre el filo del escalón. Si el coeficiente de fricción estática en A es $\mu_A = 0.3$, determine el ángulo θ al que empieza a resbalar el bloque. También, encuentre la magnitud de la fuerza horizontal **P** que debe ejercer para que esto ocurra.



Prob. 8.33

8.34. El ciclista tiene un peso de 170 lb y un centro de gravedad en G. Si $\mu_s = 0.5$, ¿es posible mover la bicicleta hacia delante? Desprecie la fricción en la rueda delantera y el peso de la bicicleta.



Prob. 8.34

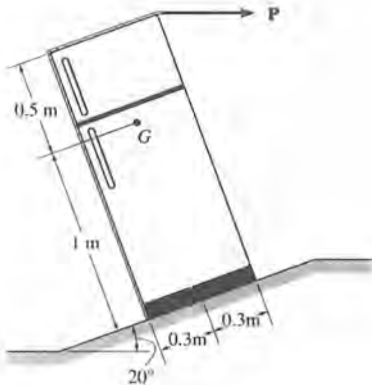
8.35. El artefacto sirve para sujetar trapeadores y escobas. Consiste en dos pequeños rodillos de peso insignificante que pueden correr libremente en las ranuras inclinadas. Si el coeficiente de fricción estática entre el palo de escoba y cada rodillo es $\mu_s = 0.5$, determine el ángulo de inclinación θ que debiera usarse en el diseño para que se sostenga cualquier peso de escoba.



Prob. 8.35

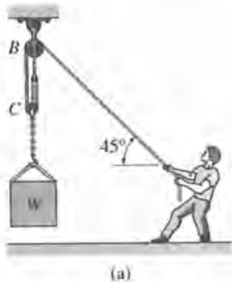
http://librosysolucionarios.net

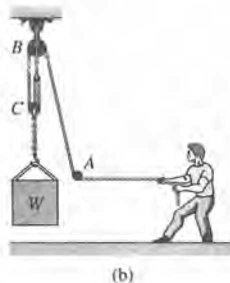
*8.36. El refrigerador tiene una masa de 75 kg y centro de gravedad en G. Determine la fuerza **P** requerida para moverlo. ¿Se desliza o se vuelca? El coeficiente de fricción estática entre el refrigerador y la rampa es $\mu_s = 0.3$.



Prob. 8.36

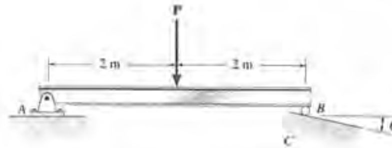
8.37. Determine el peso máximo W que el hombre puede levantar usando el sistema de poleas, sin el sistema de poleas y luego con la polea en A. El hombre tiene un peso de 200 lb y el coeficiente de fricción estática entre sus pies y el suelo es $\mu_s = 0.6$.





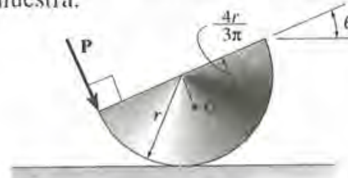
Prob. 8.37

8.38. La viga está articulada en A y se apoya en un rodillo en B, que tiene peso despreciable y radio de 15 mm. Si el coeficiente de fricción estática en B y en C es $\mu_B = \mu_C = 0.3$, determine el mayor ángulo θ de la rampa para el cual el rodillo no resbale para cualquier fuerza **P** aplicada a la viga.



Prob. 8.38

■ **8.39.** El semicilindro homogéneo de peso W descansa sobre la superficie, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.2$. Si una fuerza **P** se aplica en su borde, determine el máximo ángulo θ en que puede inclinarse la cara superior del semicilindro antes de empezar a resbalar. El centro de gravedad está en G, como se muestra.



Prob. 8.39

*8.40. El hombre se apoya contra la pared en la posición indicada. Si tiene una masa de 70 kg y centro de masa en G, determine si resbalará en A. Los coeficientes de fricción estática en A y en B son $\mu_A = 0.4$ y $\mu_B = 0.5$, respectivamente.

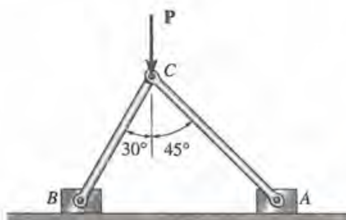
8.41. El hombre se para contra la pared en la posición mostrada. Si tiene masa de 70 kg y centro de masa en G, determine si resbala en A o en B al estirar las piernas. Los coeficientes de fricción estática en A y en B son $\mu_A = 0.4$ y $\mu_B = 0.5$, respectivamente.



Probs. 8.40/8.41

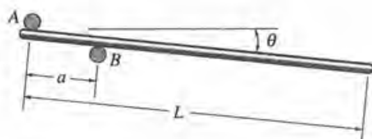
http://librosysolucionarios.net

8.42. Dos bloques A y B, cada uno con masa de 6 kg, se conectan mediante la articulación mostrada. Si los coeficientes de fricción estática en las superficies de contacto son $\mu_A = 0.2$ y $\mu_B = 0.3$, determine la máxima fuerza vertical **P** que puede aplicarse a la articulación C sin que resbalen los bloques. Ignore el peso de los eslabones.



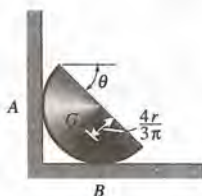
Prob. 8.42

8.43. La barra uniforme tiene un peso W. Determine el ángulo máximo θ en que puede inclinarse la barra, de modo que no resbale por las dos clavijas en A y B. El coeficiente de fricción estática entre barra y clavijas es μ.



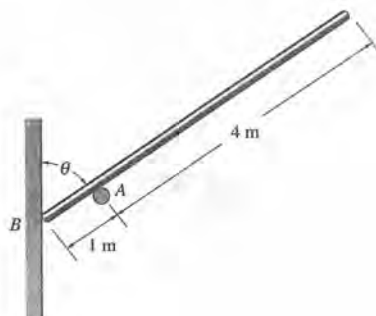
Prob. 8.43

***8.44.** El disco semicircular tiene peso W y centro de gravedad en G. Determine el menor ángulo de colocación θ, de modo que el disco no resbale ni sobre la pared ni sobre el piso. El coeficiente de fricción estática en las superficies de contacto es μ.



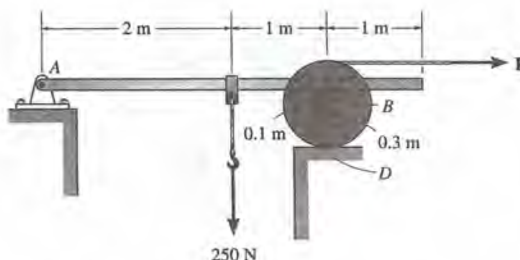
Prob. 8.44

8.45. La barra uniforme tiene peso W y descansa sobre una clavija lisa en A y contra un muro en B, para los cuales $\mu_S = 0.25$. Determine el mayor ángulo θ posible para colocar la barra sin que resbale.



Prob. 8.45

8.46. La viga tiene una masa de 20 kg y se sujeta a una fuerza de 250 N. Se apoya en un extremo mediante una articulación, y en el otro, con un carrete de una masa de 35 kg. Determine la mínima fuerza del cable, **P**, necesaria para mover el carrete hasta salir de bajo la viga. Los coeficientes de fricción estática en B y en D son $\mu_B = 0.4$ y $\mu_D = 0.2$, respectivamente.



Prob. 8.46

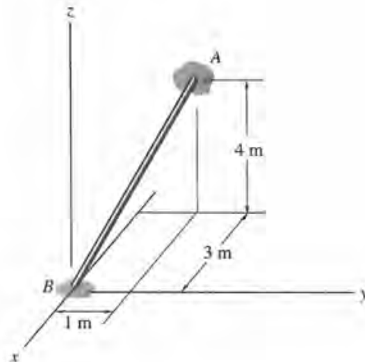
http://librosysolucionarios.net

8.47. La rueda de un carrito de supermercado se pone en contacto con una obstrucción circular de peso insignificante. Si el coeficiente de fricción estática en los puntos de contacto A y B es $\mu_s = 0.4$, determine el radio máximo r de la obstrucción que puede bloquear la rueda e impedirle girar cuando cualquier fuerza horizontal se aplique al carro.



Prob. 8.47

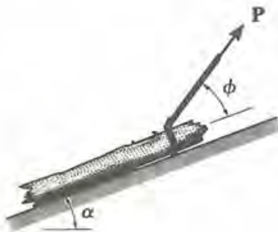
8.50. La barra uniforme de 5 lb descansa en el suelo en B y sobre la pared en A. Si la barra no resbala en B, determine el mínimo coeficiente de fricción estática en A que impedirá el deslizamiento.



Prob. 8.50

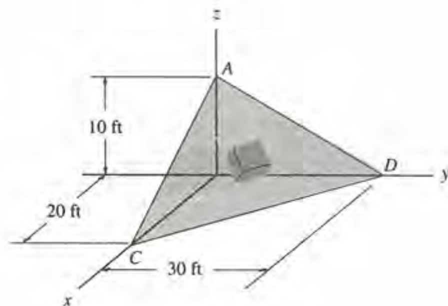
*8.48. El tronco de peso W se tirará por el plano inclinado de pendiente α usando una fuerza **P**. Si **P** actúa a un ángulo Φ como se muestra, demuestre que para que haya deslizamiento $P = W \operatorname{sen}(\alpha + \theta)/\cos(\Phi - \theta)$, donde es el ángulo de fricción estática; $\theta = \tan^{-1} \mu_s$.

8.49. Determine el ángulo Φ al que la fuerza aplicada **P** debiera actuar sobre el tronco, de modo que la magnitud de **P** sea tan pequeña como sea posible para tirar el tronco hacia arriba de la rampa. ¿Cuál es el valor correspondiente de P? El tronco pesa W y la pendiente α es conocida. Exprese la respuesta en términos del ángulo de fricción cinética, $\theta = \tan^{-1} \mu$.



Probs. 8.48/8.49

8.51. El bloque de 50 lb se encuentra a punto de resbalar cuando se le coloca sobre el plano inclinado. Determine el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano.



Prob. 8.51

http://librosysolucionarios.net

8.3 Cuñas

La *cuña* es una máquina simple que suele utilizarse para transformar una fuerza aplicada en otras fuerzas mucho mayores con dirección aproximadamente perpendicular a la de la fuerza aplicada. Las cuñas se usan también, para efecto de pequeños desplazamientos o ajustes a grandes cargas.

Consideremos, por ejemplo, la cuña que se ve en la figura 8.15*a*, y que se está usando para *levantar* un bloque de peso **W** mediante aplicación de una fuerza **P** a la cuña. En la figura 8.15b se muestran los diagramas de cuerpo libre de la cuña y el bloque. Aquí se ha excluido el peso de la cuña porque suele ser *pequeño* comparado con el peso del bloque. También debe observarse que las fuerzas de fricción $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ deben oponerse al movimiento del bloque. Asimismo, la fuerza de fricción $\mathbf{F}_3$ del muro sobre el bloque debe actuar hacia a bajo para oponerse al desplazamiento del bloque hacia arriba. Las localizaciones de las fuerzas normales resultantes no son de importancia, pues ni la cuña ni el bloque se ladearán. En consecuencia, no se considerarán las ecuaciones de equilibrio de momentos. Hay siete incógnitas que consisten en la fuerza aplicada **P**, necesaria para causar el movimiento de la cuña y seis fuerzas normales y de fricción. Las siete ecuaciones disponibles consisten en dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$) aplicadas a la cuña y al bloque (en total cuatro ecuaciones) y la ecuación de fricción $F = \mu N$ aplicada a cada superficie de contacto (tres en total).

Si el bloque debe ser *bajado,* las fuerzas de fricción actuarán en sentido opuesto al que se muestra en la figura 8.15b. La fuerza aplicada **P** actuará hacia la derecha como se muestra, si el coeficiente de fricción es pequeño o grande el ángulo θ de la cuña. De otra forma, **P** deberá *jalar* la cuña para sacarla. Si se *suprime* **P**, o $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, y las fuerzas de fricción mantienen el bloque en posición, entonces la cuña le dice que es *autotrabadora.*

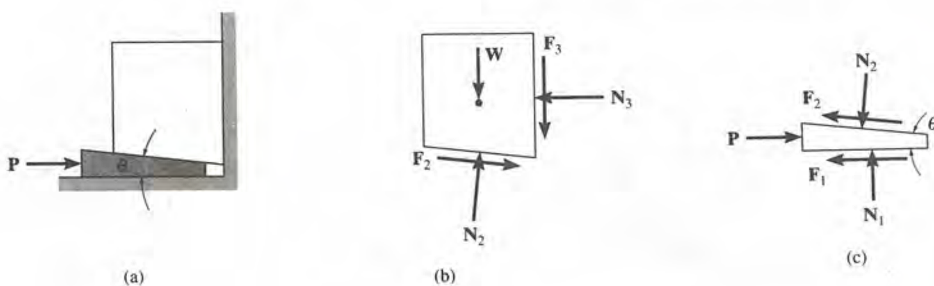


Fig. 8.15

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.7

La piedra uniforme tiene masa de 500 kg y se mantiene horizontal usando una cuña en B como se muestra en la figura 8.16*a*. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$ en la superficie en contacto con la cuña, determinar la fuerza **P** requerida para quitar la cuña. ¿Es autotrabadora esta cuña? Suponga que la piedra no resbala en A.

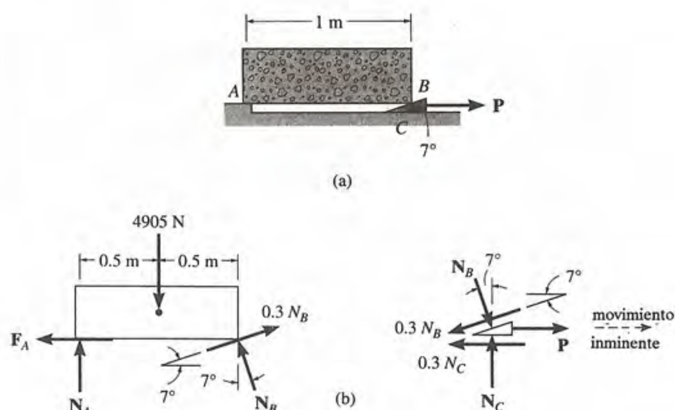


Fig. 8.16

SOLUCIÓN

Ya que la cuña será retirada, está por ocurrir el movimiento en las superficies en contacto. Luego, $F = \mu_s N$, y los diagramas de cuerpo libre se muestran en la figura 8.16*b*. Nótese que sobre la piedra en A, $F_A \leq \mu_s N_A$, ya que en ese punto no hay deslizamiento. A partir del diagrama de cuerpo libre de la piedra,

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad -4905(0.5) + (N_B \cos 7°)(1) + (0.3 N_B \operatorname{sen} 7°)(1) = 0$$

$$N_B = 2383.1 \text{ N}$$

Usando este resultado para la cuña, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad 2383.1 \operatorname{sen} 7° - 0.3(2383.1) \cos 7° + P - 0.3 N_C = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad N_C - 2383.1 \cos 7° - 0.3(2383.1) \operatorname{sen} 7° = 0$$

$$N_C = 2452.5 \text{ N}$$

$$P = 1154.9 \text{ N} = 1.15 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Como P es magnitud positiva, la cuña debe ser retirada. Obviamente si P es cero, la cuña permanecerá en posición (autotrabada) y las fuerzas de fricción $\mathbf{F}_C$ y $\mathbf{F}_B$ desarrolladas en los puntos de contacto satisfacerán $F_B < \mu_s N_B$ y $F_C < \mu_s N_C$.

http://librosysolucionarios.net

8.4 Fuerzas de fricción en tornillos

Los tornillos se usan casi siempre como sujetadores; sin embargo, en numerosos tipos de máquinas se incorporan para transmitir potencia o movimiento de una a otra parte de una máquina. Para este último propósito, es común el *tornillo de rosca cuadrada*, especialmente cuando se aplican grandes fuerzas sobre su eje. En esta sección analizaremos las fuerzas que actúan en los tornillos de rosca cuadrada. El análisis de otros tipos de tornillos, como los de rosca en "V" se basa en los mismos principios.

Un *tornillo* puede considerarse simplemente como un plano inclinado o cuña enrrollado alrededor de un cilindro. Una tuerca inicialmente en la posición A sobre el tornillo mostrado en la figura 8.17*a* se moverá hasta B al hacerla girar 360° en torno al eje del tornillo. Esta rotación equivale a trasladar la tuerca hacia arriba de un plano inclinado de altura l y longitud $2\pi r$, donde r es el radio medio de la rosca, figura 8.17*b*. La elevación l correspondiente a una revolución se conoce como el paso del tornillo, y el *ángulo de paso* está dado por $\theta = \tan^{-1}(l/2\pi r)$.

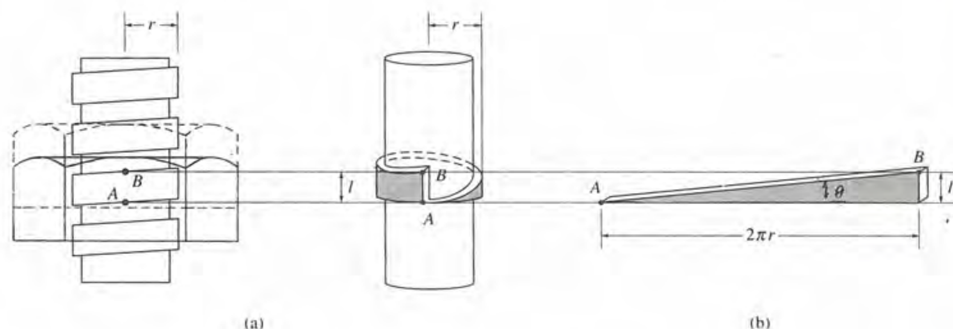


Fig. 8.17

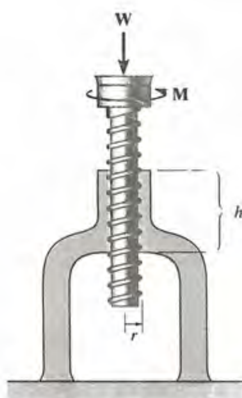


Fig. 8.18

Análisis de fricción. Cuando se somete un tornillo a grandes fuerzas axiales, las fuerzas de fricción que se desarrollan en la rosca se vuelven importantes si se va a determinar el momento **M*** requerido para girar el tornillo. Consideremos, por ejemplo, el gato de tornillo de rosca cuadrada mostrado en la figura 8.18, que soporta la carga vertical **W**. Las fuerzas de reacción del gato a esta carga se distribuyen sobre la circunferencia de la rosca del tornillo que tiene contacto con el agujero hecho en el gato para

* Para las aplicaciones, M se desarrolla aplicando una fuerza horizontal P en ángulo recto con el extremo de una palanca que estaría fija en el tornillo.

http://librosysolucionarios.net

pasar el tornillo, o sea la región h mostrada en la figura 8.18. Para simplificar esta porción de rosca puede imaginarse como desenrollada del tornillo y representada como un simple bloque que descansa sobre un plano inclinado que tiene el ángulo de paso del tornillo, θ, figura 8.19*a*. Aquí el plano inclinado representa la *rosca de apoyo* en el interior de la base del gato. Tres fuerzas actúan sobre el bloque o tornillo. La fuerza **W** es la carga axial total aplicada al tornillo. La fuerza horizontal **S** es causada por el momento aplicado **M**, tal que las magnitudes de estas cargas pueden relacionarse sumando momentos en torno al eje del tornillo. Se requiere que $M = Sr$, donde r es el radio medio del tornillo. Como resultado de **W** y **S**, el plano inclinado ejerce una fuerza resultante **R** sobre el bloque que se muestra con sus componentes que actúan perpendicular (normal), **N**, y tangencialmente, **F**, a las superficies de contacto.

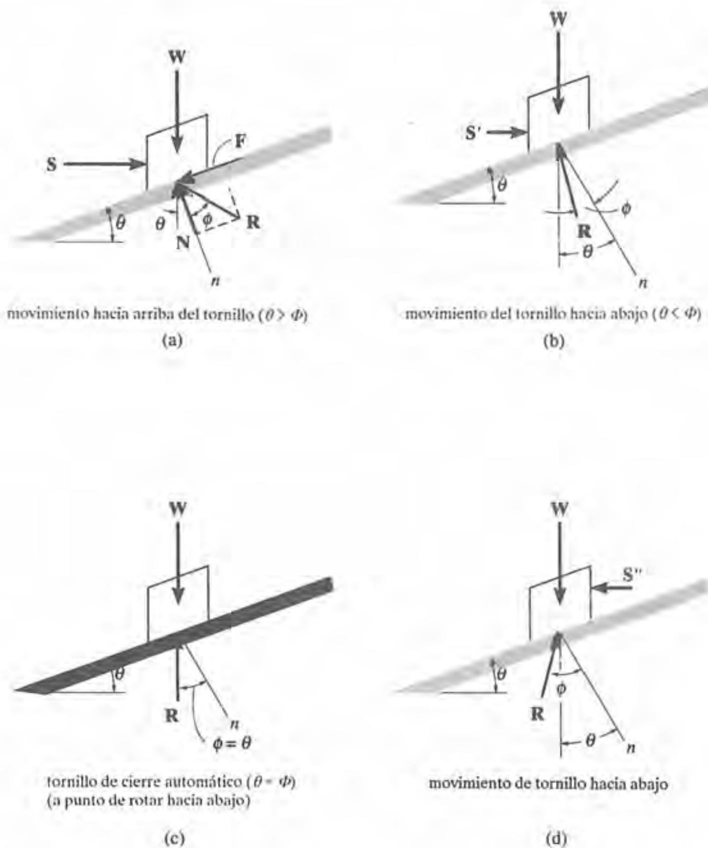


Fig. 8.19

http://librosysolucionarios.net

Movimiento del tornillo hacia arriba. Con tal de que M sea lo suficientemente grande, el tornillo (y, por tanto, el bloque), puede ser puesto en punto de movimiento hacia arriba, o bien puede estar ocurriendo el movimiento. En estas condiciones, **R** actúa según ángulo $(\theta + \Phi)$ con respecto a la vertical, como se muestra en la figura 8.19a, donde $\Phi = \tan^{-1}(F/N) = \tan^{-1}(\mu N/N) = \tan^{-1}\mu$. Aplicando las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas al bloque, obtenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad S - R\,\text{sen}\,(\theta + \Phi) = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad R\cos(\theta + \Phi) - W = 0$$

Si se elimina R, y se despeja S y se sustituye este valor en la ecuación $M = Sr$, se obtiene como resultado

$$M = Wr\tan(\theta + \Phi) \tag{8.3}$$

Como se indica, M es el momento necesario para causar movimiento inminente hacia arriba del tornillo, a condición de que $\Phi = \Phi_s = \tan^{-1}\mu_s$ (el ángulo de fricción estática). Si Φ es reemplazado por $\Phi_k = \tan^{-1}\mu_k$ (el ángulo de fricción cinética), la ecuación 8.3 dará un valor menor M necesario para mantener movimiento uniforme del tornillo hacia arriba.

Movimiento del tornillo hacia abajo ($\theta > \Phi$). Si la superficie del tornillo es muy *resbalosa,* el tornillo puede girar hacia abajo si la magnitud, *no la dirección,* del momento se reduce a, digamos, $M' < M$. Como se muestra en la figura 8.19b, esto causa el efecto de **M′**, que llega a ser **S′**, y requiere que el ángulo Φ (Φ_s o Φ_k) se encuentre en el lado opuesto de la normal n al plano que soporta el bloque, tal que $\theta > \Phi$. Para este caso, la ecuación 8.3 viene a ser

http://librosysolucionarios.net

$$M' = Wr \tan(\theta - \Phi) \qquad (8.4)$$

Tornillo de cierre automático. Si el momento **M** (o su efecto **S**) *se retira,* el tornillo permanecerá de *cierre automático;* es decir, soportará la carga **W** por *fuerzas de fricción solamente* a condición de que $\Phi \geq \theta$. Para demostrarlo, consideremos el caso límite necesario cuando $\Phi = \theta$, figura 8.19*c*. Aquí se mantiene el equilibrio vertical, ya que **R** es vertical y por tanto equilibra a **W**.

Movimiento del tornillo hacia abajo ($\theta < \Phi$). Cuando la superficie del tornillo sea *muy rugosa,* el tornillo no girará hacia abajo como se explicó antes. En vez de ello, la dirección del momento aplicado debe *revertirse* para prococar el movimiento. El diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.19d es representativo de este caso. Aquí, **S''** es causado por el momento (invertido) aplicado **M''**. Así pues, la ecuación 8.3 viene a ser

$$M'' = Wr \tan(\Phi - \theta) \qquad (8.5)$$

Cada uno de los casos precedentes habrá de entenderse a cabalidad, antes de proceder con los problemas.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.8

El tensor que se muestra en la figura 8.20 tiene una rosca cuadrada con un radio medio de 5 mm y un paso de 2 mm. Si el coeficiente de fricción entre el tornillo y el tensor es $\mu_s = 0.25$, determine el momento **M** que debe aplicarse para acercar los extremos de los tornillos. ¿Es el tensor de cierre automático?

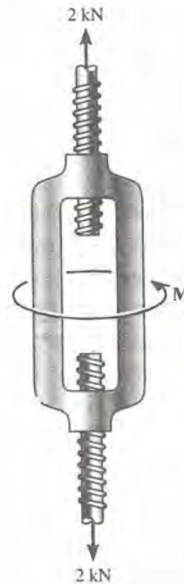


Fig. 8.20

SOLUCIÓN

El momento **M** puede obtenerse usando la ecuación 8.3. ¿Por qué?, Ya que deben vencerse las fricciones en los tornillos, esto requiere que

$$M = 2[Wr \tan(\theta + \Phi)] \qquad (1)$$

Aquí, $W = 2000$ N, $r = 5$ mm, $\Phi_s = \tan^{-1} \mu_s = \tan^{-1}(0.25) = 14.04°$, y $\theta = \tan^{-1}(l/2\pi r) = \tan^{-1}(2 \text{ mm}/[2\pi(5 \text{ mm})]) = 3.64°$. Si se sustituye estos valores en la ecuación 1 y resuelve nos da

$$M = 2[(2000 \text{ N})(5 \text{ mm}) \tan(14.04° + 3.64°)]$$
$$= 6375.1 \text{ N} \cdot \text{mm} = 6.38 \text{ N} \cdot \text{m}$$ *Resp.*

Cuando se *quita* el momento, el tensor quedará autotrabado; es decir, no se destornillará, ya que $\Phi_s > \theta$.

http://librosysolucionarios.net

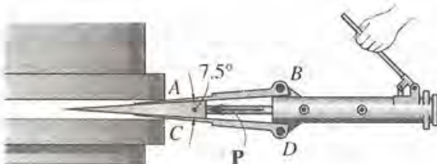
PROBLEMAS

*8.52. Los dos bloques de piedra tienen pesos de $W_A = 600$ lb y $W_B = 500$ lb. Determine la menor fuerza horizontal **P** que se debe aplicar al bloque A para moverlo. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es $\mu_s = 0.3$ y entre el piso y cada bloque es $\mu'_s = 0.5$.



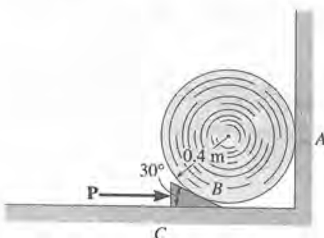
Prob. 8.52

8.53. El instrumento se usa para levantar maquinaria muy pesada a su posición. Si la máquina por levantar requiere una fuerza vertical de 60,000 lb en A, determine la fuerza **P** que el cilindro hidráulico debe ejercer sobre la cuña para empujarla hacia delante. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y los miembros AB y CD es $\mu_s = 0.2$.



Prob. 8.53

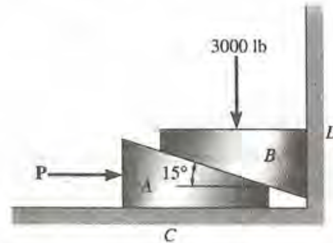
8.54. El rollo uniforme de papel tiene una masa de 120 kg y descansa sobre una cuña de 30° de masa insignificante. Si el coeficiente de fricción estática en todas las superficies en contacto es $\mu_s = 0.3$, determine la fuerza horizontal **P** que debe aplicarse a la cuña para levantar el papel. Se ignorará el peso de la cuña.



Prob. 8.54

8.55. Determine la menor fuerza P requerida para levantar la carga de 3000 lb. El coeficiente de fricción estática entre A y C y B y D es $\mu_s = 0.3$, y entre A y B, $\mu'_s = 0.4$. Se considerará insignificante el peso de cada cuña.

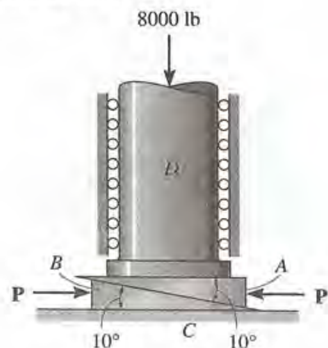
*8.56. Determine la fuerza horizontal invertida −**P** requerida para sacar la cuña A. El coeficiente de fricción estática entre A y C y B y D es $\mu_s = 0.2$, y entre A y B, $\mu'_s = 0.1$. Desprecie el peso de cada cuña.



Probs. 8.55/8.56

8.57. La columna D está sometida a una carga vertical de 8000 lb. Se apoya en dos cuñas idénticas A y B, para las que el coeficiente de fricción estática en las superficies de contacto AB y BC es $\mu_s = 0.4$. Determine la fuerza **P** requerida para mover la cuña B a la derecha y la mínima fuerza de equilibrio **P′** que se necesita para mantener estacionaria la cuña A. Las superficies de contacto AD son lisas. Desprecie el peso de las cuñas.

8.58. La columna D está sujeta a una carga vertical de 8000 lb. Está apoyada en dos cuñas idénticas A y B, para las cuales el coeficiente de fricción estática en las superficies en contacto AB y BC es $\mu_s = 0.4$. Si se quitan las fuerzas **P** y **P′**, ¿son autotrabadoras las cuñas? Las superficies de contacto AD son lisas. Desprecie el peso de las cuñas.

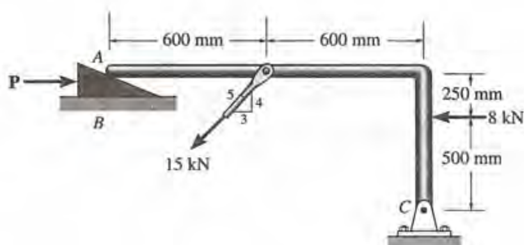


Probs. 8.57/8.58

http://librosysolucionarios.net

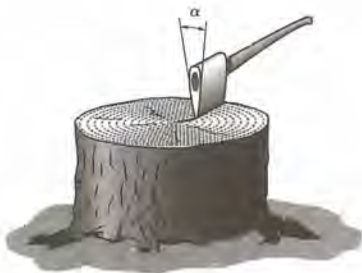
8.59. La cuña se usa como palanca sobre el miembro. Para la carga mostrada, determine la fuerza horizontal **P** que se debe aplicar para mover la cuña a la derecha. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y las dos superficies de contacto es $\mu_s = 0.25$. Desprecie el peso de la cuña.

*** 8.60.** La cuña se usa para hacer palanca en el miembro. Para la carga mostrada, determine la fuerza horizontal invertida –**P** que se debe aplicar para extraer la cuña hacia la izquierda. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y las dos superficies de contacto es $\mu_s = 0.15$. Desprecie el peso de la cuña.



Probs. 8.59/8.60

8.61. Se clava un hacha en el tocón del árbol. Si el coeficiente de fricción estática entre el hacha y la madera es $\mu_s = 0.2$, determine el mínimo ángulo α de la hoja con que será "autotrabada" el hacha. Desprecie el peso del hacha.



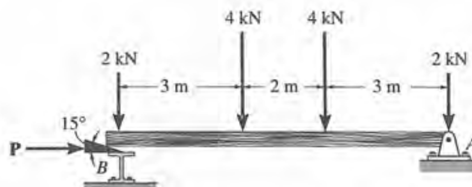
Prob. 8.61

8.62. Los bloques en cuña se utilizan para sujetar el espécimen en una máquina de prueba de tensión. Determine el ángulo θ de diseño de las cuñas de modo que el espécimen no resbale independientemente de la carga aplicada. Los coeficientes de fricción estática son $\mu_A = 0.1$ en A y $\mu_B = 0.6$ en B. Se desprecia el peso de los bloques.



Prob. 8.62

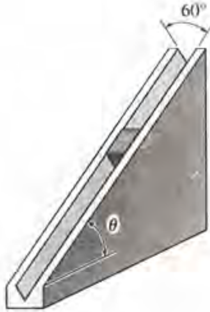
8.63. La cuña se usa para hacer palanca en el piso del edificio. Para la carga de piso mostrada, determine la fuerza horizontal **P** que se debe aplicar para empujar la cuña. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y las dos superficies de contacto es $\mu_s = 0.25$. Desprecie el peso de la cuña.



Prob. 8.63

http://librosysolucionarios.net

*8.64. Una cuña de 50 lb se coloca en la ranura practicada en el plano inclinado. Determine el ángulo θ máximo para el plano inclinado sin causar deslizamiento de la cuña. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y la superficie es $\mu_s = 0.2$.



Prob. 8.64

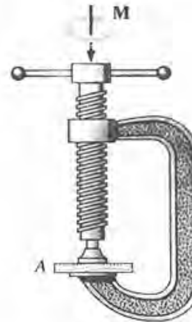
8.65. Se ha atornillado una barra de peso insignificante entre las paredes de la camioneta con el propósito de asegurar la carga. Determine el momento de torsión (torque) M que se debe aplicar a la barra para que produzca una compresión en la barra de 80 lb. En A hay un tornillo de rosca cuadrada con paso de 0.2 in y radio de 0.5 in, y el coeficiente de fricción estática entre la barra y el tornillo es $\mu_s = 0.3$. También, ¿qué cantidad de fuerza centrada F debe aplicarse para extraer la barra? El coeficiente de fricción estática entre las paredes de la camioneta y las almohadillas de los extremos de la barra es $\mu_s = 0.7$.



Prob. 8.65

8.66. Determine la fuerza de sujeción en el punto A de la mesa si el tornillo de la prensa en "C" se aprieta con una torsión de $M = 8\ \text{N}\cdot\text{m}$. El tornillo de rosca cuadrada tiene radio medio de 10 mm, un paso de 3 mm, y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.35$.

8.67. Si la fuerza de sujeción en la mesa A debe ser 500 N, determine el momento de torsión M que se debe aplicar al mango de la abrazadera en "C". El tornillo de rosca cuadrada tiene radio medio de 10 mm, un paso de 3 mm, y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.35$.



Probs. 8.66/8.67

*8.68. La columna se usa para soportar el piso superior. Si la fuerza perpendicularmente aplicada al mango es $F = 80$ N para apretar el tornillo, determine la fuerza de compresión en la columna. El tornillo de rosca cuadrada en el gato tiene coeficiente de fricción estática de $\mu_s = 0.4$, diámetro medio de 25 mm, y un paso de 3 mm.

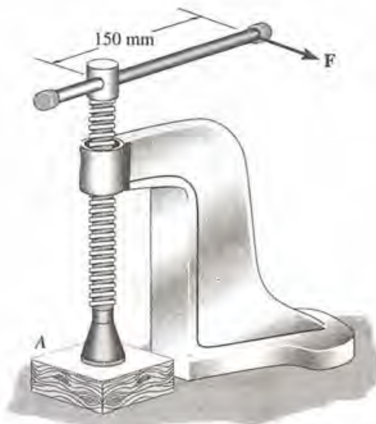


Prob. 8.68

http://librosysolucionarios.net

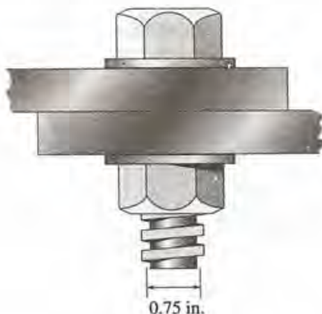
8.69. Si la fuerza de sujeción en la tabla *A* debe ser 50 N, determine la fuerza **F** que se debe aplicar a la manija de la abrazadera para apretarla. El tornillo de rosca cuadrada tiene radio medio de 10 mm, paso de 3 mm, y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.35$.

8.70. Determine la fuerza de la prensa en la tabla *A* si el tornillo de la prensa se aprieta con una fuerza de $F = 400$ N. El tornillo de rosca cuadrada tiene radio medio de 8 mm, paso de 2 mm, y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$.



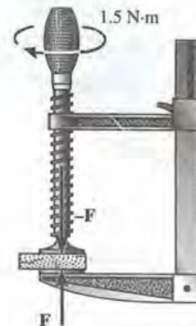
Probs. 8.69/8.70

8.71. El perno de rosca cuadrada se usa para unir dos placas. Si el perno tiene un radio medio de $\frac{3}{4}$ in y paso de $\frac{3}{16}$ in, determine el momento de torsión (torque) requerido para aflojar el perno, si la tensión en el perno es 35,000 lb. El coeficiente de fricción estática entre las roscas y el perno es $\mu_s = 0.15$.



Prob. 8.71

* **8.72.** El tornillo de rosca cuadrada de la prensa tiene diámetro medio de 14 mm y paso de 6 mm. Si $\mu_s = 0.2$ para las roscas, y el momento de torsión aplicado a la manija es 1.5 N · m, determine la fuerza de compresión *F* sobre el bloque.



Prob. 8.72

8.73. La flecha tiene un tornillo de rosca cuadrada con paso de 9 mm y radio medio de 15 mm. Si está en contacto con un engrane que tiene radio medio de 20 mm, determine el momento de torsión (torque) de resistencia **M** sobre el engrane que es necesario para impedir que gire el tornillo, si se aplica un momento de torsión de 7 N · m a la flecha. El coeficiente de fricción estática en el tornillo es $\mu_s = 0.2$. Desprecie la fricción en los apoyo del tornillo, situados en *A* y en *B*.



Prob. 8.73

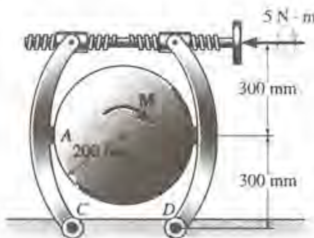
http://librosysolucionarios.net

8.74. El artefacto es utilizado para tirar la terminal C de una columna de batería. Si la fuerza requerida de extracción es 85 lb, determine el momento de torsión **M** que debe aplicarse a la manija en el tornillo para apretarlo. El tornillo tiene roscas cuadradas, diámetro medio de 0.2 in, paso de 0.08 in y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$.



Prob. 8.74

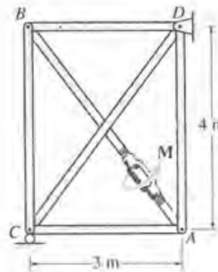
8.75. El mecanismo de frenado consiste en dos brazos articulados y un tornillo de rosca cuadrada con roscas izquierda y derecha. Por tanto, al girarse, el tornillo acerca los dos brazos entre sí. Si el paso del tornillo es 4 mm, el diámetro medio 12 mm y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.35$, determine la tensión en el tornillo cuando un momento de torsión (torque) de 5 N · m se aplica al tornillo. Si el coeficiente de fricción estática entre las almohadillas de freno A y B y la flecha circular es $\mu'_s = 0.5$, determine el momento de torsión máximo **M** que puede resistir el freno.



Prob. 8.75

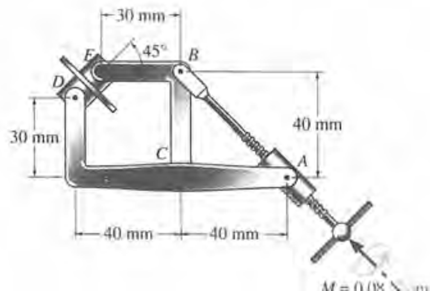
*** 8.76.** Un tensor semejante al que se muestra en la figura 8.20 se usa para tensar el miembro AB de la armadura. El coeficiente de fricción estática entre los tornillos de rosca cuadrada y el tensor es $\mu_s = 0.5$. Los tornillos tienen radio medio de 6 mm y paso de 3 mm. Si se aplica un momento de torsión (torque) de $M = 10$ N · m al tensor para acercar los tornillos, determine la fuerza en cada miembro de la armadura. No hay fuerzas externas aplicadas a la armadura.

8.77. Un tensor, semejante al que se ve en la figura 8.20, es utilizado para tensar el miembro AB de la armadura. El coeficiente de fricción estática entre los tornillos de rosca cuadrada y el tensor es $\mu_s = 0.5$. Los tornillos tiene radio medio de 6 mm y paso de 3 mm. Determine el momento de torsión M que debe aplicarse al tensor para acercar los tornillos entre sí de manera que se desarrolle una fuerza de compresión de 500 N en el miembro BC.



Probs. 8.76/8.77

8.78. El dispositivo que sirve de abrazadera consiste en un tornillo de rosca cuadrada que tiene coeficiente de fricción estática de $\mu_s = 0.3$, diámetro medio de 3 mm, y paso de 1 mm. Los cinco puntos indicados son articulaciones. Determine la fuerza de abrazadera en los bloques lisos D y E cuando se aplica un momento de torsión $M = 0.08$ N · m a la manija del tornillo.



Prob. 8.78

http://librosysolucionarios.net

* 8.5 Fuerzas de fricción en bandas planas

En el diseño de bandas motrices o frenos de banda es necesario determinar las fuerzas de fricción desarrolladas entre una banda y su superficie de contacto. En esta sección analizaremos las fuerzas de fricción que actúan en una banda plana, aunque el análisis de otros tipos de bandas, como la banda en "V", se basa en principios semejantes.

Aquí se considerará la banda plana mostrada en la figura 8.21*a*, que pasa por encima de una superficie curva fija, de manera tal que el ángulo total del contacto entre banda y superficie es β y el coeficiente de fricción entre las dos superficies es μ. Se determinará la tensión T_2 en la banda que se necesita para tirar la banda por sobre la superficie en sentido contrario al de las manecillas de un reloj superando así las fuerzas de fricción en la superficie de contacto y la tensión conocida T_1. Obviamente, $T_2 > T_1$.

Análisis de fricción. En la figura 8.21*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento de banda en contacto con la superficie. Aquí la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción **F**, que actúa en puntos diferentes a lo largo de la banda, variarán en magnitud y en dirección. Debido a esta distribución *desconocida* de fuerzas, el análisis del problema procederá sobre la base del estudio inicial de las fuerzas que actúan en un elemento diferencial de la banda.

En la figura 8.21*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre de un elemento de longitud *ds*. Suponiendo movimiento inminente o movimiento de la banda, la magnitud de la fuerza de fricción es $dF = \mu dN$. Esta fuerza se opone al movimiento deslizante de la banda y, por tanto, aumenta la magnitud de la fuerza de tensión que actúa en la banda en dT. Aplicando las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas, tenemos

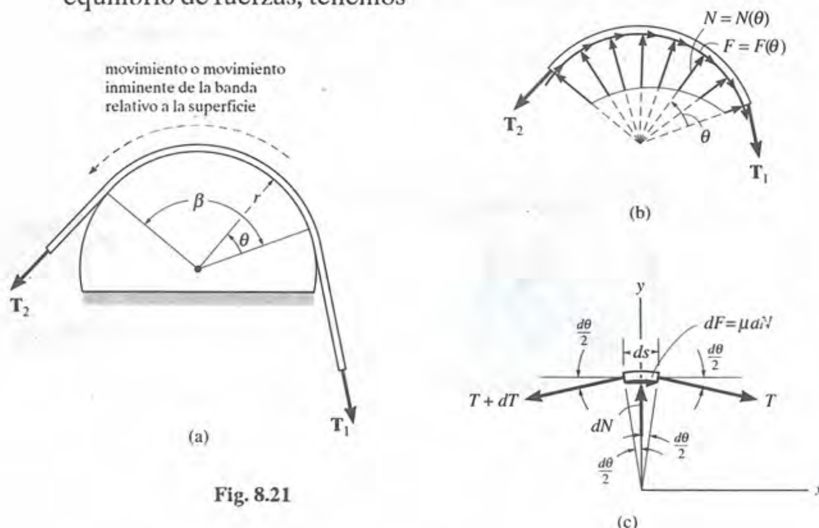
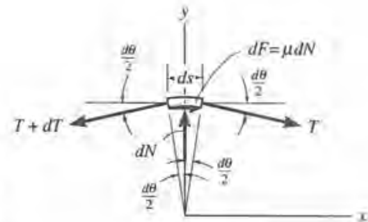


Fig. 8.21

http://librosysolucionarios.net

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad T\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \mu\, dN - (T + dT)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad dN - (T + dT)\,\text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T\,\text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$



(c)

Como $d\theta$ es de un *tamaño infinitesimal,* sen($d\theta/2$) y cos($d\theta/2$) pueden sustituirse por $d\theta/2$ y 1, respectivamente. También puede despreciarse el *producto* de dos infinitesimales dT y $d\theta/2$ al compararlos con infinitesimales de primer orden. Por consiguiente, las dos ecuaciones anteriores se reducen a

$$\mu\, dN = dT$$

y

$$dN = T\, d\theta$$

La eliminación de dN entre estas dos relaciones da por resultado

$$\frac{dT}{T} = \mu\, d\theta$$

La integración de esta ecuación sobre todos los puntos de contacto que tiene la banda con el tambor, teniendo en cuenta que $T = T_1$ en $\theta = 0$, y $T = T_2$ en $\theta = \beta$, se llega a

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\beta} d\theta \qquad \text{o} \qquad \text{In}\,\frac{T_2}{T_1} = \mu\beta$$

Si despejamos T_2, obtenemos

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \tag{8.6}$$

donde T_2, T_1 = tensiones en la banda; $\mathbf{T}_1$ se opone a la dirección del movimiento (o al movimiento inminente) de la banda, mientras que $\mathbf{T}_2$ actúa en la dirección del movimiento de la banda (o del movimiento inminente), debido a la fricción $T_2 > T_1$.

μ = coeficiente de fricción estática o cinética entre la banda y la superficie de contacto

β = ángulo correspondiente a la superficie de contacto entre la banda y su apoyo, en radianes

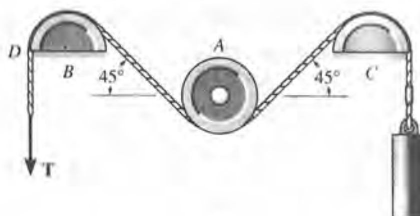
e = 2.718..., base de los logaritmos naturales

Note que la ecuación 8.6 es *independiente* del *radio* del tambor y en vez de ello depende del ángulo de contacto de la banda a la superficie β. Además, como se indica en la integración, esta ecuación es válida para bandas planas *cualquiera* que sea la *forma* de la superficie de contacto. Para su aplicación, tenga en mente, sin embargo, que la ecuación 8.6 es válida únicamente cuando ocurre *movimiento inminente*.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.9

La tensión máxima que puede desarrollarse en la banda de la figura 8.22*a* es de 500 N. Si la polea en *A* está libre para girar y el coeficiente de fricción estática en los tambores fijos *B* y *C* es $\mu_s = 0.25$, determine la mayor masa del cilindro que puede levantarse mediante la banda. Suponga que la fuerza **T** aplicada al extremo de la banda está dirigida verticalmente hacia abajo, como se muestra.



(a)

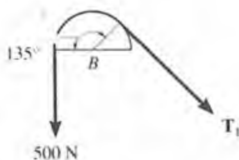
SOLUCIÓN

Si se levanta el cilindro que tiene un peso $W = mg$, la banda se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre los tambores en *B* y *C*; por tanto, la tensión máxima T_2 en la banda ocurre en *D*. Así, $T_2 = 500$ N. En la figura 8.22*b*, se muestra una sección de la banda que pasa sobre el tambor en *B*. Como $180° = \pi$ rad, el ángulo de contacto entre el tambor y la banda es $\beta = (135°/180°)\pi = 3\pi/4$ rad. Usando la ecuación 8.6, tenemos

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}; \qquad 500 \text{ N} = T_1 e^{0.25[(3/4)\pi]}$$

Por tanto,

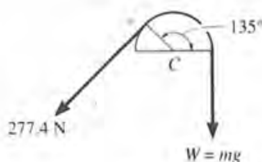
$$T_1 = \frac{500 \text{ N}}{e^{0.25[(3/4)\pi]}} = \frac{500}{1.80} = 277.4 \text{ N}$$



(b)

Como la polea *A* gira libremente, el equilibrio requiere que la tensión en la banda se mantenga *igual* en ambos lados de la polea.

En la figura 8.22*c* se muestra la sección de la banda que pasa sobre el tambor en *C*. La carga $W < 277.4$ N. ¿Por qué? Aplicando la ecuación 8.6, obtenemos



(c)

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}; \qquad 277.4 = W e^{0.25[3/4)\pi]}$$
$$W = 153.9 \text{ N}$$

Así que

$$m = \frac{W}{g} = \frac{153.9}{9.81}$$
$$= 15.7 \text{ kg} \qquad \textit{Resp.}$$

Fig. 8.22

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

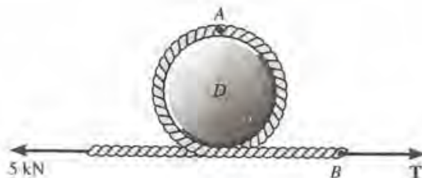
8.79. Determine la variación de la fuerza normal en la figura 8.21*b* como función de θ.

*** 8.80.** Para asegurar un barco en puerto, se enrrolla la guindaleza sobre el cabrestante. Si la tensión en la cuerda, causada por el barco, es 1500 lb, determine el menor número posible de vueltas de la cuerda alrededor del cabrestante para evitar que resbale. La máxima fuerza horizontal que un estibador puede ejercer en la cuerda es 50 lb. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$.



Prob. 8.80

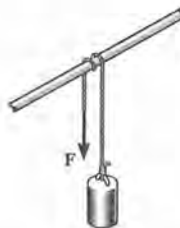
8.81. Determine la tensión *mínima* en la cuerda en los puntos A y B que es necesaria para mantener el equilibrio de la cuerda. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el poste fijo D es $\mu_s = 0.3$. La cuerda sólo da una vuelta alrededor del poste.



Prob. 8.81

8.82. Se sostiene un cilindro de masa 250 kg mediante la cuerda enrollada sobre el tubo. Determine la fuerza vertical mínima **F** requerida para soportar el peso si la cuerda pasa (*a*) una vez por encima del tubo, $\beta = 180°$, y (*b*) dos veces por encima del tubo, $\beta = 540°$. Considere que $\mu_s = 0.2$

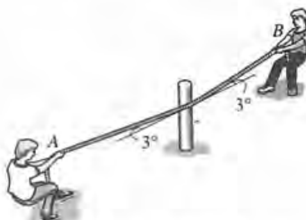
8.83. Se sostiene un cilindro de masa 250 kg mediante la cuerda enrollada sobre el tubo. Determine la fuerza vertical máxima **F** que se puede aplicar a la cuerda sin mover el cilindro. La cuerda pasa (*a*) una vez por encima del tubo, $\beta = 180°$, y (*b*) dos veces por encima del tubo, $\beta = 540°$. Considere que $\mu_s = 0.2$.



Probs. 8.82/8.83

*** 8.84.** Dos chicos compiten en tirar la cuerda de sus extremos. En el curso del juego, la cuerda pega con el poste y se desvía de la recta en 3° a cada lado. Si el chico A pesa 60 lb y el chico B pesa 50 lb, determine si es posible que uno de ellos desplace la cuerda hacia él. El coeficiente de fricción estática entre las suelas de los zapatos de los chicos y el suelo es $\mu'_s = 0.4$.

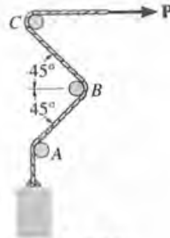
8.85. Dos chicos compiten en tirar la cuerda de sus extremos. En el curso del juego, la cuerda pega con el poste y se desvía de la recta en 3° a cada lado. Si el chico A pesa 60 lb y el chico B pesa 50 lb, determine si es posible que uno de ellos desplace la cuerda hacia él. El coeficiente de fricción estática entre las suelas de A y el suelo es $\mu_A = 0.4$, mientras que para B es $\mu_B = 0.5$.



Probs. 8.84/8.85

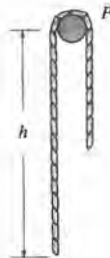
http://librosysolucionarios.net

8.86. La cuerda que sostiene el bloque de 6 kg pasa por tres clavijas A, B, y C, donde $\mu_s = 0.2$. Determine el intervalo de valores para la magnitud de la fuerza horizontal **P** para los cuales no se moverá el bloque en absoluto.



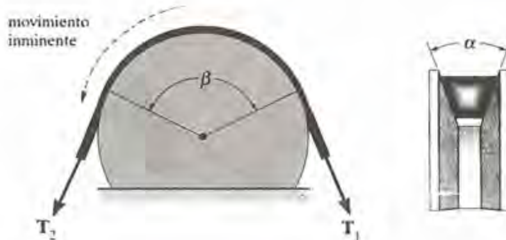
Prob. 8.86

8.87. Una cuerda que pesa 0.5 lb/ft y tiene longitud total de 10 ft se suspende de la clavija P. Si el coeficiente de fricción estática entre cuerda y clavija es $\mu_s = 0.5$, determine la longitud máxima h que puede tener un lado de la cuerda suspendida sin causar movimiento. Ignore el tamaño de la clavija y el peso del segmento de la cuerda en contacto con la clavija.



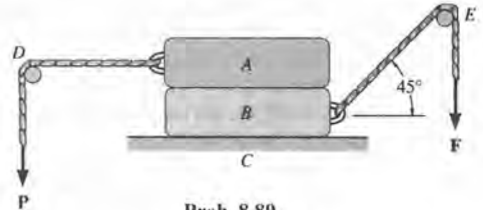
Prob. 8.87

***8.88.** Demuestre que la relación de fricción entre las tensiones del cable, el coeficiente de fricción μ y los contactos α angulares y β para la banda en V es $T_2 = T_1 e^{\mu\beta/\text{sen}(\alpha/2)}$.



Prob. 8.88

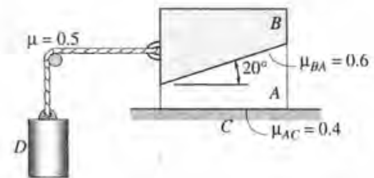
8.89. Los bloques A y B tienen masas de 100 kg y 150 kg, respectivamente. Si el coeficiente de fricción estática entre A y B y entre B y C es $\mu_s = 0.25$, y entre las cuerdas y las clavijas D y E, $\mu'_s = 0.5$, determine la mínima fuerza F requerida para causar movimiento del bloque B si $P = 30$ N.



Prob. 8.89

8.90. Los bloques A y B pesan 50 lb y 30 lb, respectivamente. Usando los coeficientes de fricción indicados, determine el peso máximo del bloque D sin que haya movimiento.

8.91. Los bloques A, B y D pesan 50, 30 y 12 lb, respectivamente. Usando los coeficientes de fricción indicados, determine la fuerza de fricción entre los bloques A y B y entre el bloque A y el piso C.



***8.92.** Los dos muchachos pueden soportar el peso del objeto cuando la cuerda está suspendida del tubo (una media vuelta). Si cada muchacho puede tirar con una fuerza de 125 lb, determine el peso del objeto. ¿Puede soportarlo uno de ellos cuando la cuerda pasa una y media veces alrededor del tubo? El coeficiente de fricción es $\mu_s = 0.3$.



Prob. 8.92

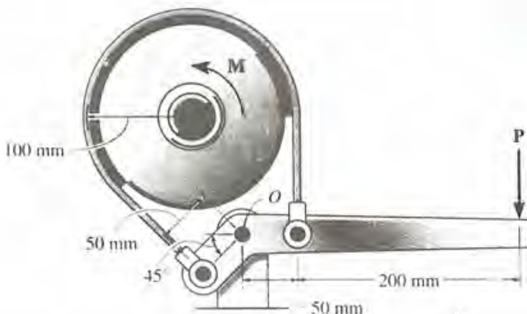
http://librosysolucionarios.net

8.93. Un muchacho que pesa 100 lb. trata de izarse a la rama de un árbol tirando el otro extremo de una cuerda a la cual está amarrado y que pasa por arriba de la rama en B. Si $\mu_s = 0.4$; determine la mínima fuerza que debe ejercer para izarse.



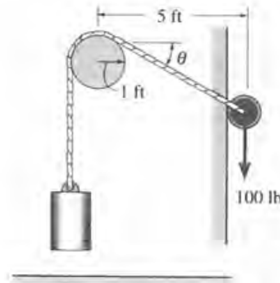
Prob. 8.93

8.94. Si se aplica un movimiento de torsión (torque) de $M = 150$ N · m al disco, determine la magnitud mínima de la fuerza vertical **P** que debe aplicarse al freno de mano para impedir la rotación del disco. El coeficiente de fricción estática entre la banda y el disco es de $\mu_s = 0.45$.



Prob. 8.94

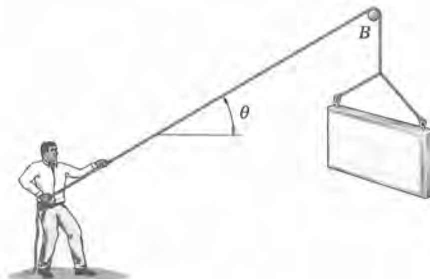
8.95. El bloque de 50 lb se ata a una cuerda que pasa sobre el tambor. Si el coeficiente de fricción estática en el tambor es $\mu_s = 0.3$, determine el ángulo θ de la cuerda si se aplica una carga vertical de 100 lb al rodillo. Cuando $\theta = 0°$, la tensión en la cuerda es cero, pues el tambor descansa sobre el piso.



Prob. 8.95

*__8.96.__ Determine la fuerza que debe ejercer el hombre en la cuerda para levantar el rótulo de 20 kg a velocidad constante. También, si el hombre tiene una masa de 70 kg, determine la fuerza de fricción que ejerce sobre el suelo. El coeficiente de fricción cinética entre la cuerda y la clavija en B es $\mu_B = 0.2$, y el coeficiente de fricción estática entre los zapatos del hombre y el suelo es $\mu = 0.5$. Considere que $\theta = 30°$.

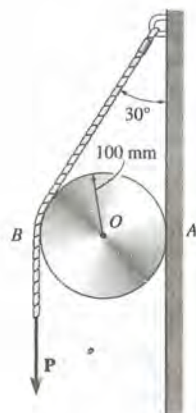
■**8.97.** Determine el ángulo θ máximo que el hombre puede dar a la cuerda sin resbalarse, sosteniendo el rótulo. El rótulo tiene masa de 50 kg, y el hombre de 70 kg. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la clavija fija en B es $\mu_B = 0.2$, y entre los zapatos del hombre y el suelo es de $\mu = 0.5$.



Probs. 8.96/8.97

http://librosysolucionarios.net

8.98. El cilindro pesa 10 lb y se mantiene en equilibrio por la banda y la pared. Si no resbala, determine la fuerza vertical mínima P que debe aplicarse a la banda para equilibrio. El coeficiente de fricción estática entre la banda y el cilindro es $\mu_B = 0.25$.



Prob. 8.98

* 8.6. Fuerzas de fricción en apoyos de collarín, apoyos de pivote y discos

Los apoyos de pivote y de collarín se usan comúnmente para soportar la *carga axial* de una flecha giratoria. Estos dos tipos de apoyo se muestran en la figura 8.23. A condición de que los apoyos no estén lubricados, o sólo estén parcialmente lubricados, pueden aplicarse las leyes de fricción en seco al determinar el momento **M** necesario para hacer girar la flecha cuando ésta soporta una fuerza axial **P**.

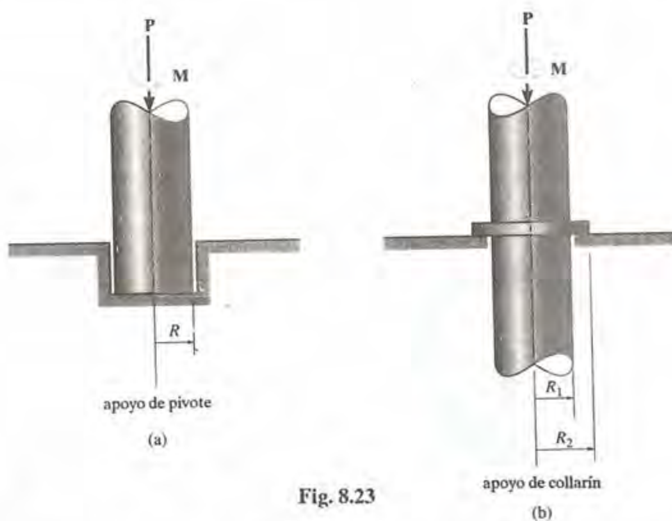


Fig. 8.23

Análisis de fricción. El apoyo de collarín de la flecha que se muestra en la figura 8.24 está sometido a una fuerza axial **P** y tiene un área total de apoyo o área de contacto $\pi\,(R_2^2 - R_1^2)$. En el análisis siguiente se considera que la presión p está *uniformemen-*

http://librosysolucionarios.net

te distribuida sobre esta área —una hipótesis razonable, a condición de que el apoyo sea nuevo y esté uniformemente apoyado—. Como $\Sigma F_z = 0$, p, medida como una fuerza por unidad de área, es $p = \dfrac{P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$

El momento M, necesario para producir el estado de rotación inminente de la flecha, puede determinarse a partir del equilibrio de momentos de las fuerzas de fricción $d\mathbf{F}$ desarrolladas en la superficie de apoyo aplicando $\Sigma M_z = 0$. Una pequeña área elemental $dA = (r\,d\theta)(dr)$, indicada en la figura 8.24, está sujeta a la acción de una fuerza normal $dN = p\,dA$ y una fuerza de fricción asociada,

$$dF = \mu_s\,dN = \mu_s p\,dA = \frac{\mu_s P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\,dA$$

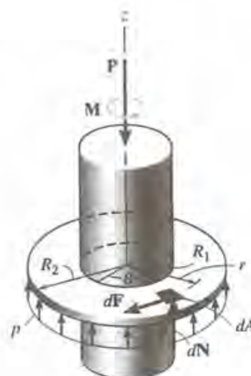


Fig. 8.24

La fuerza normal no produce momento en torno al eje z de la flecha; sin embargo, la fuerza de fricción sí lo produce, a saber, $dM = r\,dF$. Se necesita efectuar una integración para calcular el momento total producido por todas las fuerzas de fricción que actúan sobre las áreas diferenciales dA. Por consiguiente, para el movimiento de rotación inminente,

$$\Sigma M_z = 0; \qquad M - \int_A r\,dF = 0$$

Si sustituimos dF y dA e integramos sobre toda el área de apoyo tendremos

$$M = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} r\left[\frac{\mu_s P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\right](r\,d\theta\,dr) = \frac{\mu_s P}{\pi(R_2^2 - R_2^2)}\int_{R_1}^{R_2} r^2\,dr\int_0^{2}\pi\,d\theta$$

o

$$M = \tfrac{2}{3}\mu_s P\left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}\right) \qquad (8.7)$$

Esta ecuación da la magnitud del momento M necesario para la rotación inminente de la flecha. El momento de fricción desarrollado en el extremo de la flecha cuando está *girando* con rapidez constante, puede encontrarse sustituyendo μ_k por μ_s en la ecuación 8.7.

Cuando $R_2 = R = R_1$, como en el caso de un apoyo de pivote, figura 8.23*a*, la ecuación 8.7 se reduce a

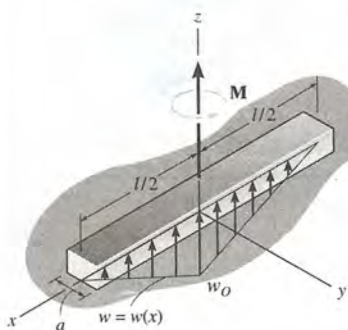
$$M = \tfrac{2}{3}\mu_s PR \qquad (8.8)$$

Recordemos que según la hipótesis inicial, ambas ecuaciones 8.7 y 8.8 se aplican solamente para superficies de apoyo sujetas a una *presión constante.* Si la presión no es uniforme, debe determinarse una variación de la presión como una función del área de apoyo, antes de integrar para obtener el momento. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.

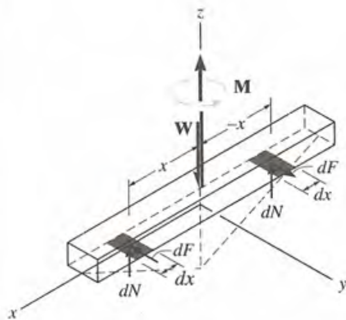
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.10

La barra uniforme mostrada en la figura 8.25*a* tiene una masa total *m*. Si se supone que la presión normal que actúa en la superficie de contacto varía linealmente a lo largo de la longitud de la barra, como se muestra, determine el par **M** necesario para hacer girar la barra. Suponga que el ancho *a* de la barra es despreciable en comparación con su longitud *l*. El coeficiente de fricción es igual a μ.



(a)



(b)

Fig. 8.25

SOLUCIÓN

En la figura 8.25*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre de la barra. Como la barra tiene un peso total de $W = mg$, la intensidad w_O de la carga distribuida en el centro ($x = 0$) se determina a partir del equilibrio de fuerzas verticales, figura 8.25*a*.

$$+\uparrow \Sigma F_z = 0; \qquad -mg + 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)w_O\right] = 0 \qquad w_O = \frac{2mg}{l}$$

Como $w = 0$ en $x = l/2$, la carga distribuida expresada como una función de x es

$$w = w_o\left(1 - \frac{2x}{l}\right) = \frac{2mg}{l}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)$$

La magnitud de la fuerza normal que actúa sobre un segmento de área que tiene la longitud dx es, por consiguiente,

$$dN = w\,dx = \frac{2mg}{l}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)dx$$

La magnitud de la fuerza de fricción que actúa en el mismo elemento de área es

$$dF = \mu\,dN = \frac{2\mu mg}{l}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)dx$$

Por tanto, el momento producido por esta fuerza en torno al eje z es

$$dM = x\,dF = \frac{2\mu mg}{l}x\left(1 - \frac{2x}{l}\right)dx$$

La suma de los momentos en torno al eje z de la barra se determina por integración, lo que da por resultado

$$\Sigma M_z = 0; \qquad M - 2\int_0^{l/2}\frac{2\mu mg}{l}x\left(1 - \frac{2x}{l}\right)dx = 0$$

$$M = \frac{4\mu mg}{l}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3l}\right)\Bigg|_0^{l/2}$$

$$m = \frac{\mu mgl}{6} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

* 8.7 Fuerzas de fricción en chumaceras

Cuando una flecha o un eje se sujeta a la acción de cargas laterales, comúnmente se usa una *chumacera* para apoyarla. Las chumaceras bien lubricadas se someten a las leyes de la mecánica de fluidos, en la cual, para determinar la resistencia friccionante de la chumacera se necesita conocer la viscosidad del lubricante, la rapidez de la rotación y el tamaño del claro entre la flecha y la chumacera. Sin embargo, cuando la chumacera no está lubricada o sólo está parcialmente lubricada, un análisis razonable de la resistencia de fricción puede basarse en las leyes de la fricción en seco.

Análisis de fricción. En la figura 8.26a se indica un apoyo típico de chumacera. Cuando la flecha gira en el sentido mostrado en la figura, se recarga contra la pared de la chumacera en algún punto A, donde ocurre el deslizamiento. Si la carga lateral que actúa en el extremo de la flecha es **W**, es necesario que la fuerza reactiva de la chumacera, **R**, que actúa en A sea igual y opuesta a **W**, figura 8.26b. El momento M necesario para mantener la rotación de la flecha puede encontrarse sumando momentos en torno al eje z de la flecha; es decir,

$$\Sigma M_z = 0; \qquad -M + (R \text{ sen } \Phi_k) r = 0$$

o

$$M = Rr \text{ sen } \Phi_k \tag{8.9}$$

donde Φ_k es el ángulo de fricción estática definido por tan $\Phi_k = F/N = \mu_k N/N = \mu_k$. En la figura 8.26c, se ve que $r \text{ sen } \Phi_k = r_f$. El círculo trazado con línea segmentada con radio r_f se llama *círculo de fricción,* y cuando la flecha gira, la reacción **R** siempre será tangente a él. Si la chumacera está parcialmente lubricada, μ_k es pequeño y, por consiguiente, $\mu_k = \tan \Phi_k \approx \text{sen } \Phi_k \approx \Phi_k$. Bajo estas condiciones, una *aproximación* razonable del momento necesario para vencer la resistencia de fricción viene a ser

$$M \approx Rr\mu_k \tag{8.10}$$

El ejemplo siguiente ilustra una aplicación común de este análisis.

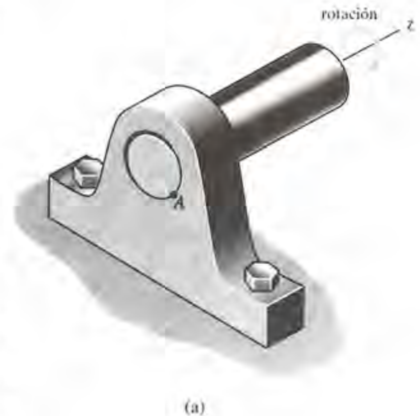
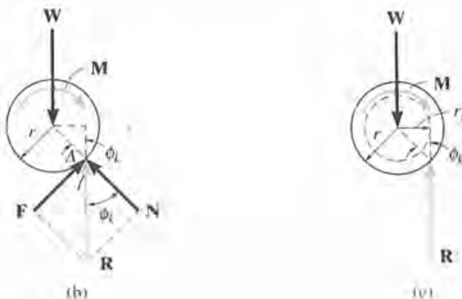


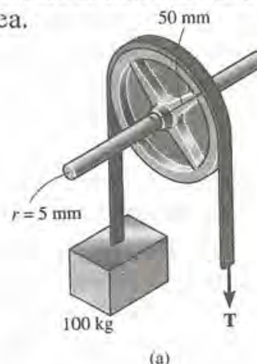
Fig. 8.26



http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 8.11

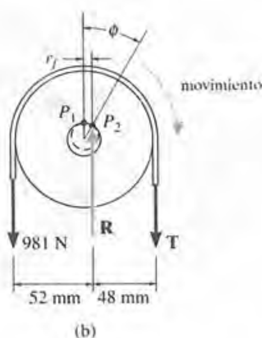
La polea de 100 mm de diámetro mostrada en la figura 8.27a se adapta holgadamente a una flecha de 10 mm de diámetro para la cual el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$. Determine la tensión mínima T en la banda necesaria para: (a) levantar el bloque de 100 kg, y (b) bajar el bloque . Suponga que no hay deslizamiento entre la banda y la polea y desprecie el peso de la polea.



(a)

SOLUCIÓN

Parte (a). En la figura 8.27*b* se indica un diagrama de cuerpo libre de la polea. Cuando la polea está sujeta a las tensiones del cable de 981 N cada una, la polea hace contacto con la flecha en el punto P_1. Cuando se incremente la tensión **T**, la polea rodará alrededor de la flecha hasta el punto P_2 antes que el movimiento sea inminente. Según la figura, el círculo de fricción tiene un radio $r_f = r \operatorname{sen} \Phi$. Usando la simplificación $\operatorname{sen}\Phi \approx \Phi$, $r_f \approx r\mu_s$ = (5 mm)(0.4) = 2 mm, de modo que sumando momentos con respecto a P_2

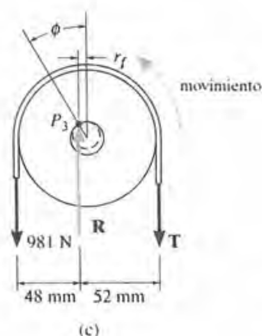


(b)

$$\circlearrowright +\Sigma M_{P_2} = 0; \qquad 981\text{ N}(52\text{ mm}) - T(48\text{ mm}) = 0$$
$$T = 1063\text{ N} = 1.06\ kN \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Si se usa un análisis de mayor exactitud, entonces $\Phi = \tan^{-1} 0.4 = 21.8°$. Así, el radio del círculo de fricción sería $r_f = r \operatorname{sen} \Phi = 5 \operatorname{sen} 21.8° = 1.86$ mm. Por tanto,

$$\circlearrowright +\Sigma M_{P_2} = 0;$$
$$981\text{ N}(50\text{ mm} + 1.86\text{ mm}) - T(50\text{ mm} - 1.86\text{ mm}) = 0$$
$$T = 1057\text{ N} = 1.06\text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



(c)

Fig. 8.27

Parte (b). Cuando se baja el bloque, la fuerza resultante **R** que actúa sobre la flecha pasa por el punto P_3, como se muestra en la figura 8.27*c*. La suma de momentos en torno a este punto da por resultado

$$\circlearrowright +\Sigma M_{P_3} = 0; \qquad 981\text{ N}(48\text{ mm}) - T(52\text{ mm}) = 0$$
$$T = 906\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

* 8.8 Resistencia al rodamiento

Si un *cilindro rígido* de peso **W** rueda con velocidad constante sobre una superficie *rígida,* la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el cilindro actúa en el punto de contacto o de tangencia como se ve en la figura 8.28*a*. En estas condiciones, siempre que el cilindro no encuentre resistencia de fricción del aire, el movimiento continuará indefinidamente. Sin embargo, en realidad no hay materiales perfectamente rígidos y, por tanto, la reacción de la superficie sobre el cilindro consiste en una distribución de presión normal. Por ejemplo, considerando el cilindro hecho de un material muy duro y la superficie de rodamiento, de un material blando, se verá que el cilindro comprime la superficie subyacente como lo ilustra la figura 8.28*b*. Al rodar el cilindro, el material de la superficie por delante del cilindro *retrasa* el movimiento porque está siendo *deformado,* en tanto que el material por detrás se *restaura* a partir de la deformación y con ello tiende a *empujar* el cilindro hacia delante. Las presiones normales que actúan sobre el cilindro de esta manera se representan en la figura 8.28*b* por medio de sus resultantes normales $\mathbf{N}_d$ y $\mathbf{N}_r$. Desafortunadamente, la magnitud de la fuerza de *deformación* y su componente horizontal es siempre mayor que la de *restauración* y, en consecuencia, debe aplicarse una fuerza horizontal **P** que impulse al cilindro y lo mantenga en movimiento, figura 8.28*b*.*

La resistencia al rodamiento tiene como causa primordial este fenómeno, aunque también es causado en menor medida por la adhesión superficial y microdeslizamiento relativo entre las superficies en contacto. Como la fuerza real **P** requerida para superar estos efectos es difícil de determinar, se desarrollará aquí un método simplificado para explicar una manera en que los ingenieros han analizado este fenómeno. Con este propósito, se considera la resultante de la presión normal *total,* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_d + \mathbf{N}_r$, que actúa sobre el cilindro, figura 8.28*c*. Como se muestra en la figura 8.28*d*, esta fuerza actúa a un ángulo θ con la vertical. Para mantener el cilindro en equilibrio, es decir rodando a velocidad constante, es necesario que **N** sea *concurrente* con la fuerza motriz **P** y el peso **W**. Al efectuar la suma de momentos respecto al punto A se tiene $Wa = P(r \cos \theta)$. Ya que las deformaciones son generalmente muy pequeñas en relación con el radio del cilindro, $\cos \theta \approx 1$; luego,

$$Wa \approx Pr$$

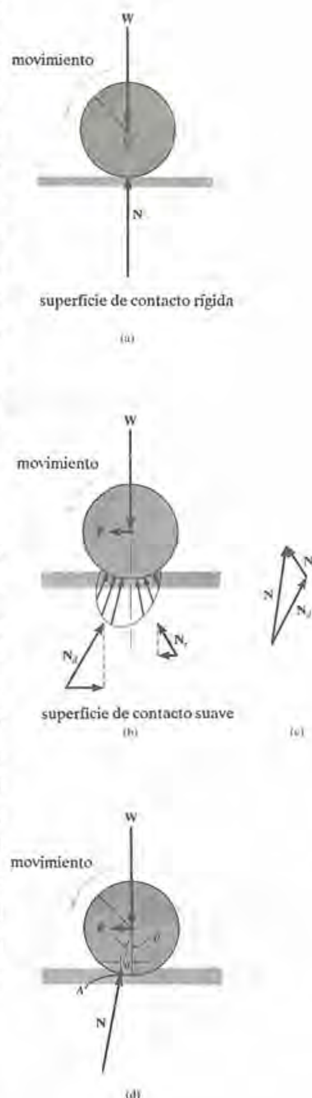


Fig. 8.28

* En realidad, la fuerza de deformación $\mathbf{N}_d$ causa que se almacene una cantidad de *energía* en el material al incrementar su magnitud, en tanto que la fuerza de restauración $\mathbf{N}_r$, al disminuir en magnitud, permite que se libere algo de esta energía. La energía restante *se pierde,* ya que se usa en el calentamiento de la superficie, y si el peso del cilindro es grande, causará la deformación permanente de la superficie. La fuerza horizontal **P** efectúa el trabajo que compensa la energía perdida.

http://librosysolucionarios.net

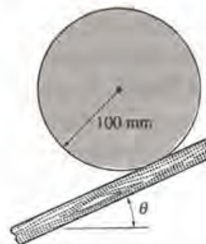
o

$$P \approx \frac{Wa}{r} \qquad (8.11)$$

La distancia a se llama *coeficiente de resistencia al rodamiento,* que tiene la longitud como dimensión. Por ejemplo, $a \approx 0.5$ mm para una rueda que gira sobre un riel, ambos de acero blando. Para baleros de acero duro que ruedan sobre acero, $a \approx 0.1$ mm. Sin embargo, este factor es difícil de medir experimentalmente, pues depende de parámetros como la velocidad angular del cilindro, las propiedades elásticas de las superficies de contacto y el acabado de las superficies. Por esta razón, no son muy confiables los datos que sirven para determinar a. El análisis que aquí presentamos explica, sin embargo, por qué un peso grande (W) ofrece mayor resistencia al movimiento (P) que un peso ligero en las mismas condiciones. Además, como la fuerza requerida para *rodar* el cilindro sobre la superficie será mucho menor que la necesaria para que *resbale* sobre la superficie, el análisis indica por qué se usan baleros o rodillos para minimizar la resistencia de fricción entre partes móviles.

Ejemplo 8.12

Una rueda de acero de 10 kg y radio 100 mm que descansa sobre un plano inclinado hecho de madera se muestra en la figura 8.29a. Si θ se incrementa de modo que la rueda empieza a rodar por el plano inclinado con velocidad constante en el instante en que $\theta = 1.2°$, determine el coeficiente de resistencia al rodamiento.



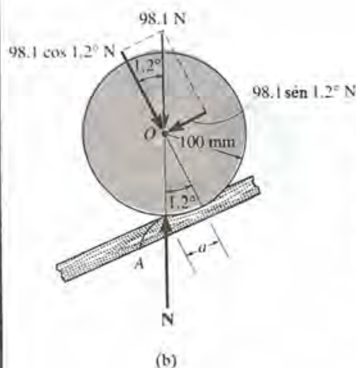


Fig. 8.29

SOLUCIÓN

Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 8.29b, cuando la rueda está en movimiento inminente, la reacción normal **N** actúa en un punto definido por la dimensión a. Resolviendo el peso en componentes paralela y perpendicular a la rampa, y sumando momentos alrededor de A, se obtendrá (aproximadamente)

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \qquad 98.1 \cos 1.2°(a) - 98.1 \text{ sen } 1.2°(100) = 0$$

Resolviendo, obtenemos

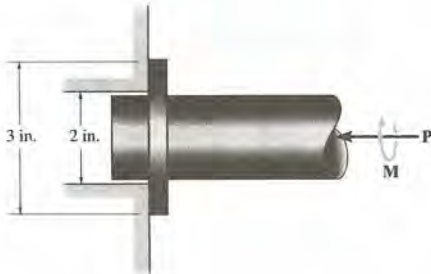
$$a = 2.1 \text{ mm}$$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

8.99. El cojinete de collarín soporta uniformemente una fuerza axial de $P = 500$ lb. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$, determine el momento de torsión (torque) **M** requerido para vencer la fricción.

*** 8.100.** El cojinete de collarín soporta uniformemente una fuerza axial de P = 500 lb. Si se aplica a la flecha un momento de torsión (torque) de M = 3 lb · ft y se causa la rotación de la flecha a velocidad angular constante, determine el coeficiente de fricción cinética en la superficie de contacto.



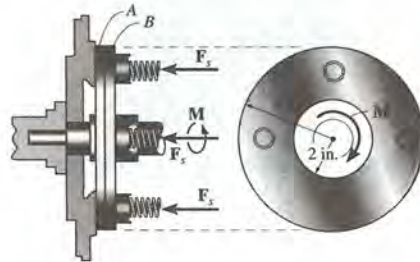
Probs. 8.99/8.100

8.101. El cojinete anular está sometido a un empuje de 800 lb. Si $\mu_s = 0.35$, determine el momento de torsión M que ha de aplicarse a la flecha para girarla.



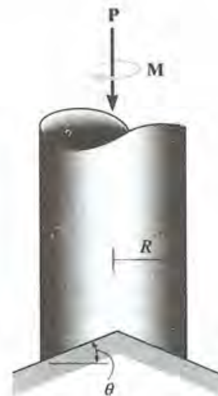
Prob. 8.101

8.102. El embrague de disco se usa en la transmisión estándar de los automóviles. Si se usan cuatro resortes para forzar la unión de los dos discos A y B, determine la fuerza requerida en cada resorte para transmitir un momento de $M = 600$ lb · ft a través de los discos. El coeficiente de fricción estática entre A y B es $\mu_s = 0.3$.



Prob. 8.102

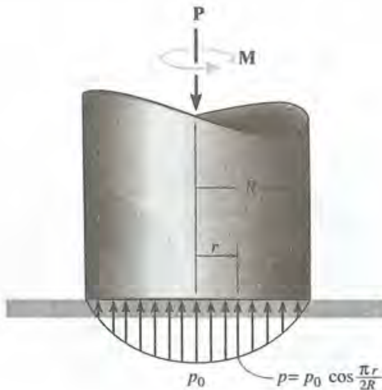
8.103. El cojinete cónico está sujeto a una distribución de presión constante en su superficie de contacto. Si el coeficiente de fricción estática es μ, determine el momento de torsión **M** requerido para girar la flecha, si soporta una fuerza axial **P**.



Prob. 8.103

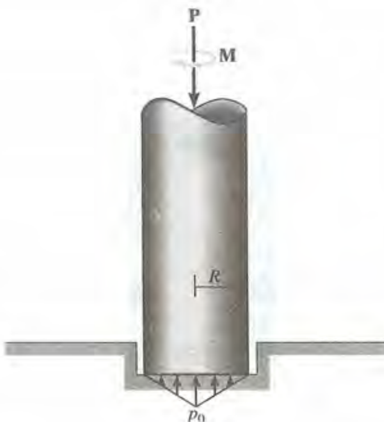
http://librosysolucionarios.net

***8.104**. El apoyo de pivote está sujeto a una distribución de presiones en su superficie de contacto que varía como se muestra. Si el coeficiente de fricción estática es μ, determine el momento de torsión **M** requerido para vencer la fricción si la flecha soporta una fuerza axial **P**.



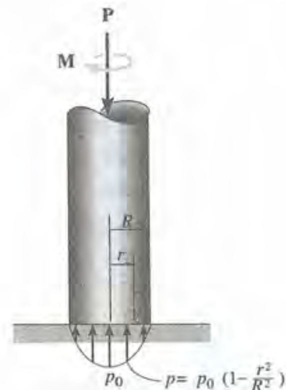
Prob. 8.104

8.105. Debido al desgaste en el borde, el apoyo de pivote está sujeto a una distribución cónica de presiones en la superficie de contacto. Determine el momento de torsión **M** requerido para vencer la fricción y girar la flecha que soporta una fuerza axial **P**. El coeficiente de fricción estática es μ. Para la solución, es necesario determinar la presión pico p_o en términos de P y del radio R del apoyo.



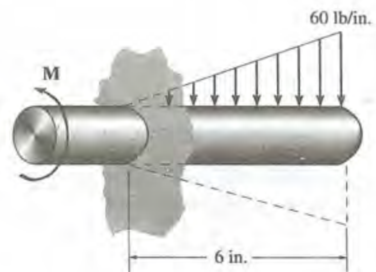
Prob. 8.105

8.106. El apoyo de pivote está sujeto a una distribución parábolica de presiones en su superficie de contacto. Si el coeficiente de fricción estática es μ, determine el momento de torsión requerido para superar la fricción y girar la flecha, si la fuerza axial soportada es **P**.



Prob. 8.106

8.107. La flecha de 4 in de diámetro se mantiene en el agujero, de modo que la presión normal que actúa alrededor de la flecha varía linealmente con la profundidad, como se indica. Determine el momento de torsión que se debe superar para rotar la flecha. Considere que $\mu_s = 0.2$.



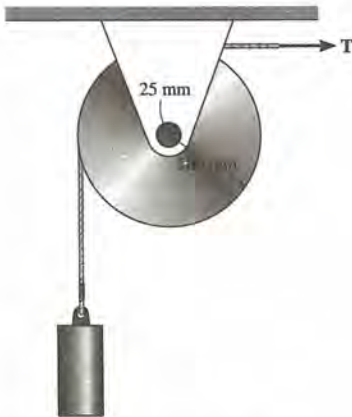
Prob. 8.107

http://librosysolucionarios.net

*** 8.108.** El eje de la polea de 200 mm de diámetro ajusta sin apretar en un orificio de 50 mm. Si el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.30$, determine la tensión mínima **T** requerida para elevar el peso de 40 kg a velocidad constante. Desprecie el peso de la polea y suponga que la cuerda no resbala.

8.110. La polea de 5 kg tiene 240 mm de diámetro y el eje tiene 40 mm de diámetro. Si el coeficiente de fricción cinética entre eje y polea es $\mu_k = 0.15$, determine la tensión **T** requerida en la cuerda para elevar el bloque de 80 kg.

8.111. Resuelva el problema 8.110 si la tensión **T** se aplica a la cuerda horizontalmente hacia la derecha.



Prob. 8.108



Probs. 8.110/8.111

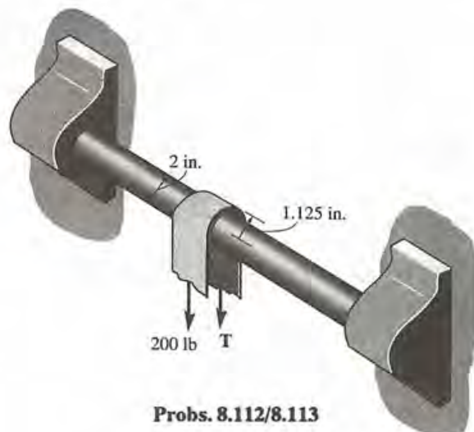
8.109. Una polea de diámetro 80 mm y masa 1.25 kg se apoya sin apretar sobre una flecha de diámetro 20 mm. Determine el momento de torsión que debe aplicarse a la polea para causar su rotación de velocidad angular constante. El coeficiente de fricción cinética entre flecha y polea es $\mu_k = 0.4$. Calcule también el ángulo θ que hace la fuerza normal en el punto de contacto respecto a la horizontal. La flecha misma no puede girar.

*** 8.112.** Determine la tensión **T** en la banda que se requiere para vencer la tensión de 200 lb creada al otro lado. También, ¿cuáles son las componentes normal y de fricción de la fuerza desarrollada en el casquillo? El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.21$.

8.113. Si una fuerza de tensión $T = 215$ lb se requiere para tirar de la fuerza de 200 lb alrededor del casquillo, determine el coeficiente de fricción estática en la superficie de contacto.



Prob. 8.109

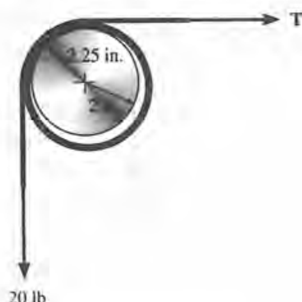


Probs. 8.112/8.113

http://librosysolucionarios.net

8.114. El collar rodea *holgadamente* a la flecha fija que tiene radio 2 in. Si el coeficiente de fricción cinética entre la flecha y el collar es $\mu_k = 0.3$, determine la tensión **T** en el segmento horizontal de la banda, de modo que el collar gire en el sentido contrario a las manecillas de un reloj con velocidad angular constante. Suponga que la banda no resbala sobre el collar; sino que, el collar resbala sobre la flecha. Desprecie el peso y el espesor de banda y collar. El radio, medido desde el centro del collar hasta el punto medio del grueso de la banda, es 2.25 in.

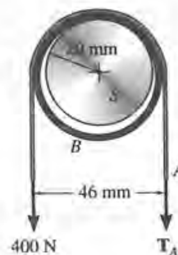
8.115. El collar rodea *holgadamente* una flecha fija que tiene radio 2 in. Si el coeficiente de fricción cinética entre la flecha y el collar es $\mu_k = 0.3$, determine la tensión **T** en el segmento horizontal de la banda, de modo que el collar gire en el sentido de las manecillas de un reloj con velocidad angular constante. Suponga que la banda no resbala sobre el collar; más bien, el collar; sino que sobre la flecha. Desprecie el peso y espesor de la banda y del collar. El radio, medido desde el centro del collar hasta el punto medio del espesor de la banda, es 2.25 in.



Probs. 8.114/8.115

* **8.116.** El casquillo *B* ajusta sin apretar sobre la flecha fija *S*, que tiene 20 mm de radio. Determine la fuerza más pequeña $\mathbf{T}_A$ requerida para tirar de la banda hacia abajo en *A*. Determine también las componentes normal y de fricción de la fuerza desarrollada en el casquillo si $\mu_s = 0.3$ entre el casquillo, y la flecha. La banda no resbala sobre el casquillo; pero el casquillo sí resbala sobre la flecha.

8.117. Si la fuerza de tensión mínima $T_A = 500$ N se requiere para iniciar a tirar de la banda hacia abajo por encima de la flecha *S*, determine el coeficiente de fricción estática entre el casquillo *B*, sin apretar, y la flecha. La banda no resbala sobre el casquillo sino que éste resbala sobre la flecha.



Probs. 8.116/8.117

8.118. Un disco de diámetro exterior de 120 mm se adapta holgadamente a una flecha fija de 30 mm de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática entre el disco y la flecha es $\mu_s = 0.15$ y el disco tiene una masa de 50 kg, determine la menor fuerza vertical **F** que, si actúa en la orilla del disco, causará el deslizamiento del mismo sobre la flecha.



Prob. 8.118

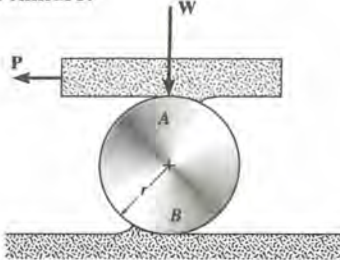
8.119. Se ha encontrado experimentalmente que un cilindro de diámetro 150 mm rueda con velocidad constante hacia abajo de un plano inclinado que tiene pendiente 18 mm/m. Determine el coeficiente de resistencia al rodamiento para el cilindro.

* **8.120.** Un vagón de ferrocarril tiene una masa de 30 Mg y se apoya en ocho ruedas, cada una de diámetro de 500 mm. Si el coeficiente de resistencia al rodamiento entre los rieles y cada rueda es 0.4 mm, determine la magnitud de la fuerza horizontal **P** requerida para vencer la resistencia al rodamiento de las ruedas.

8.121. Un carro con ocho ruedas es usado para soportar una carga de grúa de $F = 1.25(10^6)$ lb. Determine la fuerza horizontal **P** que debe aplicarse al carro para vencer la resistencia al rodamiento. El coeficiente de resistencia al rodamiento es 0.007 in y cada rueda tiene 36 in de diámetro.

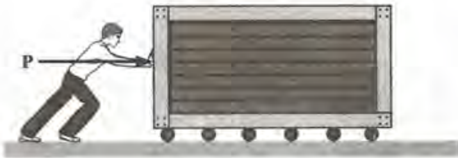
http://librosysolucionarios.net

8.122. El cilindro está sujeto a una carga que tiene un peso W. Si los coeficientes de resistencia al rodamiento para las superficies superior e inferior son a_A y a_B respectivamente, demuestre que se requiere una fuerza con magnitud $P = [W(a_A + a_B)]/2r$ para mover la carga y rodar el cilindro hacia delante. Desprecie el peso del cilindro.



Prob. 8.122

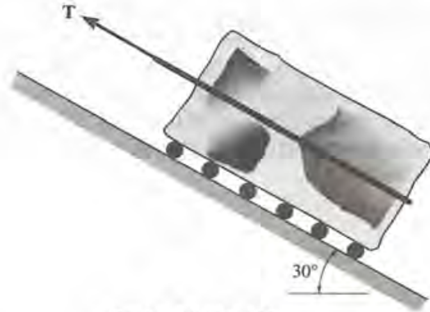
8.123. Una gran caja que pesa 200 kg se mueve por el piso mediante una serie de rodillos de 150 mm, para los cuales el coeficiente de resistencia al rodamiento es 3 mm en el suelo y 7 mm en la superficie de la base de la caja. Determine la fuerza horizontal **P** requerida para empujar la caja a velocidad constante. *Sugerencia:* use el resultado del problema 8.122.



Prob. 8.123

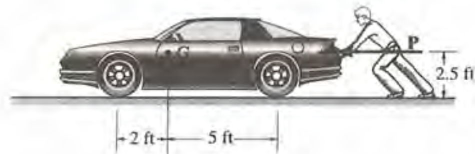
*** 8.124.** Una piedra de gran tamaño con masa de 500 kg se mueve por la rampa usando una serie de rodillos de 150 mm de diámetro para los cuales el coeficiente de resistencia al rodamiento es 3 mm en el suelo y 4 mm en la superficie de la parte inferior de la piedra. Determine la magnitud de la fuerza **T** requerida para izar la piedra hacia arriba del plano a velocidad constante. *Sugerencia*: usar el resultado del problema 8.122.

8.125. Una piedra de gran tamaño que tiene una masa de 500 kg se mueve a lo largo de la rampa mediante una serie de rodillos de 150 mm de diámetro, para los cuales el coeficiente de resistencia al rodamiento es 3 mm en el suelo y 4 mm en la superficie inferior de la piedra. Determine la magnitud de la fuerza **T** que se necesita para que la piedra descienda por la rampa a velocidad constante. *Sugerencia*: use el resultado del problema 8.122.



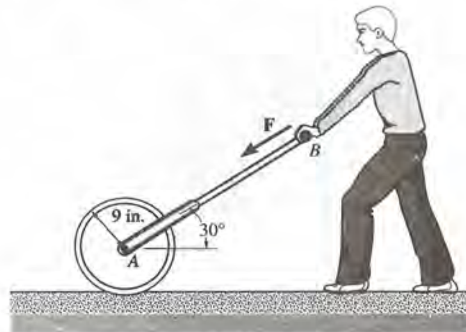
Probs. 8.124/8.125

8.126. El automóvil tiene un peso de 2600 lb y centro de gravedad en G. Determine la fuerza horizontal **P** que debe aplicarse para vencer la resistencia al rodamiento de las ruedas. El coeficiente de resistencia al rodamiento es 0.5 in. Las llantas tienen un diámetro de 2.75 ft.



Prob. 8.126

8.127. El rodillo para pasto tiene un peso de 300 lb. Si la barra BA se mantiene a un ángulo de 30° respecto a la horizontal y el coeficiente de resistencia al rodamiento para el rodillo es 2 in, determine la fuerza **F** requerida para empujar el rodillo a velocidad constante. Desprecie la fricción desarrollada en el eje y suponga que la fuerza resultante que actúa en la manija se aplica a lo largo de BA.

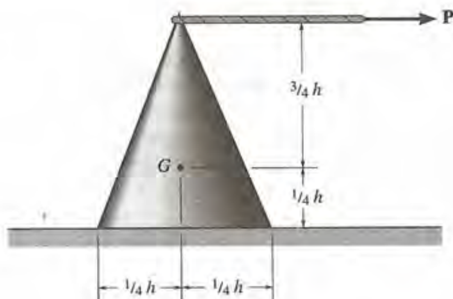


Prob. 8.127

http://librosysolucionarios.net

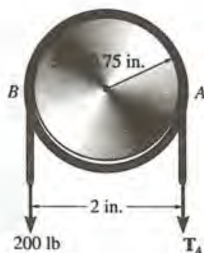
PROBLEMAS DE REPASO

*8.128. El cono tiene un peso de W y centro de gravedad en G. Si una fuerza horizontal se aplica gradualmente al cordel atado al vértice del cono, determine el coeficiente de fricción estática máximo posible con deslizamiento.



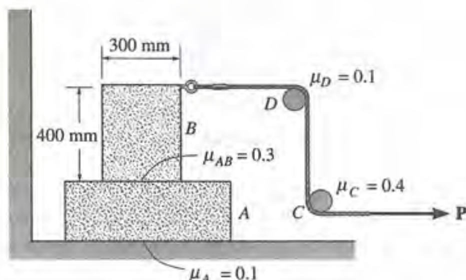
Prob. 8.128

8.129. Si la mínima fuerza de tensión T_A = 300 lb es la requerida para tirar la banda en A hacia abajo con velocidad constante y por encima de la flecha S, determine el coeficiente de fricción cinética entre el casquillo, holgadamente adaptado a la flecha, y la flecha. La banda no resbala sobre el casquillo pero el casquillo resbala sobre la flecha.



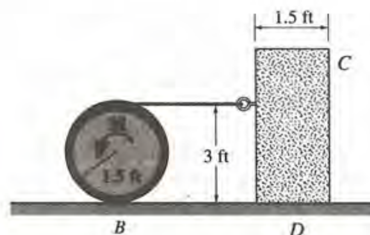
Prob. 8.129

8.130. Los bloques A y B tienen masas respectivas de 7 y 10 kg. Usando los coeficientes de fricción estática indicados, determine la mayor fuerza **P** que se puede aplicar a la cuerda sin causar movimiento.



Prob. 8.130

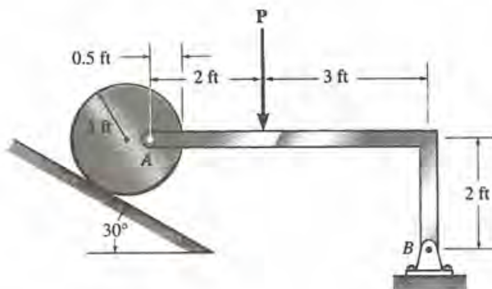
8.131. La rueda pesa 20 lb y descansa sobre una superficie para la cual μ_B = 0.2. Una cuerda enrollada sobre la rueda se ha atado al bloque homogéneo de 30 lb para el cual μ_D = 0.3. Determine el mínimo momento de par que se puede aplicar a la rueda y que causará movimiento inminente.



Prob. 8.131

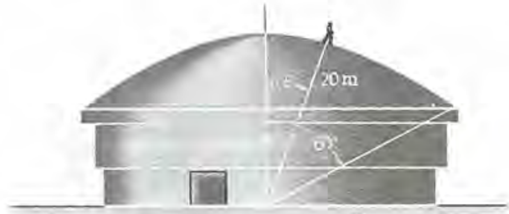
http://librosysolucionarios.net

*8.132. Un disco de 100 lb descansa sobre un plano inclinado para el que $\mu_s = 0.2$. Determine la máxima fuerza vertical **P** que se puede aplicar al eslabón AB sin causar el deslizamiento del disco.



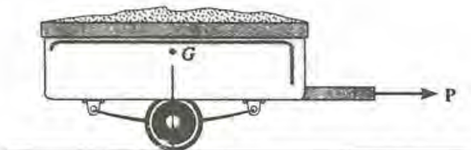
Prob. 8.132

8.134. Un techador, que tiene masa de 70 kg, camina con lentitud y erguido sobre la superficie de un domo que tiene radio de curvatura de $r = 20$ m. Si el coeficiente de fricción estática entre sus zapatos y la cúpula es $\mu = 0.7$, determine el ángulo θ en el cual empezará a resbalar.



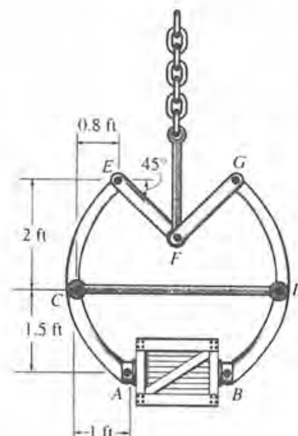
Prob. 8.134

8.133. El remolque tiene un peso total de 850 lb y centro de gravedad en G, que se sitúa directamente arriba del eje. Si el eje tiene un diámetro de 1 in, el radio de la rueda es $r = 1.5$ ft, y el coeficiente de fricción cinética en el collarín es $\mu_k = 0.08$, determine la fuerza horizontal que se necesita para tirar del remolque.



Prob. 8.133

8.135. El gancho simétrico es utilizado para elevar bultos, mediante la fricción desarrollada entre las zapatas A y B y un bulto. Determine el mínimo coeficiente de fricción estática en las zapatas, de modo que el bulto de peso W pueda ser izado.



Prob. 8.135

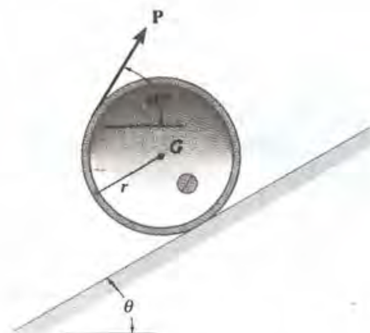
http://librosysolucionarios.net

* **8.136.** La espiga ahusada de ángulo θ es utilizada en un taladro. Si la presión de contacto entre el casquillo B y la espiga es uniforme y el coeficiente de fricción estática es μ, determine el momento de torsión **M** que se necesita para superar la fricción, si la espiga está sometida a una fuerza axial **P**.

■ **8.137.** El tambor vacío tiene peso de W y centro de gravedad en G. Si el coeficiente de fricción estática entre el tambor y el plano inclinado es $\mu_s = 0.4$, determine el máximo ángulo θ posible del plano que no causa el deslizamiento del tambor.



Prob. 8.136



Prob. 8.137

http://librosysolucionarios.net

9 Centro de gravedad y centroide

En este capítulo expondremos el método que se usa para determinar la localización del centro de gravedad y el centro de masa para un sistema discreto de partículas; posteriormente, extenderemos su aplicación para cubrir el caso de un cuerpo de forma arbitraria. El mismo método de análisis se usará también para determinar el centro geométrico, o centroide, de las líneas, áreas y volúmenes. Una vez localizado el centroide, mostraremos cómo obtener el área y el volumen de una superficie de revolución y cómo determinar las resultantes de varios tipos de cargas distribuidas.

9.1 Centro de gravedad y centro de masa para un sistema de partículas

Centro de gravedad. Consideremos el sistema de n partículas fijo dentro de una región del espacio, como se muestra en la figura 9.1*a*. Los pesos de las partículas consisten en un sistema de fuerzas paralelas* que se puede sustituir por un solo peso resultante (equivalente) y un punto definido de aplicación. Este punto es llamado *centro de gravedad G.* Para encontrar sus componentes $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ debemos usar los principios indicados en la sección 4.9. Esto requiere que el peso resultante sea igual al peso de todas las n partículas; esto es

* Esto no es así en el sentido exacto, ya que los pesos no son fuerzas paralelas; de hecho, *concurren* en el centro de la Tierra. Además, la aceleración de la gravedad, g es en realidad, diferente para cada partícula, pues depende de la distancia del centro de la Tierra a la partícula. Sin embargo, para todos los fines prácticos, se pueden ignorar ambos efectos.

http://librosysolucionarios.net

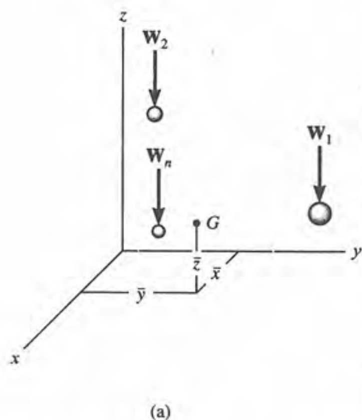
$$W_R = \Sigma W$$

La suma de los momentos de los pesos de todas las partículas en torno a los ejes x, y, z es igual al momento del peso resultante alrededor de estos ejes. Así, para determinar la coordenada $\bar{x}$ de G, podemos sumar momentos en torno al eje y. Esto da

$$\bar{x}W_R = \tilde{x}_1W_1 + \tilde{x}_2W_2 + \cdots + \tilde{x}_nW_n$$

Asimismo, sumando momentos en torno al eje x, podemos obtener la coordenada $\bar{y}$; es decir,

$$\bar{y}W_R = \tilde{y}_1W_1 + \tilde{y}_2W_2 + \cdots + \tilde{y}_nW_n$$



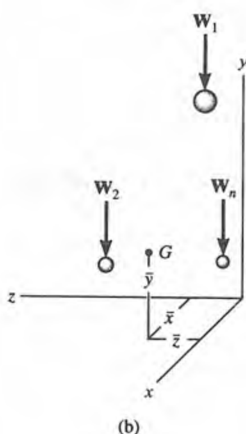
(a)

Aunque los pesos no producen momento en torno del eje z, podemos obtener la coordenada z de G imaginando el sistema de coordenadas sometido a una rotación de 90° respecto al eje x (o y) con las partículas fijas en él, figura 9.1b. Sumando momentos en torno del eje x, tenemos

$$\bar{z}W_R = \tilde{z}_1W_1 + \tilde{z}_2W_2 + \cdots + \tilde{z}_nW_n$$

Podemos generalizar estas fórmulas y escribirlas simbólicamente en la forma

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, \tilde{x}\, W}{\Sigma W} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma\, \tilde{y}\, W}{\Sigma W} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma\, \tilde{z}\, W}{\Sigma W} \tag{9.1}$$



(b)

Fig. 9.1

Aquí

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, representan las coordenadas del centro de gravedad G del sistema de partículas, independientemente de la orientación de los ejes x, y, z.

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, representan las coordenadas de cada partícula en el sistema.

$W_R = \Sigma W$ es la suma total de los pesos de todas las partículas del sistema.

En el curso de este capítulo se presentarán fórmulas de esta misma forma para representar otras "cantidades" para un sistema . Sin embargo, en todos los casos tenga presente que simplemente representan un equilibrio entre la suma de momentos de la "cantidad" para *cada parte* del sistema y el momento de la "cantidad" resultante para el sistema.

Centro de masa. Para estudiar problemas relativos al movimiento de la *materia* bajo la influencia de la fuerza, es decir, la dinámica, es necesario localizar un punto llamado el *centro de masa.*

http://librosysolucionarios.net

Siempre que la aceleración de la gravedad g para cada partícula sea constante, se considera que $W = mg$. Al sustituir en las ecuaciones 9.1 y cancelar g del numerador y del denominador se tendrá

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, \tilde{x}m}{\Sigma m} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma\, \tilde{y}m}{\Sigma m} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma\, \tilde{z}m}{\Sigma m} \tag{9.2}$$

Entonces, por comparación, la localización del centro de gravedad *coincide* con la del centro de masa. Recuerde, sin embargo, que las partículas tienen "peso" sólo cuando se encuentran bajo la influencia de una atracción gravitacional, en tanto que el centro de masa es independiente de la gravedad. Por ejemplo, no tendría sentido definir el centro de gravedad de un sistema de partículas que representaran los planetas de nuestro sistema solar, en tanto que el centro de masa del sistema solar es un concepto importante.

9.2 Centro de gravedad, centro de masa, y centroide de un cuerpo

Centro de gravedad. Cuando los principios utilizados para determinar las ecuaciones 9.1 se aplican a un sistema de partículas que componen un cuerpo rígido, se obtiene la misma forma que estas ecuaciones, salvo que cada partícula localizada en $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ se considera de un *peso diferencial dW. En consecuencia, se requiere integración en vez de suma discreta de los términos. Las ecuaciones que resultan son*

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW} \tag{9.3}$$

Para usar apropiadamente estas ecuaciones, el peso diferencial dW debe expresarse en términos de su volumen asociado dV. Si γ representa el peso específico del cuerpo, medido como peso por unidad de volumen, entonces $dW = \gamma\, dV$ y, por tanto,

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\gamma\, dV}{\int_V \gamma\, dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\gamma\, dV}{\int_V \gamma\, dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\gamma\, dV}{\int_V \gamma\, dV} \tag{9.4}$$

Aquí la integración debe hacerse sobre el volumen total del cuerpo.

http://librosysolucionarios.net

Centro de masa. La *densidad* ρ, o masa por unidad de volumen, se relaciona con γ mediante la ecuación $\gamma = \rho g$, donde g es la aceleración de la gravedad. Al sustituir esta relación en las ecuaciones 9.4 y cancelar g de los numeradores y de los denominadores se obtendrán ecuaciones similares (reemplazando ρ por γ) que podrán usarse para determinar el *centro de masa del cuerpo.*

Centroide. El *centroide* es un punto que define el *centro geométrico* de un objeto. Su localización puede determinarse a partir de fórmulas semejantes a las utilizadas para determinar el centro de gravedad o el centro de masa del cuerpo. En particular, si el material de que está compuesto un cuerpo es uniforme u *homogéneo, la densidad o el peso específico* serán *constantes* en todo el cuerpo y, consecuentemente, este término factor y se *cancelará* de los numeradores y de los denominadores de las ecuaciones 9.4. Las fórmulas resultantes definen el centroide de un cuerpo, ya que son independientes del peso del cuerpo y dependen solamente de la geometría del cuerpo. Se considerarán tres casos específicos.

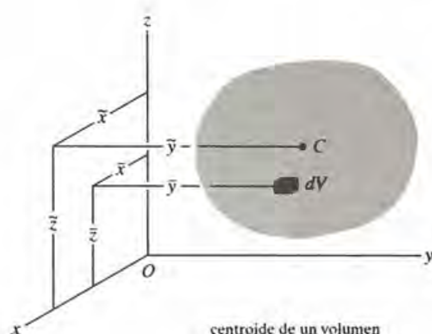


Fig. 9.2

Volumen. Si un objeto se subdivide en elementos de volumen dV, figura 9.2, la localización del centroide $C\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ para el volumen del objeto se puede determinar calculando los "momentos" de los elementos en torno a los ejes de coordenadas. Las fórmulas que resultan son

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV} \tag{9.5}$$

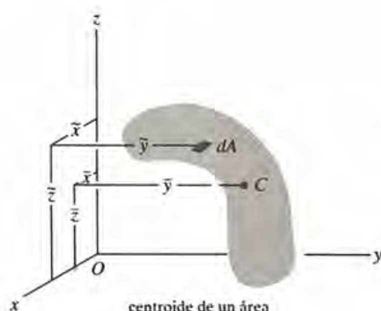


Fig. 9.3

Área. De manera semejante, el centroide para el área superficial de un boleto, como una placa o un casco, figura 9.3, puede encontrarse subdividiendo el área en elementos diferenciales dA y calculando los "momentos" de estos elementos de área en torno a los ejes de coordenadas, a saber.

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{z} = \frac{\int_A \tilde{z}\, dA}{\int_A dA} \tag{9.6}$$

http://librosysolucionarios.net

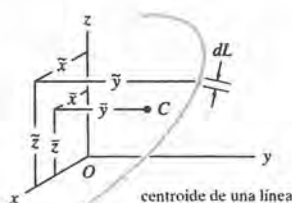


Fig. 9.4

Línea. Si la geometría del objeto, tal como una barra delgada o un alambre, toma la forma de una línea, figura 9.4, la manera de encontrar su centroide es idéntica al procedimiento antes explicado. Los resultados son

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{z} = \frac{\int_L \tilde{z}\, dL}{\int_L dL} \tag{9.7}$$

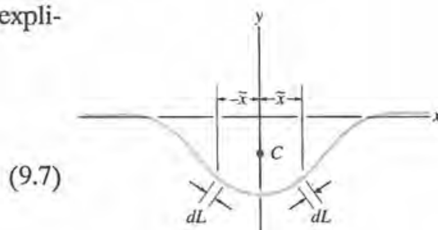
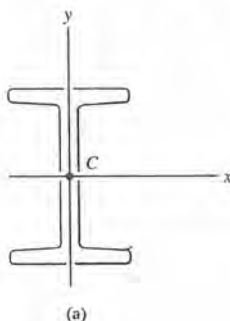


Fig. 9.5

Note que en todos los casos anteriores la localización de C no necesariamente estará dentro del objeto; sino que puede situarse en el espacio del exterior del objeto. También, los *centroides* de algunas formas pueden especificarse parcial o completamente usando condiciones de *simetría.* En los casos en que la forma tiene un eje de simetría, el centroide de la forma estará a lo largo del eje. Por ejemplo, el centroide C para la línea mostrada en la figura 9.5 debe estar sobre el eje y, ya que para cada elemento diferencial de longitud dL a distancia $+x$ a la derecha del eje y, hay un elemento idéntico a distancia $-x$ a la izquierda. El momento total para los elementos (ecuación 9.7) en torno al eje de simetría, por tanto, se cancelará; esto es, $\int x\, dL = 0$ (ecuación 9.7), de manera que $\bar{x} = 0$. En los casos en que una figura tiene dos o tres ejes de simetría, se deduce que el centroide estará en la intersección de los tres ejes, figura 9.6.



(a)

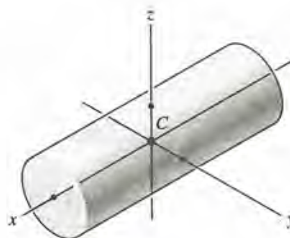


Fig. 9.6

http://librosysolucionarios.net

Es importante recordar que los términos $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ en las ecuaciones 9.4 a 9.7 remiten a los "brazos de palanca" o coordenadas del *centro de gravedad o centroide para el elemento diferencial* utilizado en las ecuaciones. Si es posible, este elemento diferencial debiera elegirse de modo que tenga magnitud diferencial o espesor en sólo una *dirección.* Cuando así se proceda, una sola integración simple será necesaria para cubrir la región entera.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento proporciona un método para determinar el centro de gravedad o el centroide de un objeto, usando una sola integración.

Elemento diferencial. Especifique los ejes coordenados y seleccione un elemento diferencial adecuado para la integración. Para líneas, este elemento dL está representado como un segmento de línea diferencial; para áreas, el elemento dA es generalmente un rectángulo, que tiene una altura finita y un ancho diferencial, y para volúmenes, el elemento dV es ya sea un disco circular, que tiene un radio finito y un espesor diferencial, o un cascarón, que tiene una longitud finita y un radio y espesor diferenciales. Localice el elemento, de tal manera que interseca la *frontera* de la línea, área o volumen en un *punto arbitrario* (x, y, z).

Tamaño y brazos de palanca. Exprese la longitud dL, área dA o volumen dV del elemento en términos de las coordenadas utilizadas para definir la frontera del objeto. Determine las coordenadas o brazos de palanca $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, para el centroide o centro de gravedad del elemento.

Integraciones. Sustituya los datos calculados anteriormente en las ecuaciones adecuadas (ecuaciones 9.4 a 9.7) y efectúe las integraciones.* Note que la integración puede efectuarse cuando la función del integrando está expresada en términos de la *misma variable que el espesor diferencial del elemento.* Los límites de la integral se definen a partir de los dos lugares extremos del espesor diferencial del elemento, de modo que cuando se "suman" los elementos o se efectúa la integración, se cubre toda la región.

Los siguientes ejemplos ilustran numéricamente este procedimiento.

*Las fórmulas para integración se dan en el apéndice A.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.1

Localice el centroide de la varilla delgada doblada en forma de un arco parabólico, que se muestra en la figura 9.7.

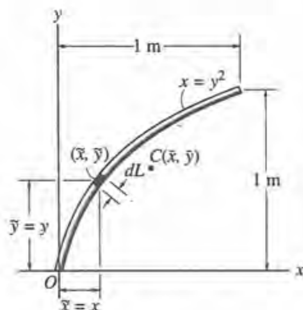


Fig. 9.7

SOLUCIÓN

Elemento diferencial. El elemento diferencial se muestra en la figura 9.7. Se localiza en la curva en el punto arbitrario (x, y).

Longitud y brazos de palanca. La longitud diferencial del elemento dL puede expresarse en términos de las diferenciales dx y dy por aplicación del teorema de Pitágoras.

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\; dy$$

Ya que $x = y^2$, entonces $dx/dy = 2y$. Por tanto, expresando dL en términos de y, y dy, tenemos

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1}\; dy$$

El centroide se localiza en $\tilde{x} = x, \tilde{y} = y$.

Integraciones. Al aplicar las ecuaciones 9.7 e integrar en torno a y usando las fórmulas del apéndice A, tenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 x\sqrt{4y^2 + 1}\; dy}{\int_o^1 \sqrt{4y^2 + 1}\; dy} = \frac{\int_o^1 y^2\sqrt{4y^2 + 1}\; dy}{\int_o^1 \sqrt{4y^2 + 1}\; dy}$$

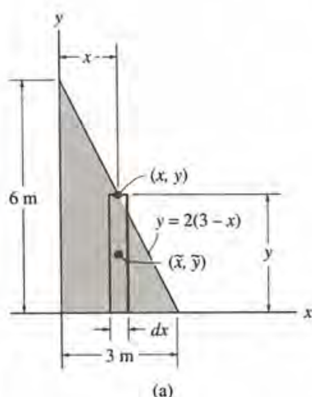
$$= \frac{0.739}{1.479} = 0.500 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 y\sqrt{4y^2 + 1}\; dy}{\int_o^1 \sqrt{4y^2 + 1}\; dy} = \frac{0.848}{1.479} = 0.573 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.2.

Localice el centroide del área triangular mostrada en la figura 9.8*a*.



(a)

SOLUCIÓN I

Elemento diferencial. En la figura 9.8*a* se muestra un elemento diferencial rectangular de ancho *dx*. Ya que el elemento interseca la curva en el *punto arbitrario* (x, y), tiene

Área y brazos de palanca. El área del elemento es $dA = y\,dx$, y su centroide se sitúan en $\tilde{x} = x, \tilde{y} = \frac{1}{2}y$.

Integraciones. Al aplicar las ecuaciones 9.6 e integrar respecto a x se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^3 xy\,dx}{\int_0^3 y\,dx} = \frac{\int_0^3 x\,2(3-x)\,dx}{\int_0^3 2(3-x)\,dx} = \frac{\frac{6}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^3}{6_x - \frac{2}{2}x^2\Big|_0^3} = 1\text{ m}$$

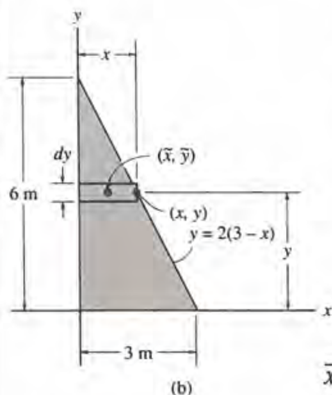
Resp.

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^3 (\frac{1}{2}y)y\,dx}{\int_0^3 y\,dx} = \frac{\int_0^3 \frac{4}{2}(3-x)^2\,dx}{\int_0^3 2(3-x)\,dx} = \frac{2(9_x - \frac{6}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^3}{6x - \frac{2}{2}x^2\Big|_0^3} = 2\text{ m}$$

Resp.

SOLUCIÓN II

Elemento diferencial. Un elemento diferencial rectangular, de ancho *dy*, es el que puede verse en la figura 9.8*b*. El elemento interseca la curva en el *punto arbitrario* (x, y), y por tanto, tiene longitud x.



(b)

Fig. 9.8

Área y brazos de palanca. El elemento de área es $dA = x\,dy$, y su centroide se localiza en $\tilde{x} = \frac{1}{2}x, \tilde{y} = y$.

Integraciones. Al aplicar las ecuaciones 9.6 e integrar con respecto a y se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^6 (\frac{1}{2}x)x\,dy}{\int_0^6 x\,dy} = \frac{\int_0^6 \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{2}y)^2\,dy}{\int_0^6 (3 - \frac{1}{2}y)\,dy} = \frac{\frac{1}{2}(9y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{12}y^3)\Big|_0^6}{3y - \frac{1}{4}y^2\Big|_0^6} = 1\text{ m}$$

Resp.

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^6 yx\,dy}{\int_0^6 x\,dy} = \frac{\int_0^6 y(3 - \frac{1}{2}y)}{\int_0^6 (3 - \frac{1}{2}y)\,dy} = \frac{\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3\Big|_0^6}{3y - \frac{1}{4}y^2\Big|_0^6} = 2\text{m}$$

Resp.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.3

Localice el centroide del área mostrada en la figura 9.9*a*.

SOLUCIÓN I

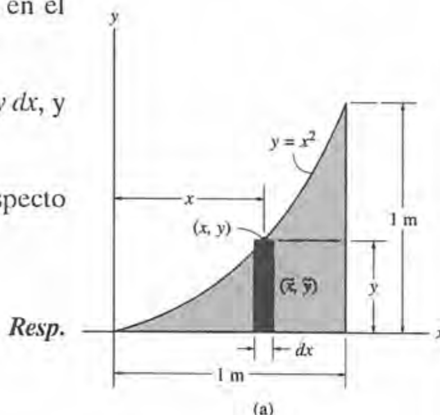
Elemento diferencial. En la figura 9.9*a* se muestra un elemento diferencial de ancho *dx* El elemento interseca la curva en el *punto arbitrario* (x, y) y por tanto, su altura es y.

Área y brazos de palanca. El área del elemento es $dA = y\,dx$, y su centroide se localiza en $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y/2$.

Integraciones Al aplicar las ecuaciones 9.6 e integrar respecto a x se tendrá

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 xy\,dx}{\int_0^1 y\,dx} = \frac{\int_0^1 x^3\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75\text{m}$$ ***Resp.***

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 (y/2)\,y\,dx}{\int_0^1 y\,dx} = \frac{\int_0^1 (x^2/2)x^2\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3\text{m}$$ ***Resp.***



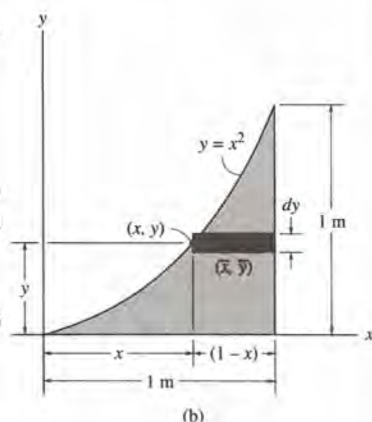
(a)

SOLUCIÓN II

Elemento diferencial. En la figura 9.9*b* se muestra el elemento diferencial de ancho *dy*. El elemento interseca la curva en el punto arbitrario (x, y) y, por tanto tiene longitud $(1 - x)$.

Área y brazos de palanca. El área del elemento es $dA = (1 - x)\,dx$, y su centroide se localiza en

$$\tilde{x} = x + \left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{1+x}{2},\ \tilde{y} = y$$



(b)

Fig. 9.9

Integraciones. Al aplicar las ecuaciones 9.6 e integrar respecto de y, obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 [(1+x)/2](1-x)\,dy}{\int_0^1 (1-x)dy} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\,dy}{\int_0^1 (1-\sqrt{y})\,dy} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75\text{ m}$$ ***Resp.***

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 y(1-x)\,dy}{\int_0^1 (1-x)\,dy} = \frac{\int_0^1 (y - y^{3/2})\,dy}{\int_0^1 (1-\sqrt{y})\,dy} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3\text{m}$$ ***Resp.***

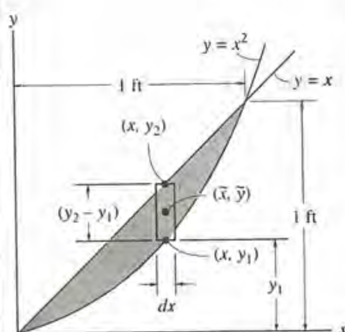
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.4

Localice $\overline{x}$ para el centroide de la región sombreada limitada por las dos curvas $y = x$, y $y = x^2$, figura 9.10

SOLUCIÓN I

Elemento diferencial. Un elemento diferencial de ancho dx se muestra en la figura 9.10*a*. El elemento interseca las curvas en puntos arbitrarios (x, y_1) y (x, y_2) y, por tanto, tiene altura $(y_2 - y_1)$.



Área y brazo de momento. El área del elemento es $dA = (y_2 - y_1)\,dx$, y su centroide se sitúa en $\overline{x} = x$.

Integraciones. Aplicando la ecuación 9.6, tenemos

$$\overline{x} = \frac{\int_A \overline{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 x(y_2 - y_1)\,dx}{\int_0^1 (y_2 - y_1)\,dx} = \frac{\int_0^1 x(x - x^2)\,dx}{\int_0^1 (x - x^2)\,dx} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = 0.5\text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

Elemento diferencial. Un elemento diferencial de ancho dy es el mostrado en la figura 9.10*b*. El elemento interseca las curvas en *puntos arbitrarios* (x_2, y) y (x_1, y) y, por tanto, tiene longitud$(x_1 - x_2)$.

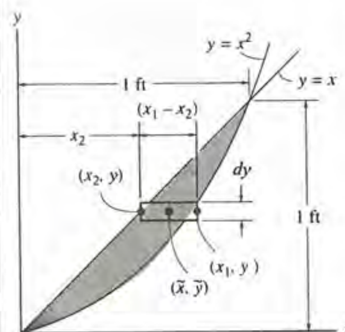


Fig. 9.10

Área y brazo de momento. El área del elemento es $dA = (x_1 - x_2)\,dy$, y su centroide se sitúa en

$$\overline{x} = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Integraciones. Al aplicar la ecuación 9.6, tenemos

$$\overline{x} = \frac{\int_A \overline{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 [(x_1 + x_2)/2](x_1 - x_2)\,dy}{\int_0^1 (x_1 - x_2)\,dy} = \frac{\int_0^1 [(\sqrt{y} + y)/2](\sqrt{y} - y)\,dy}{\int_0^1 (\sqrt{y} - y)\,dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_o^1 (y - y^2)\,dy}{\int_0^1 (\sqrt{y} - y)\,dy} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = 0.5 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.5.

Localice el valor $\bar{y}$ del centroide para el paraboloide de revolución, que es generado por revolución del área sombreada que se muestra en la figura 9.11*a*, alrededor del eje *y*.

SOLUCIÓN I

Elemento diferencial. Se elige un elemento con la forma de un *disco delgado*, figura 9.11*a*. Este elemento tiene espesor *dy*. En este método de análisis del "disco", el elemento de área plana, *dA*, siempre se considera *perpendicular* al eje de revolución . Aquí el elemento interseca la curva generadora en el *punto arbitrario* $(0, y, z)$ y, por tanto su radio es $r = z$.

Volumen y brazo de palanca. El volumen del elemento es $dV = (\pi z^2)\, dy$, y su centroide se localiza en $\tilde{y} = y$.

Integraciones. Al aplicar la segunda de las ecuaciones 9.5 e integrar respecto a *y* se obtiene

$$y = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{100} y(\pi z^2) dy}{\int_0^{100} (\pi z^2)\, dy} = \frac{100\pi \int_0^{100} y^2\, dy}{100\pi \int_0^{100} y\, dy} = 66.7 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

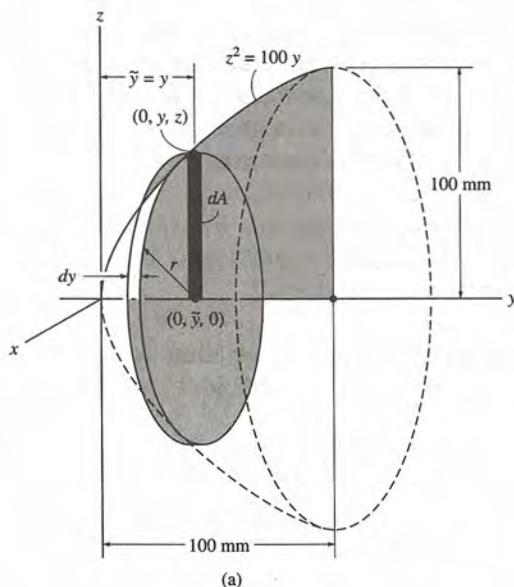
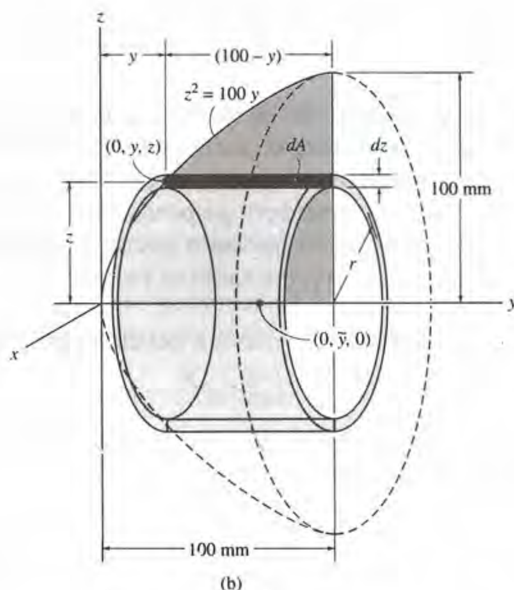


Fig. 9.11

http://librosysolucionarios.net



(b)

SOLUCIÓN II

Elemento diferencial. Como se muestra en la figura 9.11*b*, el elemento de volumen puede elegirse en forma de una *cáscara cilíndrica delgada,* cuyo espesor sea igual a dz. En este método de análisis de la "cáscara", el elemento de área plana, dA, siempre se considera *paralelo* al eje de revolución. Aquí el elemento interseca la curva generadora en el punto $(0, y, z)$ y, por tanto el radio de la cáscara es $r = z$.

Volumen y brazo de palanca. El volumen del elemento es $dV = 2\pi r\ dA = 2\pi z(100 - y)\,dz$, y su centroide se sitúa en $\tilde{y} = y + (100 - y)/2 = (100 + y)/2$.

Integraciones. Aplicando la segunda de las ecuaciones 9.5 e integrando respecto a z, se obtendrá

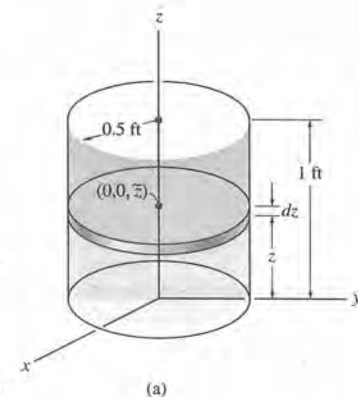
$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{100} [(100 + y)/2]2\pi z(100 - y)\,dz}{\int_0^{100} 2\pi z(100 - y)\,dz}$$

$$= \frac{\pi \int_0^{100} z(10^4 - 10^{-4}z^4)\,dz}{2\pi \int_0^{100} z(100 - 10^{-2}z^2)\,dz} = 66.7\text{mm} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.6

Determine la localización del centro de masa del cilindro mostrado en la figura 9.12*a*, si su densidad varía directamente con su distancia a la base, de modo que $\rho = 200z$ *kg/m*³.



(a)

SOLUCIÓN

Por razones de simetría material,

$$\bar{x} = \bar{y} = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

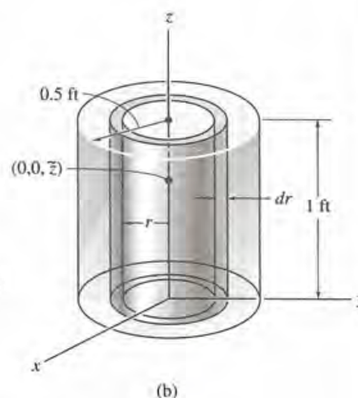
Elemento diferencial. Se elegirá un disco elemental de radio 0.5 ft y de un grosor *dz* para la integración, figura 9.12*a*, ya que *la densidad del elemento entero es constante* para un valor dado de *z*. El elemento se localiza a lo largo del eje z en el *punto arbitrario* (0, 0, *z*).

Volumen y brazo de palanca. El volumen del elemento es $dV = \pi(0.5)^2\,dz$, y su centroide se sitúa en $\tilde{z} = z$.

Integraciones. Usando una semejante a la tercera de las ecuaciones 9.4 e integrando respecto a *z*, observando que $\rho = 200z$, tenemos

$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\rho\, dV}{\int_V \rho\ dV} = \frac{\int_0^1 z(200z)\pi(0.5)^2\,dz}{\int_0^1 (200z)\pi(0.5)^2\,dz}$$

$$= \frac{\int_0^1 z^2\,dz}{\int_0^1 z\,dz} = 0.667\text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



(b)

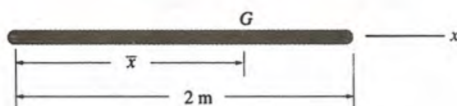
Nota: No es posible usar un elemento de volumen para la integración, como el que se muestra en la figura 9.12*b*, ya que la densidad del material de que se compone la cáscara variaría a lo largo de la altura del elemento, y por tanto, la localización de $\tilde{z}$ no puede especificarse para el elemento.

Fig. 9.12

http://librosysolucionarios.net

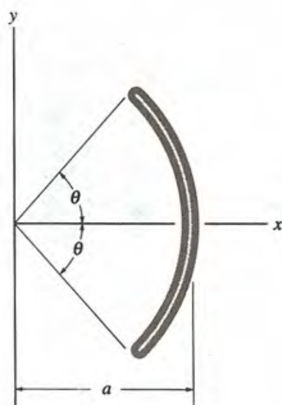
PROBLEMAS

9.1. La densidad de la barra con área en sección transversal uniforme puede representarse como $\rho = 2x^3$ kg/m^3. Determine la distancia $\bar{x}$ al centro de masa de la barra.



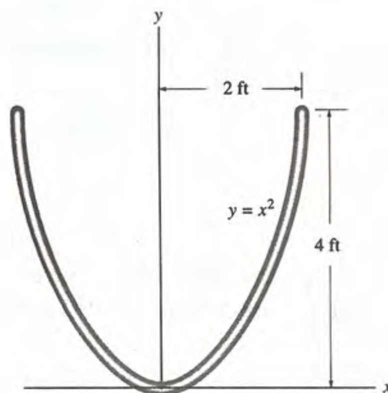
Prob. 9.1

9.2. Determine la distancia $\bar{x}$ al centroide de la barra, doblada en forma circular. A partir de esto, deduzca los resultados para un arco semicircular y uno de un cuarto de círculo.



Prob. 9.2

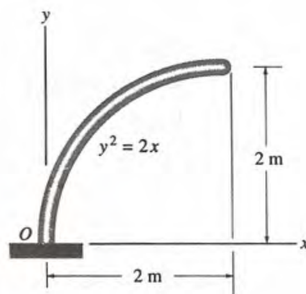
9.3. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del alambre.



Prob. 9.3

***9.4.** Determine la distancia $\bar{x}$ al centro de masa de la barra. Si la barra tiene una masa por unidad de longitud de 0.5 kg/m, determine las componentes de la reacción en el apoyo fijo O.

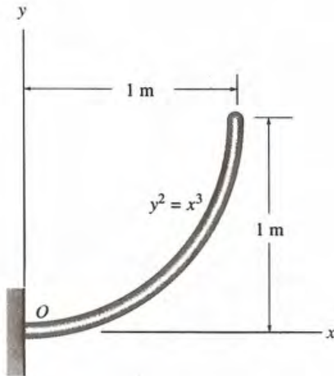
9.5. Determine la distancia $\bar{y}$ al centro de masa de la barra homogénea.



Probs. 9.4/9.5

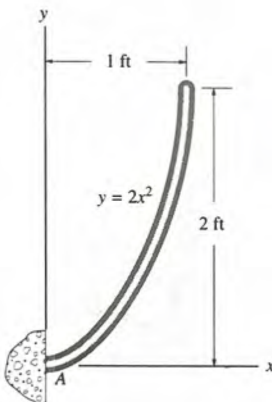
http://librosysolucionarios.net

9.6. Determine la distancia $\bar{x}$ al centro de masa de la barra. Si la barra tiene una masa por unidad de longitud de 0.5 kg/m, determine las componentes de la reacción en el apoyo fijo O.



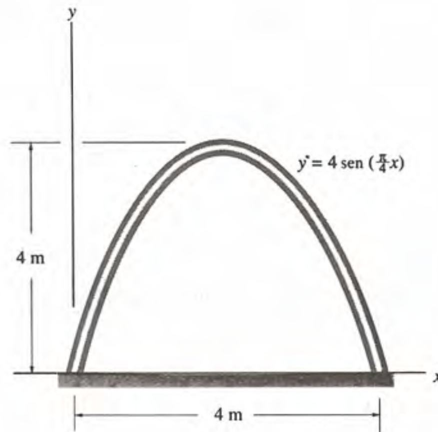
Prob. 9.6

9.7. Determine la distancia $\bar{x}$ al centro de gravedad de la barra doblada en la forma de un arco de parábola. Si la barra tiene un peso por unidad de longitud de 0.5 lb/ft, determine las componentes de la reacción en el apoyo fijo A.



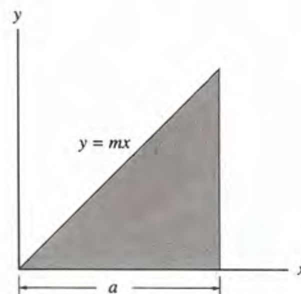
Prob. 9.7

■*9.8 Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de gravedad de la barra. ¿Cuál es su peso si su masa es 3 kg/m? Resuelva el problema evaluando las integrales con la regla de Simpson.



Prob. 9.8

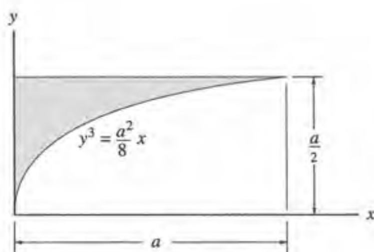
9.9. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área triangular.



Prob. 9.9

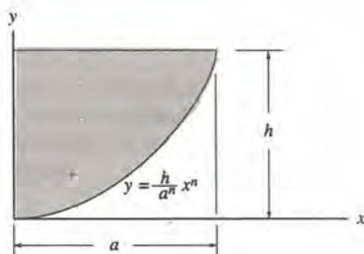
http://librosysolucionarios.net

9.10. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



Prob. 9.10

9.11. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



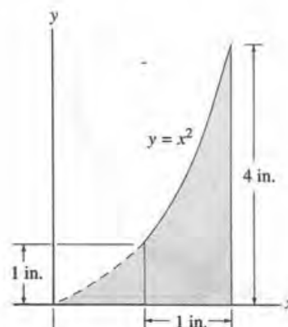
Prob. 9.11

***9.12.** Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



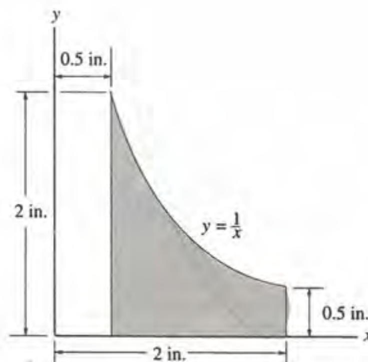
Prob. 9.12

9.13. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



Prob. 9.13

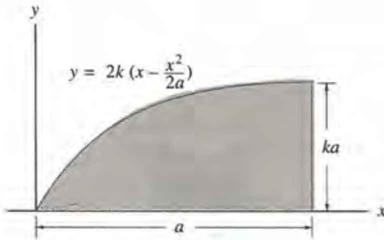
9.14. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



Prob. 9.14

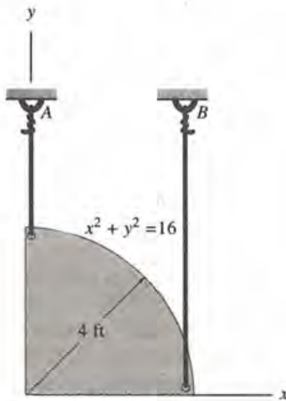
http://librosysolucionarios.net

9.15. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



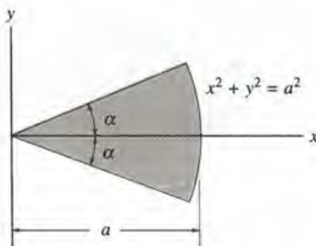
Prob. 9.15

*** 9.16.** Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del cuarto de placa. Calcule también la fuerza en cada alambre de soporte. La placa tiene un peso de 5 lb/ft^2.



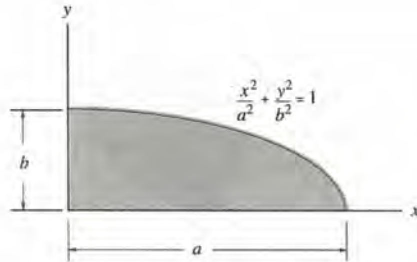
Prob. 9.16

9.17. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área circular.



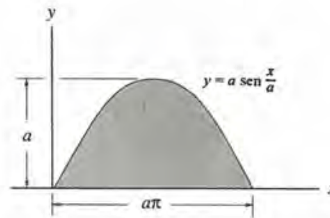
Prob. 9.17

9.18. Determine la posición $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área de un cuarto de elipse.



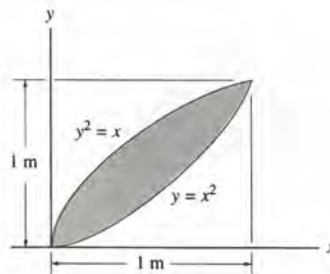
Prob. 9.18

9.19. Determine la situación $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



Prob. 9.19

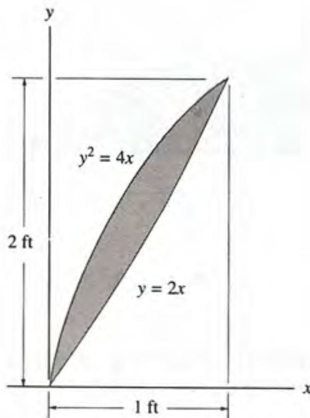
*** 9.20.** Determine la situación $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



Prob. 9.20

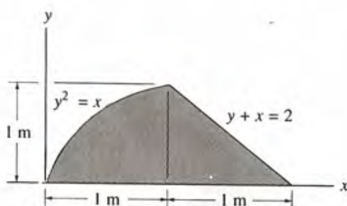
http://librosysolucionarios.net

9.21. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



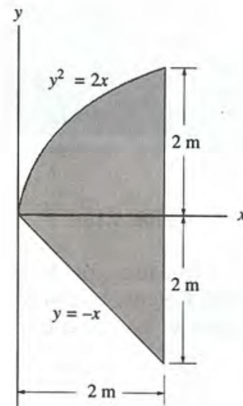
Prob. 9.21

9.22. Determine la situación $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada. *Sugerencia:* Elija elementos de ancho dy y longitud $[(2-y)-y^2]$.



Prob. 9.22

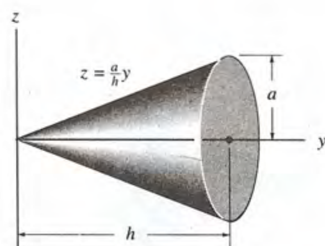
9.23. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área sombreada.



Prob. 9.23

*** 9.24.** Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del cono.

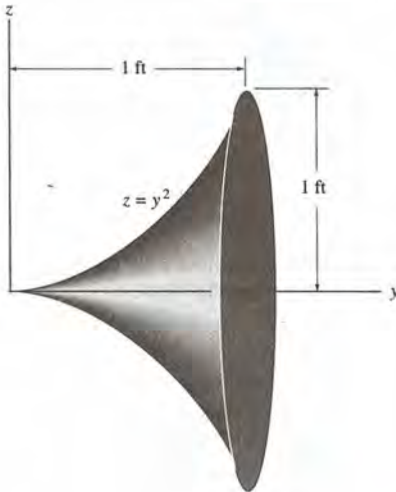
9.25. Determine la distancia $\bar{y}$ al centro de masa del cono. La densidad del material varía linealmente de cero en el origen O a p_0 *en* $y = h$.



Probs. 9.24/9.25

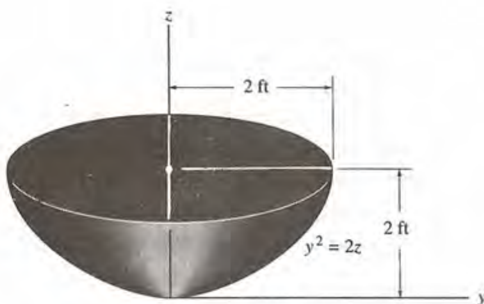
http://librosysolucionarios.net

9.26. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del volumen en forma de "campana".



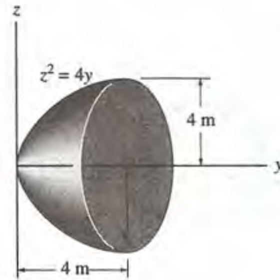
Prob. 9.26

9.27. Determine la distancia $\bar{z}$ al centroide del volumen.



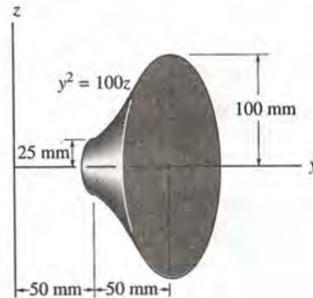
Prob. 9.27

***9.28.** Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del paraboloide.



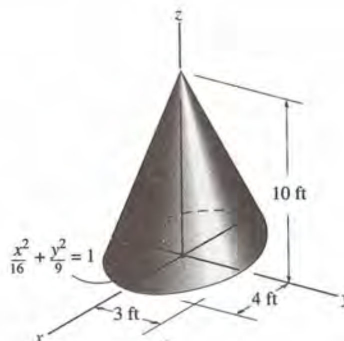
Prob. 9.28

9.29. Determine la distancia $\bar{y}$ al centro de gravedad del volumen. El material es homogéneo.



Prob. 9.29

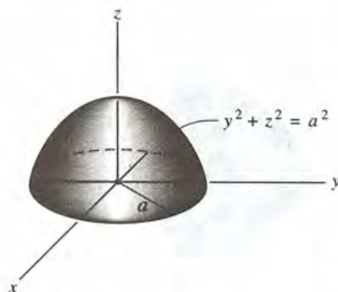
9.30. Determine la distancia $\bar{z}$ al centroide del cono elíptico recto.



Prob. 9.30

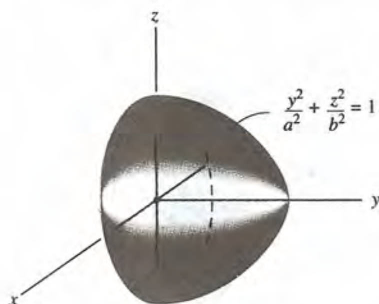
http://librosysolucionarios.net

9.31. Determine la distancia $\bar{z}$ al centroide del hemisferio.



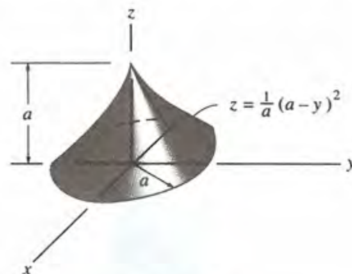
Prob. 9.31

***9.32.** Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del semielipsoide.



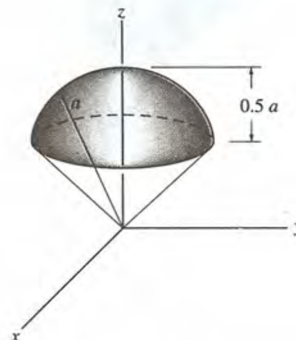
Prob. 9.32

9.33. Determine la distancia $\bar{z}$ al centroide del sólido.



Prob. 9.33

9.34. Determine la distancia $\bar{z}$ al centroide del segmento de esfera.



Prob. 9.34

9.3 Cuerpos compuestos

Un *cuerpo compuesto* consiste en una serie de cuerpos conectados que son de forma “más simple” como, por ejemplo, de forma rectangular, triangular, semicircular, etcétera Un cuerpo tal puede a menudo seccionarse o dividirse en las partes que lo componen y, a condición de conocer el *peso* y la localización del centro de gravedad de cada una de estas partes, podemos eliminar la necesidad de realizar integraciones para determinar el centro de gravedad para la totalidad del cuerpo. El método para hacer esto requiere tratar cada parte componente como una partícula y seguir el procedimiento bosquejado en la sección 9.1. Se obtienen fórmulas análogas a las ecuaciones 9.1, ya que se toman en cuenta un número finito de pesos. Al reescribir estas fórmulas, tenemos

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, \tilde{x}W}{\Sigma w} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma\, \tilde{y}W}{\Sigma w} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma\, \tilde{z}W}{\Sigma w} \tag{9.8}$$

http://librosysolucionarios.net

Aquí

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ representan las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo compuesto.

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ representan las coordenadas del centro de gravedad de cada una de las partes componentes del cuerpo.

ΣW es la suma de los pesos de todas las partes componentes del cuerpo, o dicho más simplemente, el peso total del cuerpo.

Cuando el cuerpo tiene *densidad* o *peso específico constante,* el centro de gravedad *coincide* con el centroide del cuerpo. El centroide para líneas compuestas, áreas y volúmenes compuestos puede encontrarse usando relaciones análogas a las ecuaciones 9.8; sin embargo, los pesos W se reemplazarán por L(eles), A(aes) y V(uves), respectivamente. En la tabla de la parte interna de la tapa posterior se encontrarán centroides para formas comunes de líneas, áreas, cáscaras y volúmenes.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento ofrece un método para la determinación del centro de gravedad de un cuerpo o el centroide de un objeto geométrico compuesto representado por una línea, un área o un volumen.

Partes componentes. Usando un croquis, divida el cuerpo u objeto en partes componentes en número finito. Si una de las partes tiene un *agujero,* o región geométrica sin material, se considera la parte sin el agujero, y el agujero como una parte adicional con peso o tamaño negativo.

Brazos de palanca. Establezca los ejes de coordenadas en el bosquejo y determine las coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ del centro de gravedad o centroide de cada parte.

Sumas. Determine $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ aplicando las ecuaciones del centro de gravedad, ecuaciones 9.8, o las análogas para centroides. Si un objeto es simétrico en torno a un eje, recuerde que el centroide del objeto se encuentra en este eje.

Si se desea, los cálculos pueden disponerse en forma tabular, como se indica en los tres ejemplos siguientes

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.7

Localice el centroide del alambre mostrado en la figura 9.13*a*.

SOLUCIÓN

Partes componentes. El alambre se divide en tres segmentos como se muestra en la figura 9.13*b*.

Brazos de palanca. La localización del centroide para cada pieza está determinada e indicada en la figura. En particular, el centroide del segmento ① se determina por integración o bien con ayuda de la tabla incluida como información complementaria al final del libro.

Sumas. Los cálculos se tabulan como sigue:

Segmento	L (mm)	$\tilde{x}$ (mm)	$\tilde{y}$ (mm)	$\tilde{z}$ (mm)	$\tilde{x}L$ (mm^2)	$\tilde{y}L$(mm)	$\tilde{z}$(mm^2)
1	$\pi(60) = 188.5$	60	−38.2	0	11 310	−7200	0
2	40	0	20	0	0	800	0
3	20	0	40	−10	0	800	−200
	$\Sigma L = 248.5$				$\Sigma\tilde{x}L = 11310$	$\Sigma\tilde{y}L = -5600$	$\Sigma\tilde{z}L = -200$

De manera que

$$\bar{x} \frac{\Sigma\ \tilde{x}L}{\Sigma L} = \frac{11310}{248.5} = 45.5\text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\ \tilde{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5600}{248.5} = 22.5\text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma\ \tilde{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248.5} = -0.805\text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

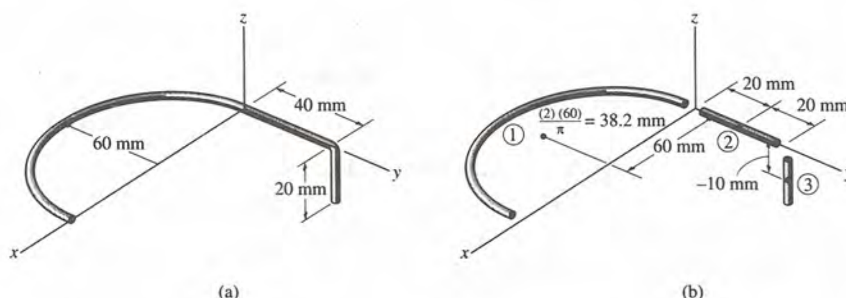
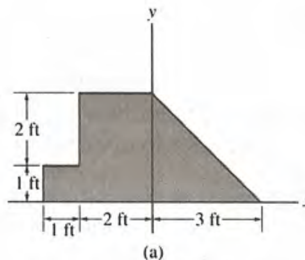


Fig. 9.13

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.8

Localice el centroide del área de la placa mostrada en la figura 9.14*a*.



(a)

SOLUCIÓN

Partes constitutivas. La placa se divide en tres segmentos como se muestra en la figura 9.14*b*. Aquí el área del pequeño rectángulo ③ es considerada "negativa" ya que debe sustraerse del área grande ②.

Brazos de palanca. El centroide de cada segmento se localiza como se muestra en la figura. Note que las coordenadas $\tilde{x}$ de ② y de ③ son *negativas.*

Sumas. Tomando los datos de la figura 9.14*b*, los cálculos se tabulan como sigue:

Segmento	*A* (*ft*²)	$\tilde{x}$ (*ft*)	$\tilde{y}$ (*ft*)	$\tilde{x}A$ (ft³)	$\tilde{y}A$ (ft)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	–1.5	1.5	–13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	–2.5	2	5	–4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma\, \tilde{x} = -4$	$\Sigma\, \tilde{y}A = 14$

Luego,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11.5} = 0.348\text{ft} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11.5} = 1.22\text{ft} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

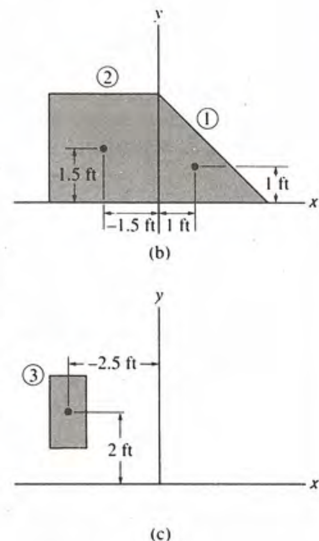


Fig. 9.14

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.9

Localice el centro de masa del cuerpo compuesto mostrado en la figura 9.15*a*. El cono truncado tiene una densidad de $\rho_c = 8$ Mg/m³ y el hemisferio tiene una densidad de $\rho_h = 4$ Mg/m³.

(a)

Fig. 9.15

SOLUCIÓN

Partes constitutivas. El cuerpo compuesto puede considerarse formado por los cuatro segmentos mostrados en la figura 9.15*b*. Para los cálculos, los segmentos ③ y ④ deben considerarse como volúmenes "negativos" para que las cuatro piezas al sumarse den por resultado el cuerpo total compuesto, mostrado en la figura 9.15*a*.

Brazo de momento. Usando la tabla de conversión anexa al final del libro, los cálculos para la coordenada centroidal *z* de cada segmento se muestran en la figura.

Sumas. Debido a la simetría, note que

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$ ***Resp.***

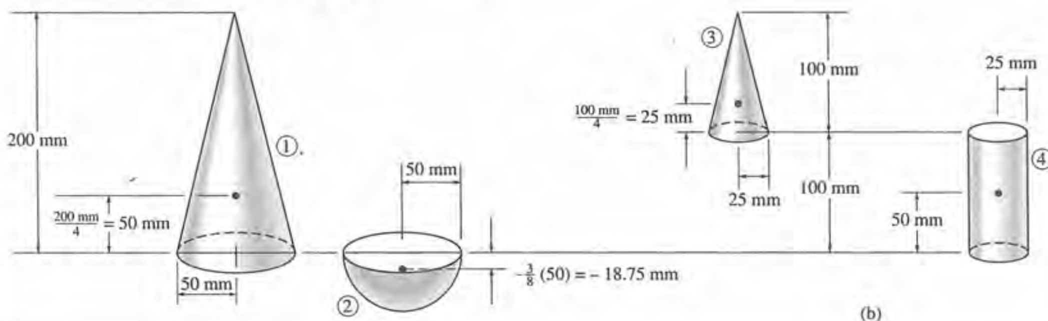
Como $W = mg$ y g es constante, la tercera de las ecuaciones. 9.8 se convierte en $\bar{z} = \Sigma\ \tilde{z}m/\Sigma m$. La masa de cada pieza puede calcularse a partir de $m = \rho V$ y usarse en los cálculos. También $1\ Mg/m^3 = 10^{-6}$ kg/mm³, de modo que

Segmento	*m* (kg)	$\tilde{z}$ (mm)	$\tilde{z}$ (kg · mm)
1	$8(10^{-6})(\frac{1}{3})\pi(50)^2(200) = 4.189$	50	209.440
2	$4(10^{-6})(\frac{2}{3})\pi(50)^3 = 1.047$	−18.75	−19.635
3	$-8(10^{-6})(\frac{1}{3})\pi(25)^2(100) = -0.524$	100 + 25 = 125	−65.450
	$-8(10^{-6})\pi(25)^2(100) = 1.571$	50	−78.540
	$\Sigma m = 3.141$		$\Sigma\tilde{z}m = 45.815$

Por tanto,

$$\bar{z} = \frac{\Sigma\tilde{z}m}{\Sigma m} = \frac{45.815}{3.141} = 14.6 \text{ mm}$$ ***Resp.***

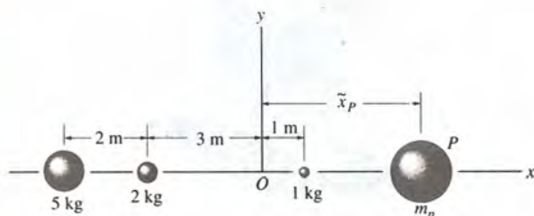
$$\bar{z} = \frac{\Sigma\tilde{z}m}{\Sigma m} = \frac{45.815}{3.141} = 14.6 \text{ mm}$$



(b)

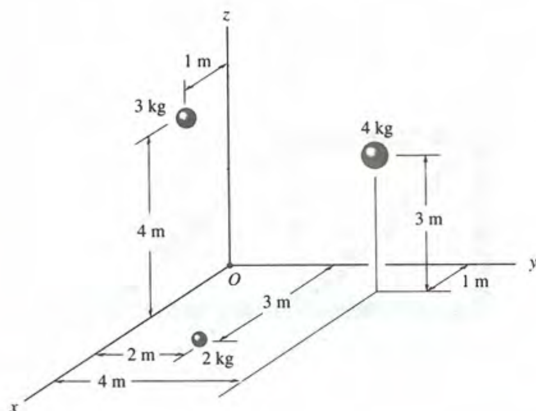
PROBLEMAS

9.35. Si las cuatro partículas pueden reemplazarse por una sola partícula de 10 kg que actúe a una distancia de 2 m a la izquierda del origen, determine la posición $\tilde{x}_P$ y la masa m_P de la partícula P.



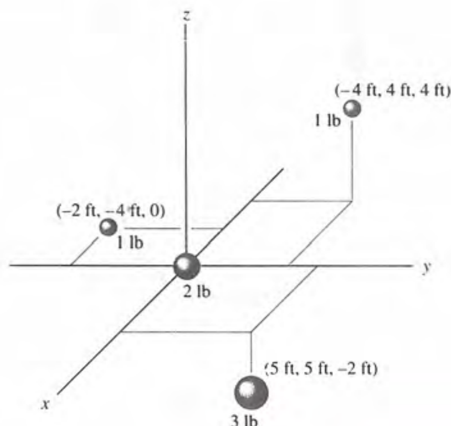
Prob. 9.35

*** 9.36.** Determine la localización del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de las tres partículas.



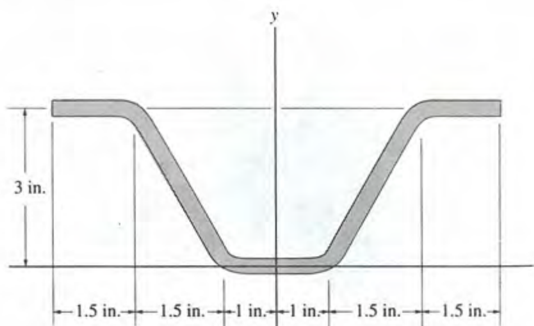
Prob. 9.36

9.37. Determine la localización del centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de las cuatro partículas.



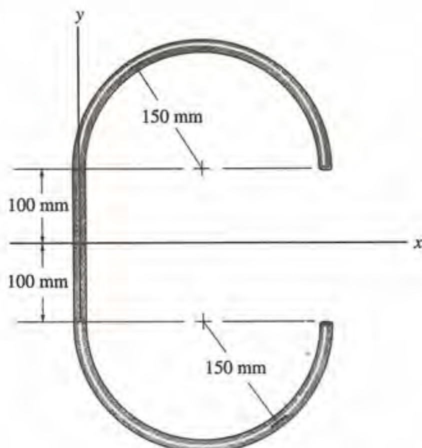
Prob. 9.37

9.38. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide para la forma de estructura que se usa en la construcción del ala de un avión. Desprecie el espesor del miembro.



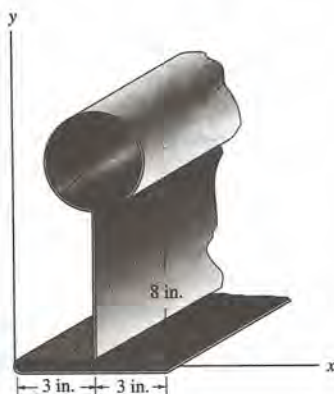
http://librosysolucionarios.net

9.39. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide de la barra. Desprecie el espesor de la barra.



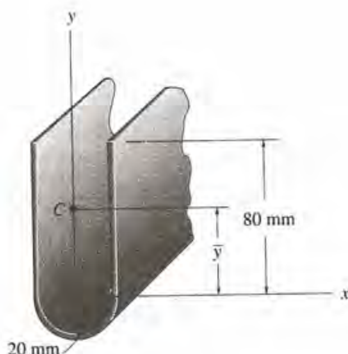
Prob. 9.39

9.41. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide de la sección transversal de la chapa metálica. Desprecie el espesor del material y los dobleces.



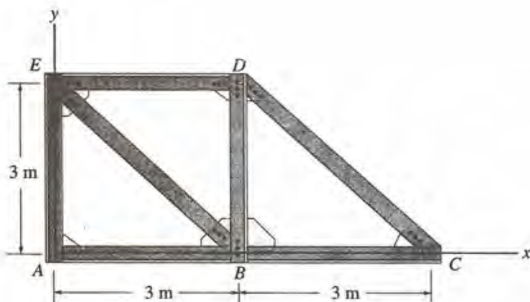
Prob. 9.41

*** 9.40**. Un tipo de armadura tiene una forma con la sección transversal mostrada en la figura. Determine la distancia $\bar{y}$ a su centroide *C*. Desprecie el espesor del material.



Prob. 9.40

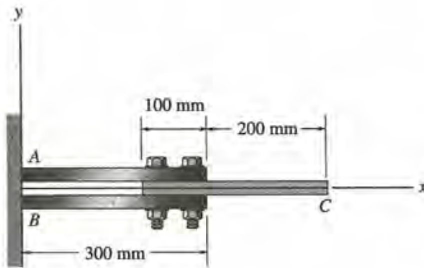
9.42. La armadura consta de siete miembros, cada uno con masa de 6 kg/m. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa. Desprecie la masa de la placa de unión.



Prob. 9.42

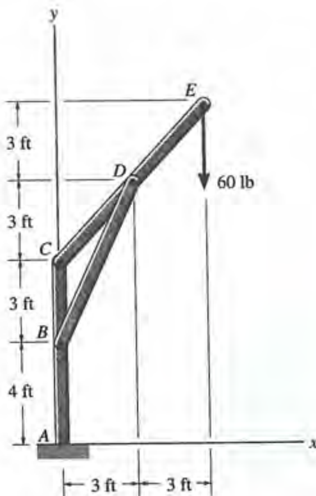
http://librosysolucionarios.net

9.43. El ensamble de aluminio y acero se encuentra asegurado con pernos y fijado a la pared. Cada placa tiene ancho de 200 mm y espesor de 20 mm. Si la densidad de masa de A y B es $\rho_s = 7.58$ Mg/m^3, y para C, $\rho_{al} = 2.71$ Mg/m^3, determine la distancia $\bar{x}$ al centro de masa. Desprecie el tamaño de los pernos.



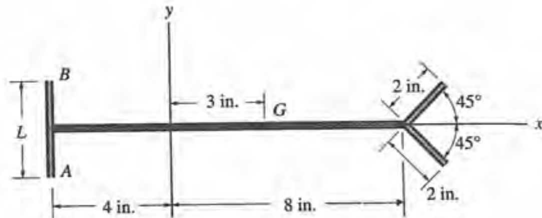
Prob. 9.43

*** 9.44.** Los tres miembros del bastidor tienen cada uno, un peso de 4 lb/ft. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de gravedad. Desprecie el tamaño de los pasadores en las articulaciones y el espesor de los miembros. También, calcule las reacciones en el apoyo fijo A.



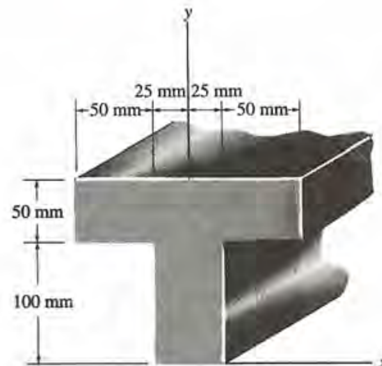
Prob. 9.44

9.45. Determine la longitud del segmento de alambre AB, de tal manera que el centro de gravedad para el ensamble entero se sitúe en G. Cada segmento está hecho del mismo material y tiene la misma área en sección transversal.



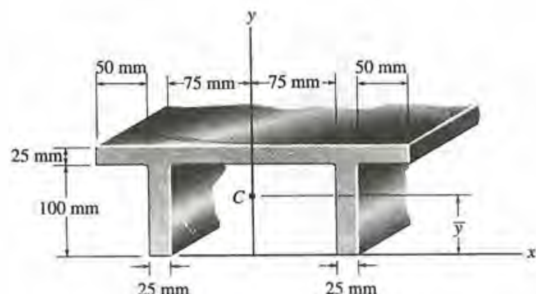
Prob. 9.45

9.46. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del área.



Prob. 9.46

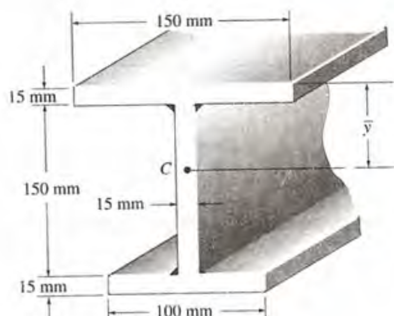
9.47. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del área de la sección transversal de la viga.



Prob. 9.47

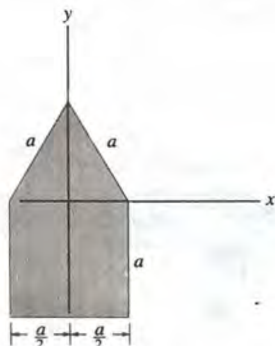
http://librosysolucionarios.net

***9.48.** Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del área de la sección transversal de la viga. Desprecie el tamaño de las soldaduras en esquinas, para fines de cálculo.



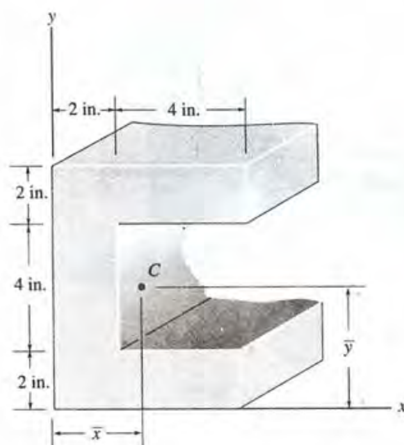
Prob. 9.48

9.49. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del área.



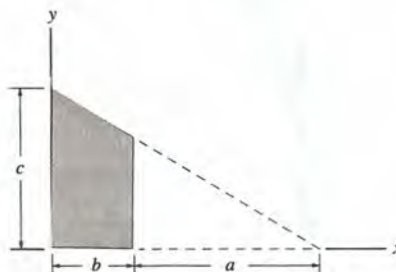
Prob. 9.49

9.50. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área.



Prob. 9.50

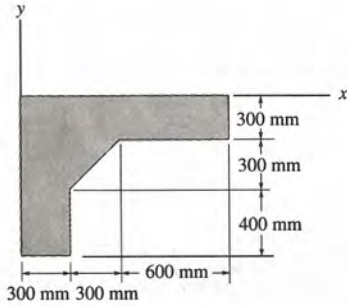
9.51. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área.



Prob. 9.51

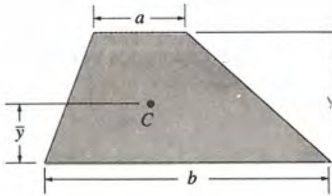
http://librosysolucionarios.net

*9.52. Determine la localización ($\bar{x}$, $\bar{y}$) del centroide del área de la sección transversal.



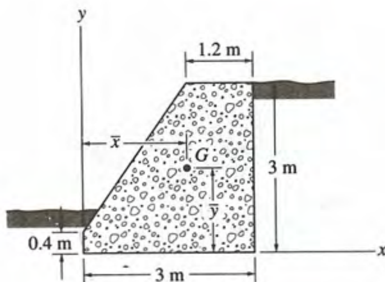
Prob. 9.52

9.53. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del área trapezoidal en términos de las dimensiones que se muestran.



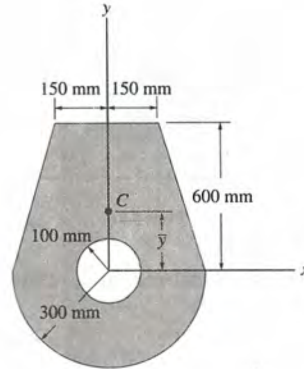
Prob. 9.53

9.54. El muro de contención es de concreto. Determine la localización ($\bar{x}$, $\bar{y}$) del centro de gravedad G para el muro.



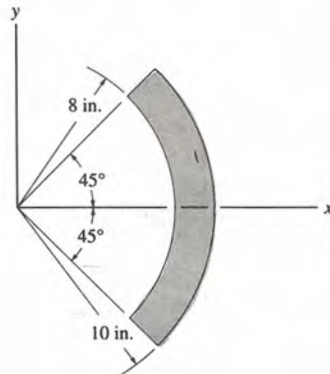
Prob. 9.54

9.55. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del área sombreada.



Prob. 9.55

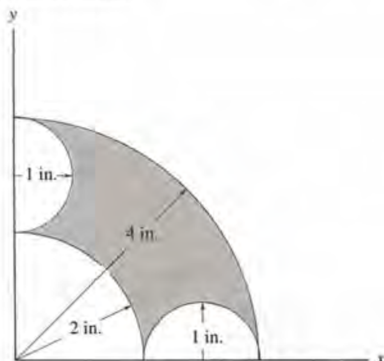
*9.56. Determine la distancia $\bar{x}$ al centroide del área sombreada.



Prob. 9.56

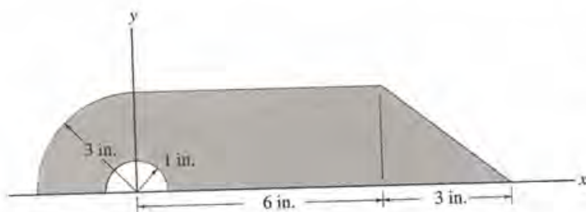
http://librosysolucionarios.net

9.57. Determine la localización ($\bar{x}$, $\bar{y}$) del centroide del área sombreada.



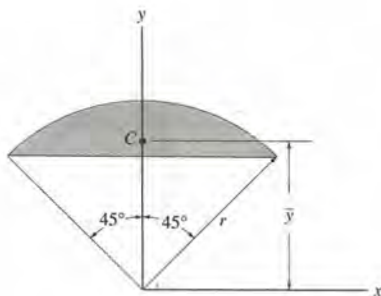
Prob. 9.57

9.58. Determine la localización del centroide del área sombreada.



Prob. 9.58

9.59. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide C para el sector circular de radio $r = 0.25$ m.



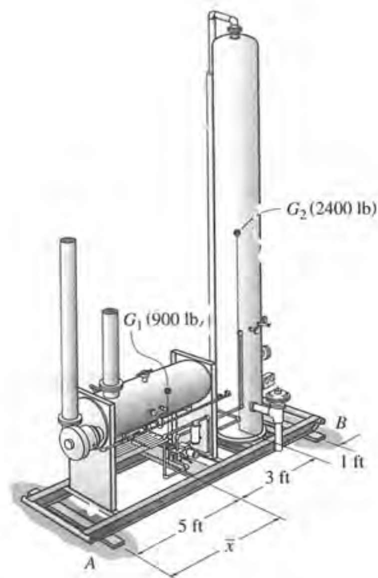
Prob. 9.59

***9.60.** La trabe será izada por medio de un cable atado en un punto en la vertical del centro de gravedad G. Para localizarlo, la trabe se apoya en el extremo A y en el extremo B usando dos básculas. La báscula en A indica 5685 lb y la de B indica 4864 lb. Determine la distancia desde $\bar{x}$ hasta G, medida desde el extremo A.



Prob. 9.60

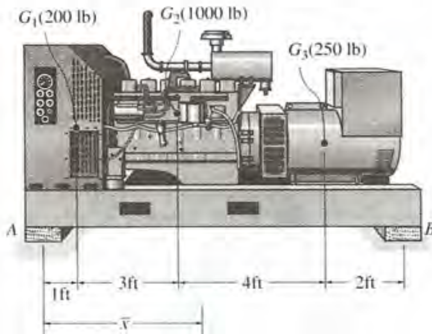
9.61. Determine la distancia $\bar{x}$ al centro de gravedad del equipo de deshidratación de gases. El peso y el centro de gravedad de cada una de las partes componentes se indican abajo. Para soportar el ensamblaje, ¿cuáles deben ser las reacciones verticales en A y en B?



Prob. 9.61

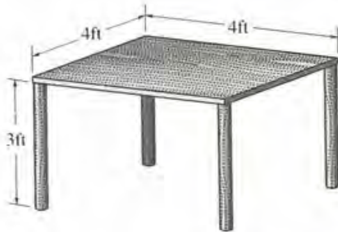
http://librosysolucionarios.net

9.62. Determine la distancia $\bar{x}$ al centro de gravedad del ensamble del generador. El peso y el centro de gravedad de cada una de las partes se indica abajo. ¿Cuáles son las reacciones verticales en los bloques A y B requeridas para soportar el ensamble?



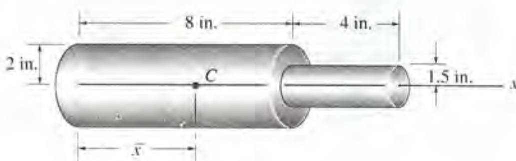
Prob. 9.62

9.63. La mesa de madera está hecha con una tabla cuadrada que pesa 15 lb. Cada una de las patas pesa 2 lb y tiene 3 ft de largo. Determine la altura a que se encuentra el centro de gravedad. También, ¿cuál es el ángulo máximo, medido desde la horizontal, a que se puede levantar girando la mesa sobre dos patas antes de volcarse?. Desprecie el espesor de las patas.



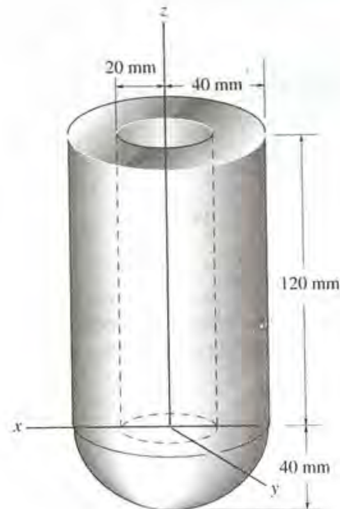
Prob. 9.63

* **9.64.** Determine la distancia $\bar{x}$ al centroide del volumen.



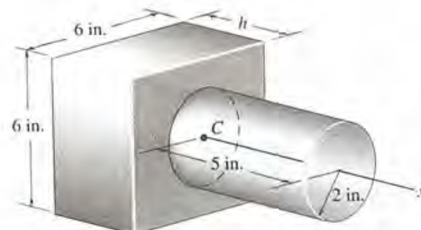
Prob. 9.64

9.65. Determine la distancia $\bar{z}$ al centro de masa de la pieza fundida formada por un cilindro hueco de densidad 8 Mg/m^3 y un hemisferio que tiene una densidad de 3 Mg/m^3.



Prob. 9.65

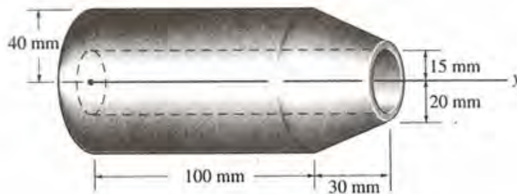
9.66. Determine la dimensión h del bloque, de manera que el centroide del ensamble se encuentre en la base del cilindro, como se ve en la figura.



Prob. 9.66

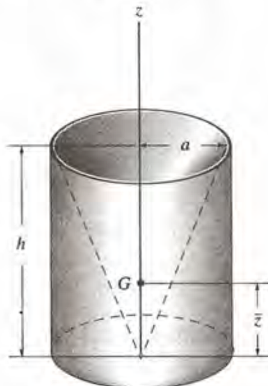
http://librosysolucionarios.net

9.67. Determine la distancia $\bar{y}$ al centro de masa del ensamble que está perforado en la parte central. El material tiene densidad $\rho = 3\ \text{Mg/m}^3$.



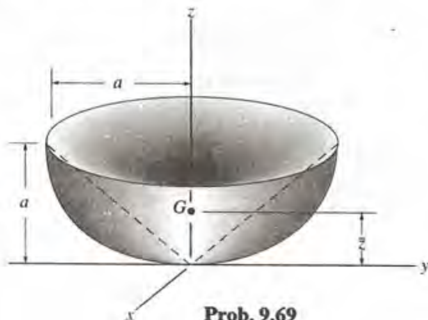
Prob. 9.67

*** 9.68.** El sólido es un cilindro lleno al que se le practica una perforación cónica y simétrica. Determine la distancia $\bar{z}$ al centro de gravedad.



Prob. 9.68

9.69. El sólido es un hemisferio macizo al que se le ha hecho una perforación cónica. Determine la distancia $\bar{z}$ al centro de gravedad.



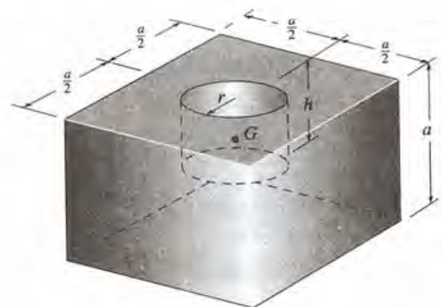
Prob. 9.69

9.70. Determine la distancia h hasta la cual debe practicarse una perforación de 100 mm de diámetro dentro del cono, para que el centro de gravedad G del cuerpo que resulta se encuentre en $z = 115$ mm. El material tiene densidad de 8 Mg/m^3.



Prob. 9.70

9.71. Un agujero de radio r debe practicarse en el centro del bloque homogéneo. Determine la profundidad h de la perforación, de modo que el centro de gravedad G esté tan bajo como sea posible.



Prob. 9.71

http://librosysolucionarios.net

* 9.4 Teoremas de Pappus y Guldinus

Los dos *teoremas de Pappus-Guldinus*, que descubrió por primera vez Pappus de Alejandría en el siglo tercero antes de la era cristiana, y que volvió a enunciar el matemático suizo Paul Guldin o Guldinus (1577-1643), se usan para encontrar el área superficial y el volumen de un cuerpo de revolución.

Un *área de superficie de revolución* se genera haciendo girar una *curva plana* alrededor de un eje fijo, coplanar con la curva y ajeno a la misma (no se intersecan); *y un volumen* de revolución se genera haciendo girar un *área plana* alrededor de un eje fijo, situado en el mismo plano y que no interseca el área dada. Por ejemplo, si la *línea AB* mostrada en la figura 9.16 se hace girar alrededor de un eje fijo, genera la *superficie lateral* de un cono, si el *área* triangular *ABC* mostrada en la figura 9.17 se hace girar alrededor del eje, se genera el *volumen* de un cono.



Fig. 9.16



Fig. 9.17

A continuación se presentan los enunciados y demostraciones de los teoremas de Pappus y Guldinus. Las demostraciones requieren que las áreas y las curvas generatrices no corten al eje alrededor del cual se hacen girar, de otro modo, dos secciones, una a cada lado del eje generarían áreas o volúmenes que tienen signos opuestos y, por tanto, se cancelarían recíprocamente.

Área de una superficie

El área de una superficie de revolución es igual al producto de la longitud de la curva generatriz por la distancia recorrida por el centroide de la curva al generar el área de la superficie.

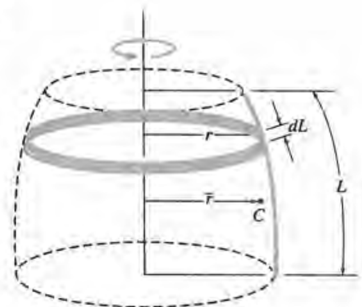


Fig. 9.18

Demostración. Cuando una longitud diferencial dL de la curva mostrada en la figura 9.18 se hace girar alrededor de un eje a tra-

http://librosysolucionarios.net

vés de una distancia $2\pi r$, genera un anillo que tiene un área $dA = 2\pi r\, dL$. El área de toda la superficie, generada al hacer girar toda la curva alrededor del eje es, por consiguiente, $A = 2\pi\int_L r\, dL$. Sin embargo, esta ecuación puede simplificarse si observamos que la localización r del centroide para la línea de longitud total L puede determinarse a partir de una ecuación de la misma forma que las ecuaciones 9.7, a saber, $\bar{r} = \int r\, dL/L$. Así, el área total de la superficie viene a ser $A = 2\pi\bar{r}L$. Generalmente, no obstante, si la línea no experimenta una revolución completa, entonces

$$A = \theta\bar{r}L \qquad (9.9)$$

donde A = área de la superficie de revolución
θ = ángulo de revolución, medido en radianes, $\theta \leq 2\pi$.
$\bar{r}$ = distancia entre el centroide de la curva generatriz y el eje de revolución.
L = longitud de la curva generatriz.

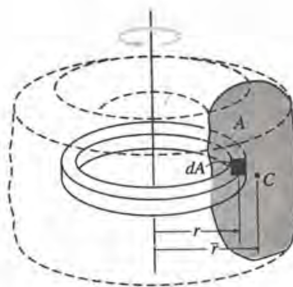


Fig. 9.19

Volumen

El volumen de un sólido de revolución es igual al producto del área generatriz por la distancia recorrida por el centroide del área al generar el volumen.

Demostración. Cuando el área diferencial dA, mostrada en la figura 9.19, se hace girar alrededor de un eje a través de una dis-

http://librosysolucionarios.net

tancia $2\pi r$, genera un anillo que tiene un volumen $dV = 2\pi r\, dA$. El volumen total generado al hacer girar la superficie A alrededor del eje es, por consiguiente, $V = 2\pi \int_A r\, dA$. Aquí puede eliminarse la integral usando una ecuación análoga a las ecuaciones 9.6, $\int_A r\, dA = \bar{r}A$, donde $\bar{r}$ localiza el centroide C del área generatriz A, y el volumen se convierte en $V = 2\pi\bar{r}A$. En general, no obstante

$$V = \theta \bar{r} A \tag{9.10}$$

donde V = volumen de revolución
θ = ángulo de revolución, medido en radianes, $\theta \leq 2\pi$.
$\bar{r}$ = distancia entre el centroide del área generatriz y el eje de revolución.
A = área generatriz.

Formas compuestas. También podemos aplicar los dos teoremas precedentes a líneas y áreas formadas por una serie de líneas y áreas constitutivas. Entonces, el área superficial total o el volumen generado es la adición de las áreas o de los volúmenes generados por cada una de las partes. Ya que cada parte está sometida al *mismo* ángulo de rotación, θ, y la distancia del eje de revolución al centroide de cada parte es r, se tiene

$$A = \theta \Sigma r L \tag{9.11}$$

y

$$V = \theta \Sigma r A \tag{9.12}$$

La aplicación de los teoremas anteriores se ilustra numéricamente en los siguientes ejemplos.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.10

Demuestra que el área de la superficie de una esfera es $A = 4\pi R^2$ y su volumen es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

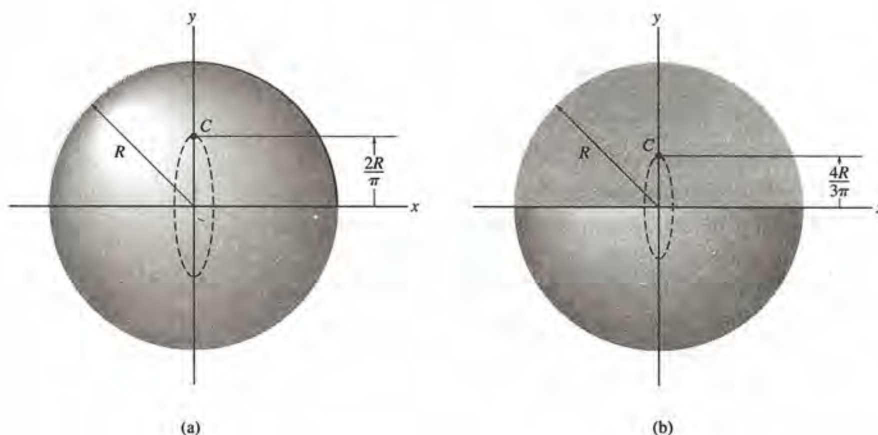


Fig. 9.20

SOLUCIÓN

Área de la superficie. El área de la superficie de la esfera en la figura 9.20*a* se genera al girar un arco semicircular en torno al eje *x*. Usando la tabla de conversión al final del libro, se ve que el centroide de este arco está situado a distancia $\bar{r} = 2R/\pi$ desde el eje de rotación. Como el centroide se mueve a lo largo de un ángulo de $\theta = 2\pi$ rad al generar la esfera, por aplicación de la ecuación 9.9 tenemos

$$A = \theta \bar{r} L; \qquad A = 2\pi\left(\frac{2R}{\pi}\right)\pi R = 4\pi R^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Volumen. El volumen de la esfera se genera por rotación del área semicircular de la figura 9.20b alrededor del eje x. Usando la tabla de la parte interna de la tapa posterior para localizar el centroide, y aplicando la ecuación 9.10, tenemos

$$V = \theta \bar{r} A; \qquad V = 2\pi\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.11

Determine la masa de concreto necesaria para construir la viga arqueada mostrada en la figura 9.21. La densidad del concreto es $\rho_c = 2.1\ \text{Mg/m}^3$. Determine también el área de superficie de la viga.

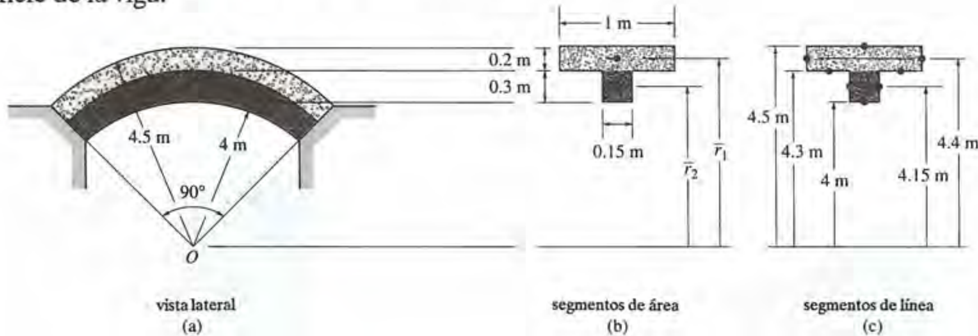


Fig. 9.21

SOLUCIÓN

Masa. La masa del arco puede determinarse usando la densidad ρ_c, conociendo el volumen del concreto. El área de la sección transversal de la viga se compone de dos rectángulos que tienen sus centroides en los puntos C_1 y C_2 como se muestra en la figura 9.21*b*. El volumen generado por cada una de estas áreas es igual al producto del área de la sección transversal por la distancia recorrida por su centroide. Al generar el arco, los centroides se mueven a través de un ángulo de $\theta = \pi(90°/180°) = 1.57$ rad. El punto C_1 actúa a una distancia de $\bar{r}_1 = 4.5 - 0.1 = 4.4$ m del centro de rotación, o sea el punto O, mientras que C_2 actúa a $\bar{r}_2 = 4 + 0.15 = 4.15$ m de O. Aplicando la ecuación 9.12, se obtiene el volumen total:

$$
\begin{aligned}
V &= \theta \Sigma \bar{r} A \\
&= 1.57\ \text{rad}[(4.4\ \text{m})(1\ \text{m})(0.2\ \text{m}) + (4.15\ \text{m})(0.15\ \text{m})(0.3\ \text{m})] \\
&= 1.676\ \text{m}^3
\end{aligned}
$$

La masa requerida de concreto es

$$m = \rho_c V = (2.1\ \text{Mg/m}^3)(1.676\ \text{m}^3) = 3.52\ \text{Mg} \qquad \textit{Resp.}$$

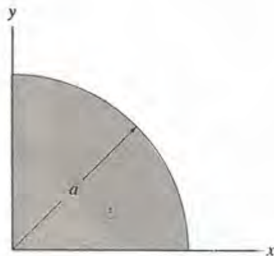
Área de la superficie. El área de la superficie del arco se determina dividiendo el perímetro de su área en sección transversal en ocho segmentos de línea, figura 9.21*c*, y aplicando posteriormente la ecuación 9.11. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
A &= \theta \Sigma \bar{r} L \\
&= 1.57\ \text{rad}[4\ \text{m}(0.15\ \text{m}) + 2(4.15\ \text{m})(0.3\ \text{m}) \\
&\quad + (4.3\ \text{m})(1\ \text{m} - 0.15\ \text{m}) + 2(4.4\ \text{m})(0.2\ \text{m}) + (4.5\ \text{m})(1\ \text{m})] \\
&= 20.4\ \text{m}^2 \qquad \textit{Resp.}
\end{aligned}
$$

http://librosysolucionarios.net

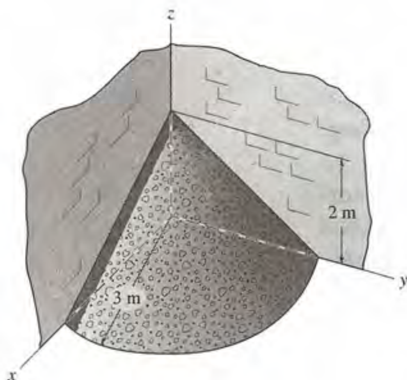
PROBLEMAS

*9.72. Usando el segundo teorema de Pappus-Guldinus, determine la localización del centroide del área del cuarto de círculo.



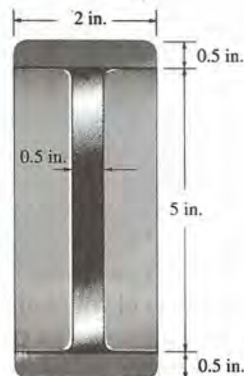
Prob. 9.72

9.73. Se ha apilado arena entre dos paredes, como se muestra. Supongamos que se ha formado un cuarto de cono: determine su volumen usando el segundo teorema de Pappus-Guldinus.



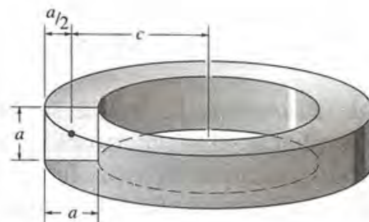
Prob. 9.73

9.74. Una rueda de acero tiene la sección transversal que se muestra. Determine el peso de la rueda si la gravedad específica del material es $\gamma = 0.25$ lb/in^3.



Prob. 9.74

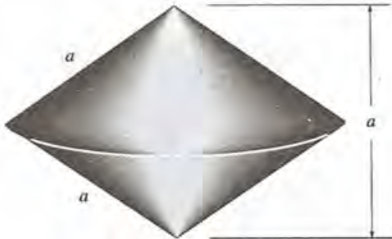
9.75. Determine el área de la superficie del anillo y el volumen del anillo.



Prob. 9.75

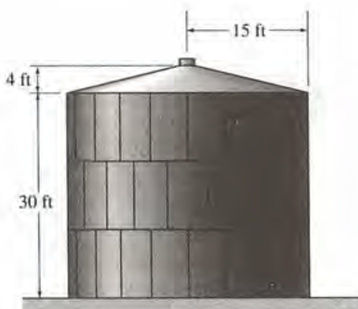
http://librosysolucionarios.net

* **9.76.** Determine el área superficial y el volumen del sólido cónico.



Prob. 9.76

9.77. Determine la superficie exterior y el volumen del tanque de almacenamiento.



Prob. 9.77

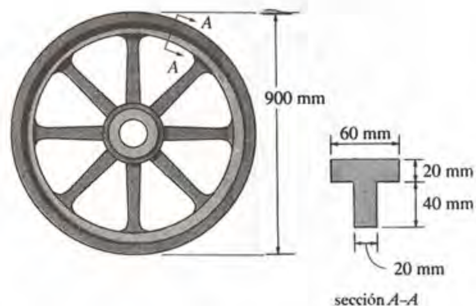
9.78. El tanque se ha fabricado con dos placas, una forma de hemisferio y otra cilíndrica. Determine las reacciones verticales que cada una de las cuatro patas verticales y simétricas ejerce sobre el piso, si el tanque contiene agua en una profundidad de 12 ft. La gravedad específica del agua es 62.4 lb/ft^3. Desprecie el peso del tanque.

9.79. Determine la cantidad aproximada de pintura que se necesita para cubrir el tanque por fuera. Suponga que un galón de pintura cubre 400 ft^2.



Probs. 9.78/9.79

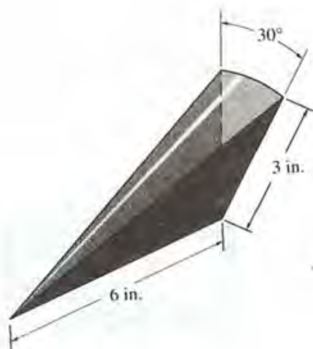
* **9.80.** El *anillo* de un volante tiene la sección transversal *A–A* mostrada. Determine el volumen de material requerido para su construcción.



Prob. 9.80

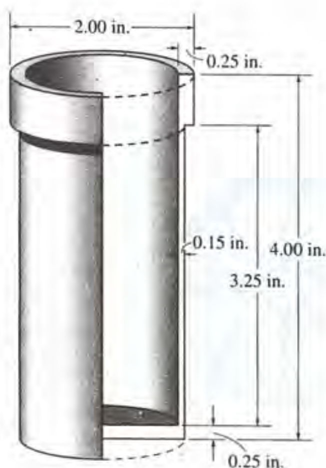
http://librosysolucionarios.net

9.81. Determine el peso de la cuña que se genera al girar un triángulo rectángulo de base 6 in y altura 3 in a través de un ángulo de 30°. El peso específico del material es $\gamma = 0.22$ lb/in^3.



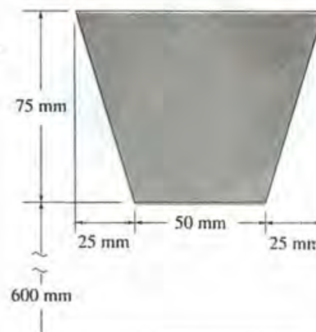
Prob. 9.81

9.82. La envoltura cilíndrica de aluminio se usa en un sistema de frenos de automóvil. La sección transversal se ha mostrado en la figura. Determine su peso si el aluminio tiene peso específico de 169 lb/ft^3.



Prob. 9.82

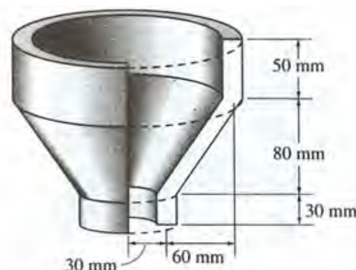
9.83. Una banda circular de corte en "V" tiene radio interno de 600 mm y el área en sección transversal que se muestra. Determine el volumen del material requerido para hacer la banda.



Prob. 9.83

*** 9.84.** Determine la cantidad aproximada de aluminio que se necesita para hacer el embudo. Consiste en una parte de círculo completo de 2 mm de espesor. Su sección transversal se muestra en la figura.

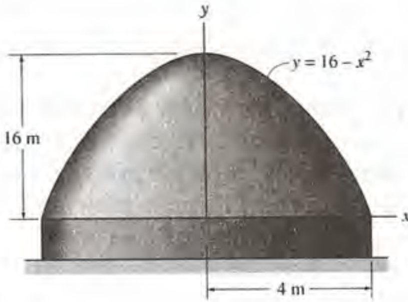
9.85. Determine la superficie externa aproximada del embudo. Consiste en una pieza que comprende una circunferencia completa y es de espesor despreciable.



Probs. 9.84/9.85

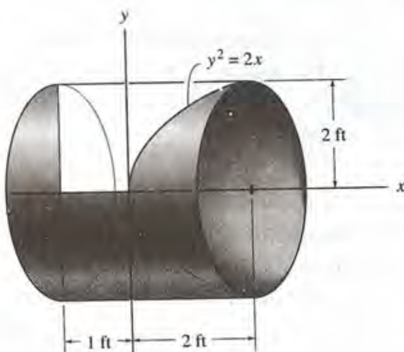
http://librosysolucionarios.net

9.86. Determine el área superficial de la estructura si se obtiene por rotación de la parábola alrededor del eje y.



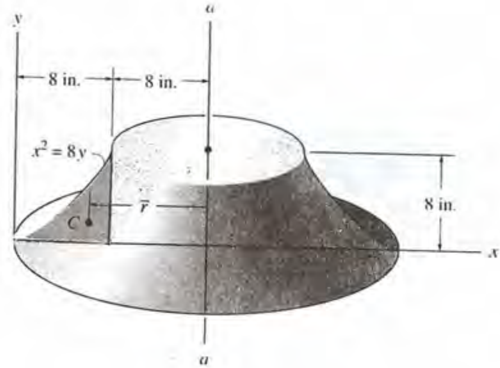
Prob. 9.86

9.87. Por integración, determine el área y la distancia $\overline{y}$ al centroide del área sombreada. Luego, usando el segundo teorema de Pappus-Guldinus, calcule el volumen del sólido generado por revolución del área sombreada en torno al eje x.



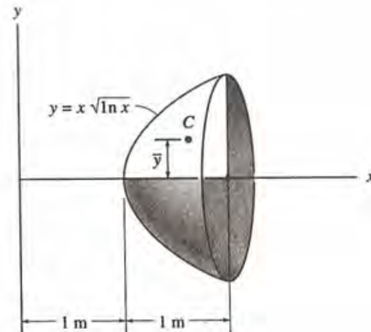
Prob. 9.87

*** 9.88.** Determine el área y la distancia $\overline{r}$ al centroide del área sombreada. Usando el segundo teorema de Pappus-Guldinus, calcule el volumen del sólido generado por revolución del área sombreada alrededor del eje a–a.



Prob. 9.88

■**9.89.** Usando la regla de Simpson, determine el área y la distancia $\overline{y}$ al centroide del área sombreada. Luego, usando el segundo teorema de Pappus-Guldinus, determine el volumen formado por revolución del área en torno del eje x.



Prob. 9.89

http://librosysolucionarios.net

* 9.5 Resultante de un sistema general de fuerzas distribuidas

En la sección 4.10 se estudió el método utilizado para simplificar una distribución de cargas que es uniforme en la dirección de un eje de una superficie rectangular. En esta sección generalizaremos este método para incluir superficies de forma arbitraria y sujetas a una distribución variable de cargas. Como aplicación específica, en la sección 9.6 encontraremos la carga resultante que actúa sobre la superficie de un cuerpo sumergido en un fluido.

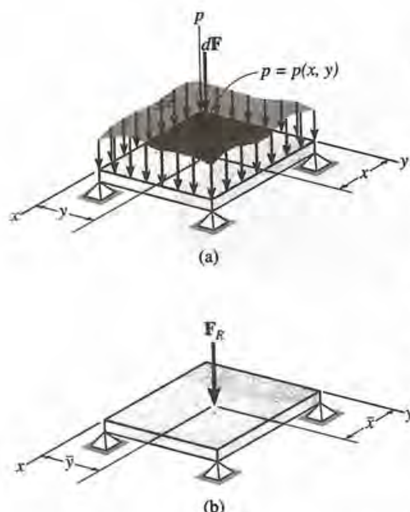


Fig. 9.22

Distribución de presiones sobre una superficie. Consideremos la placa plana mostrada en la figura 9.22a que se encuentra sometida a la función de cargas $p = p(x, y)$ Pa, donde 1 pascal, $Pa = 1\ N/m^2$. Conociendo esta función, podemos determinar la *magnitud* de la fuerza infinitesimal $d\mathbf{F}$ que actúa en el área diferencial dA m^2 de la placa, localizada en el punto arbitrario (x, y). Esta magnitud de fuerza es simplemente $dF = [p(x,y)\ N/m^2](dA\ m^2) = [p(x,y)\ dA]$N. La carga completa sobre la placa se representa, por tanto, como un sistema de *fuerzas paralelas* en número infinito y que actúan en elementos diferenciales de área separados dA. Este sistema de fuerzas paralelas se simplificará a una sola fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ que actúa por un punto único $(\bar{x}, \bar{y})$ de la placa, figura 9.22*b*.

Magnitud de la fuerza resultante. Para determine la *magnitud* de $\mathbf{F}_R$, es necesario sumar cada una de las fuerzas diferenciales $d\mathbf{F}$ que actúan sobre el *área total de la superficie A*. Esta suma puede expresarse matemáticamente como una integral:

$F_R = \Sigma F;$

$$F_R = \int_A p(x, y)\, dA = \int_V dV \qquad (9.13)$$

Note que $p(x, y)\, dA = dV$ es el elemento *diferencial de volumen* mostrado en la figura 9.22*a*. Por tanto, el resultado indica que la *magnitud de la fuerza resultante es igual al volumen total bajo el diagrama de distribución de cargas*.

Localización de la fuerza resultante. La localización $(\bar{x}, \bar{y})$ de $\mathbf{F}_R$ se determina poniendo los momentos de $\mathbf{F}_R$ igual a los momentos respectivos de todas las fuerzas $d\mathbf{F}$ al rededor de los ejes x, y. De la figura 9.22*a* y 9.22*b*, usando la ecuación 9.13, tenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_A x p(x, y)\, dA}{\int_A p(x, y)\, dA} = \frac{\int_V x\, dV}{\int_V dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_A y p(x, y)\, dA}{\int_A p(x, y)\, dA} = \frac{\int_V y\, dV}{\int_V dV} \qquad (9.14)$$

http://librosysolucionarios.net

Luego entonces, puede verse que la *línea de acción de la fuerza resultante pasa por el centro geométrico o centroide del volumen bajo el diagrama de distribución de cargas.*

* 9.6 Presión de fluidos

De acuerdo con la ley de Pascal, un fluido en reposo crea en un punto p una presión que es la misma en todas las direcciones. La magnitud de p, medida como fuerza por unidad de área, depende solamente del peso específico o densidad de masa del fluido y la profundidad z del punto a partir de la superficie del fluido.* La relación puede expresarse matemáticamente como

$$p = \gamma z = \rho g z \tag{9.15}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. La ecuación 9.15 es válida solamente para fluidos que son por hipótesis *incompresibles,* que es el caso de casi todos los líquidos. Los gases son fluidos compresibles y, dado que su densidad cambia significativamente con la presión y con la temperatura, no puede usarse la ecuación 9.15.

Para ilustrar la aplicación de la ecuación 9.15, consideremos la placa sumergida mostrada en la figura 9.23. Se han especificado tres puntos de la placa. Ya que los puntos A y B están ambos

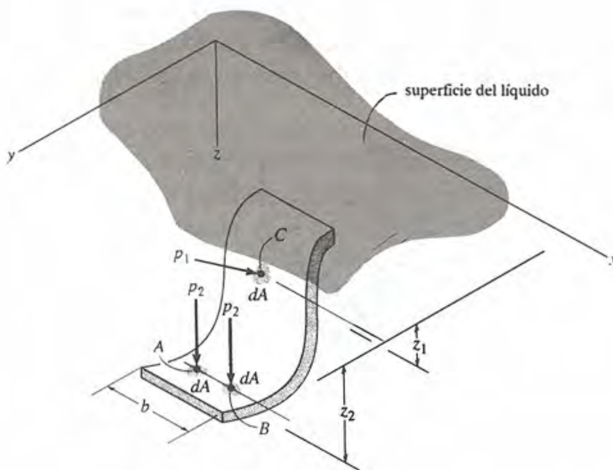


Fig. 9.23

* En particular, para el agua, $\gamma = 62.4$ lb/ft^3, o $\gamma = 9810$ N/m^3, ya que $\rho = 1000$ kg/m^3 y $g = 981$ m/s^2.

http://librosysolucionarios.net

a profundidad z_2 a partir de la superficie del líquido, la *presión* en estos puntos tiene magnitud $p_2 = \gamma z_2$. Asimismo, el punto C se encuentra a profundidad z_1; luego $p_1 = \gamma z_1$. En todos los casos, la presión actúa *normalmente* al área superficial dA localizada en el punto especificado, figura 9.23. Usando la ecuación 9.15 y los resultados de la sección 9.5, es posible determinar la fuerza resultante de una distribución de presiones de un líquido, y especificar su localización sobre la superficie de una placa sumergida. Ahora se considerarán tres diferentes formas de placas.

Placa plana de espesor constante. En la figura 9.24*a* se muestra una placa plana rectangular de espesor constante, que está sumergida en un líquido de peso específico γ. El plano de la placa forma un ángulo θ con la horizontal, de manera que su borde superior se localiza a la profundidad z_1 de la superficie del líquido y su borde inferior se localiza a la profundidad z_2. Como la presión varía linealmente con la profundidad, ecuación 9.15, la distribución de presión sobre la superficie de la placa se representa por un volumen trapezoidal de intensidad de $p_1 = \gamma z_1$ a profundidad z_1, y $p_2 = \gamma z_2$ a profundidad z_2. Como se vio en la sección 9.5, la magnitud de la *fuerza resultante* $\mathbf{F}_R$ es igual al *volumen* de este diagrama de carga y tiene una *línea de acción* que pasa a través del centroide del volumen C. Note que $\mathbf{F}_R$ no actúa en el centro de la placa sino en el punto P, llamado *centro de presión.*

Como la placa tiene un *espesor constante*, la distribución de carga también puede representarse en dos dimensiones, figura 9.24*b*. Aquí la intensidad de carga se mide como fuerza/longitud y varía linealmente desde $w_1 = bp_1 = b\gamma z_1$ a $w_2 = bp_2 = b\gamma z_2$. La magnitud de $\mathbf{F}_R$ en este caso es igual al área trapezoidal, y $\mathbf{F}_R$ tiene una *línea de acción* que pasa a través del *centroide* C del área. Para aplicaciones numéricas, el área y la localización del centroide para un trapecio están tabuladas en la información anexa al final del libro.

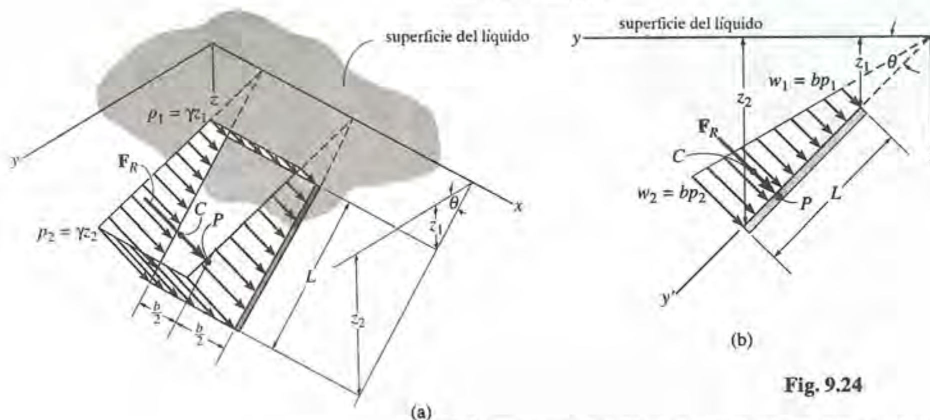


Fig. 9.24

Placa curva de espesor constante. Cuando la placa sumergida es curva, la presión que actúa perpendicularmente a la placa

http://librosysolucionarios.net

cambia de dirección continuamente y, por consiguiente, el cálculo de la magnitud de $\mathbf{F}_R$ y su localización P son más difíciles que para una placa plana. En las figuras 9.25*a* y 9.25*b* se muestran vistas bi y tridimensionales de la distribución de carga, respectivamente. Aquí puede usarse la integración para determinar tanto F_R como la localización del centroide C o el centro de presión P.

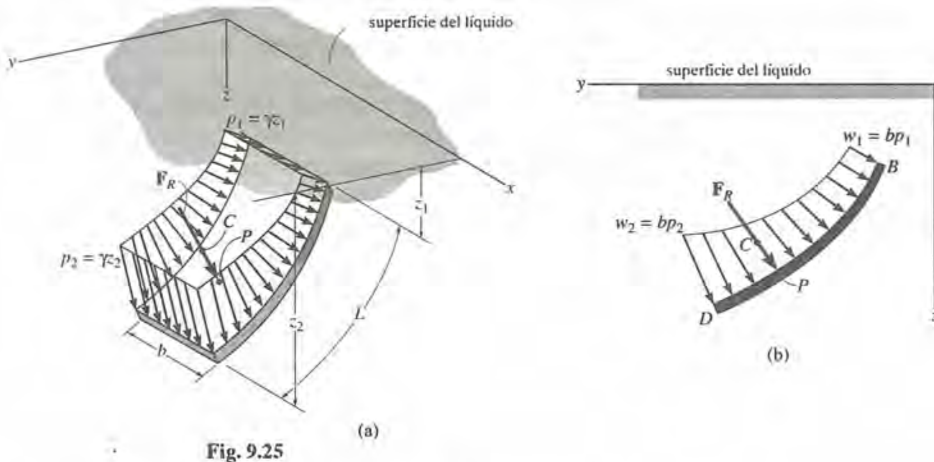


Fig. 9.25

Sin embargo, existe un método más simple para calcular la magnitud de $\mathbf{F}_R$ y su localización a lo largo de una placa curva (o plana) que tenga un *espesor constante.* Este método requiere cálculos separados para las *componentes* horizontal y vertical de $\mathbf{F}_R$. Por ejemplo, la carga distribuida que actúa en la superficie superior de la placa curva DB en la figura 9.25*b* puede representarse por medio de la *carga equivalente* mostrada en la figura 9.26. Aquí, la placa soporta el peso del líquido W_f contenido dentro del bloque BDA. Esta fuerza tiene una magnitud de $W_f = (\gamma b)(\text{área}_{BDA})$ y actúa por el centroide de BDA. Además, están las distribuciones de presión causadas por el líquido y que actúa a lo largo de los lados vertical y horizontal del bloque. A lo largo del lado vertical AD, la fuerza $\mathbf{F}_{AD}$ tiene una magnitud que es igual al área bajo el trapecio y actúa a través del centroide C_{AD} de esta área. La carga distribuida a lo *largo del lado horizontal AB* es constante, ya que todos los puntos de este plano están a la misma profundidad respecto a la superficie del líquido. La magnitud de $\mathbf{F}_{AB}$ es simplemente el área del rectángulo. Esta fuerza actúa a través del centroide del área, C_{AB}, o punto medio de AB. Sumando las tres fuerzas de la figura 9.26*b*, se llega a $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AD} + \mathbf{F}_{AB} + W_f$, como se muestra en la figura 9.25. Finalmente, la localización del centro de presión P en la placa se determina aplicando la ecuación $M_{R_O} = \Sigma M_O$, que establece que el momento de la fuerza resultante en torno a de un punto de referencia conveniente, figura 9.25, es igual a la suma de los momentos de las tres fuerzas en la figura 9.26, en torno del mismo punto.

http://librosysolucionarios.net

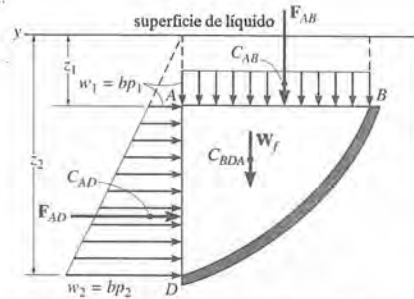


Fig. 9.26

Placa plana de espesor variable. La distribución de presión que actúa sobre la cara superior de una placa sumergida que tiene un espesor variable se muestra en la figura 9.27. La fuerza resultante de esta carga es igual al volumen descrito, si se toma como base el área de la placa y como altura la distribución de presión con variación lineal. El elemento sombreado mostrado en la figura 9.27 puede usarse si se escoge el método de integración para determinar este volumen. El elemento consiste de una faja de área $dA = x\,dy'$, localizada a la profundidad z bajo la superficie del líquido. Como sobre dA actúa una presión uniforme $p = \gamma z$ (fuerza/área), la magnitud de la fuerza diferencial $d\mathbf{F}$ es igual a $dF = dV = p\,dA = \gamma z(x\,dy')$. Si integramos sobre el volumen total, tenemos

$$F_R = \int_V dV = V$$

De la ecuación 9.14, el centroide V define el punto a través del cual actúa $\mathbf{F}_R$. El centro de presión que queda situado sobre la superficie de la placa, justamente abajo de C, tiene coordenadas $p(\bar{x}, \bar{y}')$ definidas por las ecuaciones

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\,dV}{\int_V dV} \quad \bar{y}' = \frac{\int_V \tilde{y}'\,dV}{\int_V dV}$$

Este punto *no* debe confundirse con el centroide del área de la placa.

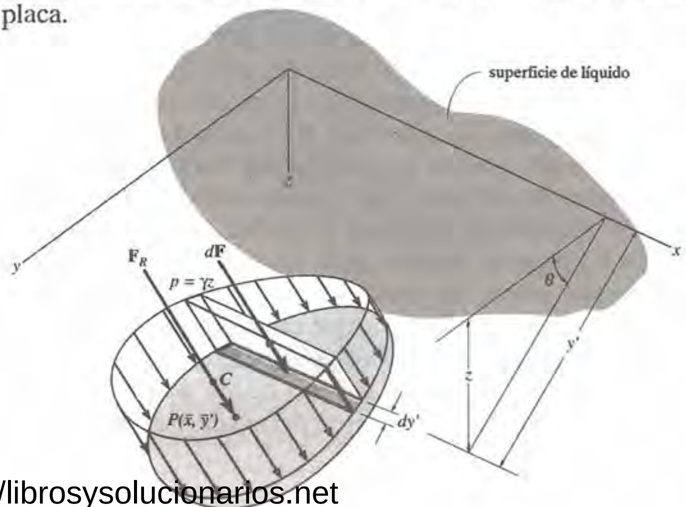
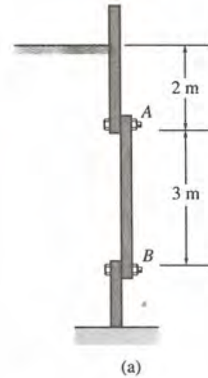


Fig. 9.27

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.12

Determine la magnitud y la localización de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la placa sumergida *AB* mostrada en la figura 9.28*a*. La placa tiene un ancho de 1.5 m, $\rho_w = 1000\ \text{kg/m}^3$



(a)

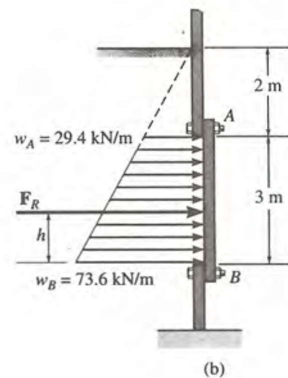
SOLUCIÓN

Como la placa tiene un ancho constante, la carga distribuida puede verse en dos dimensiones como en la figura 9.28*b*. La intensidad de la carga en *A* y *B* se calcula como

$$w_A = b\rho_w g z_A = (1.5\ \text{m})(1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(2\ \text{m})$$
$$= 29.4\ \text{kN/m}$$
$$w_B = b\rho_w g z_B = (1.5\ \text{m})(1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(5\ \text{m})$$
$$= 73.6\ \text{kN/m}$$

Si consultamos la tabla anexa al final del libro, encontramos que la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ producida por la carga distribuida es

$$F_R = \text{área del trapezoide}$$
$$= \tfrac{1}{2}(3)(29.4 + 73.6) = 154.5\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

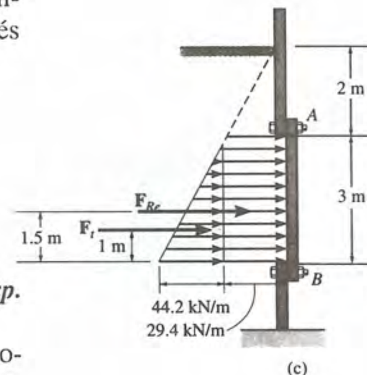
Esta fuerza actúa a través del centroide del área,

$$h = \frac{1}{3}\left(\frac{2(29.4) + 73.6}{29.4 + 73.6}\right)(3) = 1.29\ \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

medida hacia arriba de *B*, figura 9.28*b*.

Los mismos resultados pueden obtenerse considerando dos componentes de $\mathbf{F}_R$ definidas por el triángulo y el rectángulo mostrados en la figura 9.28*c*. Cada fuerza actúa a través de su centroide asociado y tiene una magnitud de

$$F_{Re} = (29.4\ \text{kN/m})(3\ \text{m}) = 88.2\ \text{kN}$$
$$F_t = \tfrac{1}{2}(44.2\ \text{kN/m})(3\ \text{m}) = 66.3\ \text{kN}$$



(c)

Por tanto

$$F_R = F_{Re} + F_t = 88.2 + 66.3 = 154.5\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

La localización de $\mathbf{F}_R$ se determina por el principio de momentos aplicado en *B*, figura 9.28*b* y *c*, es decir,

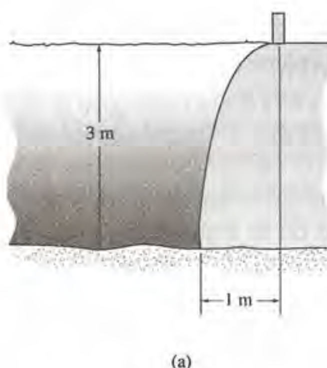
$$\curvearrowleft + (M_R)_B = \Sigma M_B; \qquad (154.5)h = 88.2(1.5) + 66.3(1)$$
$$h = 1.29 \qquad \textit{Resp.}$$

Fig. 9.28

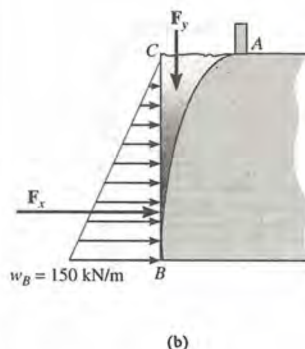
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.13

Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la superficie de un malecón con sección transversal en forma de una parábola, como se muestra en la figura 9.29*a*. El malecón tiene 5 m de longitud, $\rho_w = 1020 \text{ kg/m}^3$.



(a)



(b)

Fig. 9.29

SOLUCIÓN

Se calcularán las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante, figura 9.29*b*. Como

$$w_B = b\rho_w g z_B = 5 \text{ m}(1020 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m}) = 150.0 \text{ kN/m}$$

entonces

$$F_x = \tfrac{1}{2}(3 \text{ m})(150.0) \text{ kN/m}) = 225.0 \text{ kN}$$

El área del sector parabólico *ABC* puede determinarse usando la tabla anexa al final del libro. Por tanto, el peso del agua dentro de esta región es

$$F_y = (\rho_w g b)(\text{área}_{ABC})$$
$$= (1020 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})[\tfrac{1}{3}(1 \text{ m})(3 \text{ m})] = 50.0 \text{ kN}$$

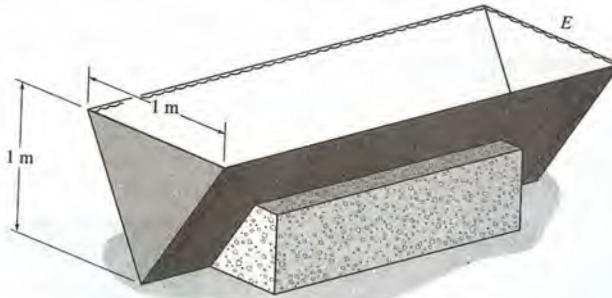
Por consiguiente, la fuerza resultante es

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(225.0)^2 + (50.0)^2}$$
$$= 230 \text{ kN}$$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 9.14

Determine la magnitud y la localización de la fuerza resultante que actúa sobre las placas triangulares extremas de la artesa para agua, mostrada en la figura 9.30a; $\rho_w = 1000$ kg/m³



(a)

SOLUCIÓN

En la figura 9.30*b* se muestra la carga de presión que actúa sobre la placa extrema *E*. La magnitud de la fuerza resultante **F** es igual al volumen de este diagrama de carga. Se resolverá el problema por integración. Si escogemos el volumen diferencial indicado en la figura, tenemos

$$dF = dV = p\,dA = \rho_w gz(2x\,dz) = 19\,620zx\,dz$$

La ecuación de la recta *AB* es

$$x = 0.5(1 - z)$$

Por tanto, Si sustituimos e integrarmos con respecto a *z*, desde $z = 0$ hasta $z = 1$ m, obtenemos como resultado

$$F = V = \int_V dV = \int_0^1 (19\,620)z\,[0.5(1 - z)]\,dz$$

$$= 9810 \int_0^1 (z - z^2)\,dz = 1635 \text{ N} = 1.64 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

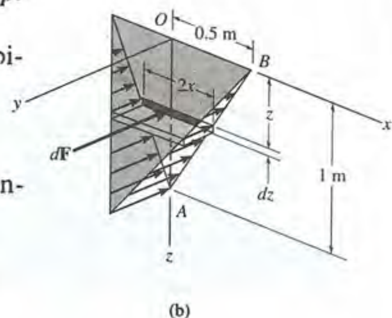
Esta resultante pasa a través del *centroide del volumen*. Debido a la simetría,

$$\bar{x} = 0$$

Como $\tilde{z} = z$ para el elemento de volumen en la figura 9.3*b*, entonces

$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^1 z(19\,620)z[0.5(1 - z)]\,dz}{1635} = \frac{9810\int_0^1 (z^2 - z^3)\,dz}{1635}$$

$$= 0.5\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



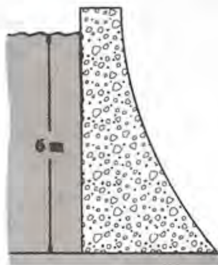
(b)

Fig. 9.30

http://librosysolucionarios.net

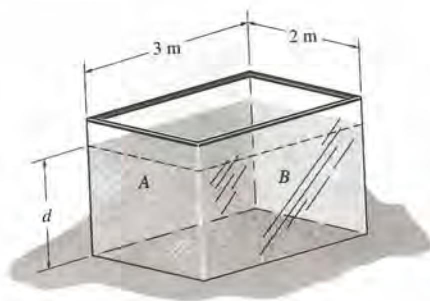
PROBLEMAS

9.90. Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre el muro de la presa y su localización medida a partir de la superficie superior del agua. El espesor del muro es 8 m; $\rho_w = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



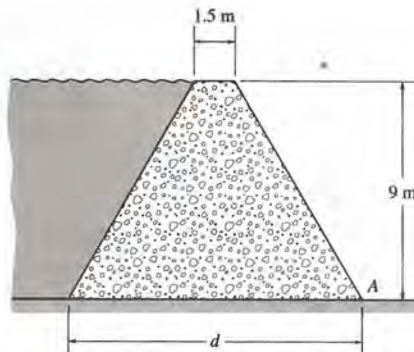
Prob. 9.90

9.91. El tanque se llena con agua hasta una altura $d = 4$ m. Determine la fuerza resultante que el agua ejerce sobre el lado A y el lado B del tanque. Si se pone aceite en vez de agua en el tanque, ¿qué altura deberá tener para crear las mismas fuerzas resultantes? $\rho_o = 900 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$.



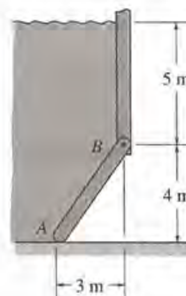
Prob. 9.91

***9.92.** El dique "de gravedad" hecho de concreto se mantiene en posición gracias a su propio peso. Si la densidad del concreto es $\rho_c = 2.5 \text{ Mg/m}^3$, y el agua tiene densidad de $\rho_w = 1.0 \text{ Mg/m}^3$, determine la mínima anchura d en su base que impedirá que el dique se vuelque por su extremo A. El dique tiene 8 m de espesor.



Prob. 9.92

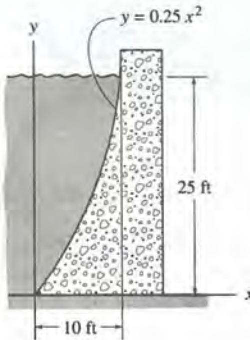
9.93. La compuerta AB tiene 8 m de ancho. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre el pasador en B y la reacción vertical en apoyo liso A, $\rho_w = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



Prob. 9.93

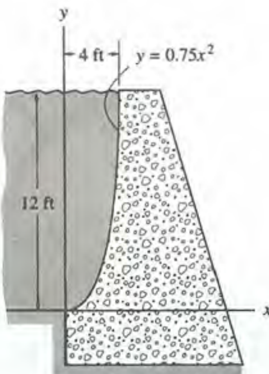
http://librosysolucionarios.net

9.94. Determine las componentes horizontal y vertical de fuerza que ejerce el agua sobre el lado del dique. El dique es de 25 ft de largo y $\gamma_w = 62.4\ \text{lb/ft}^3$.



Prob. 9.94

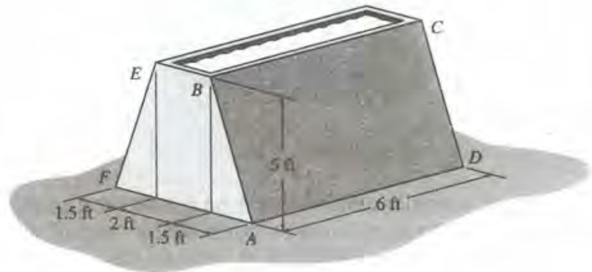
9.95. Determine la fuerza hidrostática resultante que actúa por cada pie (ft) de longitud sobre el dique marítimo; $\gamma_w = 62.4\ \text{lb/ft}^3$.



Prob. 9.95

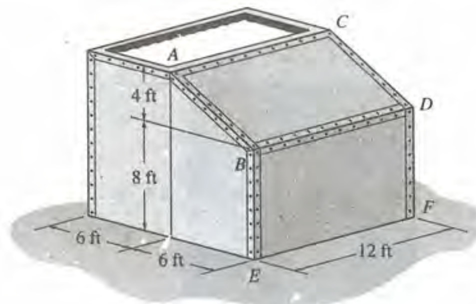
*** 9.96.** El depósito se usa para almacenar un líquido de un peso específico de $\gamma = 80\ \text{lb/ft}^3$. Si está lleno hasta el borde, determine la magnitud de la fuerza que ejerce el líquido sobre el lado *ABCD*.

9.97. El depósito se usa para almacenar un líquido de un peso específico de $\gamma = 80\ \text{lb/ft}^3$. Si está lleno hasta el borde, determine la magnitud de la fuerza que ejerce el líquido sobre el lado *ABEF*.



Probs. 9.96/9.97

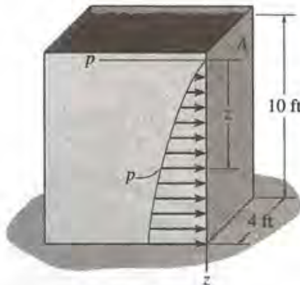
9.98. El tanque se usa para almacenar un líquido con una densidad de $80\ \text{lb/ft}^3$. Si está completamente lleno, determine la magnitud de la fuerza que el líquido ejerce sobre cada uno de sus lados *ABDC* y *BDFE*.



Prob. 9.98

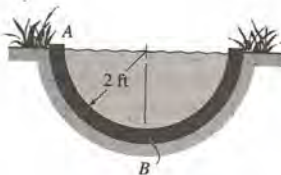
http://librosysolucionarios.net

9.99. La tolva rectangular está llena de carbón, al cual crea una distribución de presión a lo largo de la pared A que varía como se muestra, es decir, $p = 4z^3$ lb/ft^2, donde z se mide en pies. Determine la fuerza resultante creada por el carbón, y especifique su localización medida desde la superficie superior del carbón.



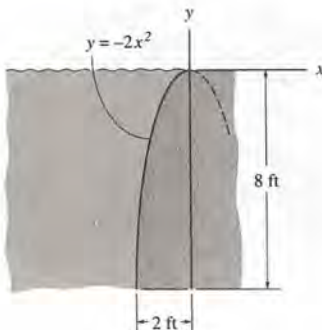
Prob. 9.99

*** 9.100.** El drenaje semicircular se ha llenado con agua. Determine las componentes horizontal y vertical de fuerza que el agua ejerce en el lado AB del tubo de drenaje por pie de longitud de tubo; $\gamma_w = 62.4$ lb/ft^3.



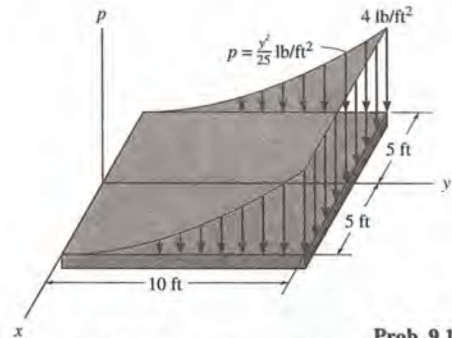
Prob. 9.100

9.101. Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa por pie de longitud sobre el dique marítimo; $\gamma_w = 62.4$ lb/ft^3.



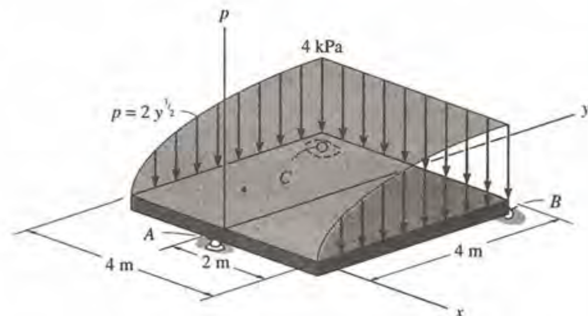
Prob. 9.101

9.102. Determine la magnitud y localización de la fuerza resultante de la distribución parabólica de cargas que actúa sobre la placa.



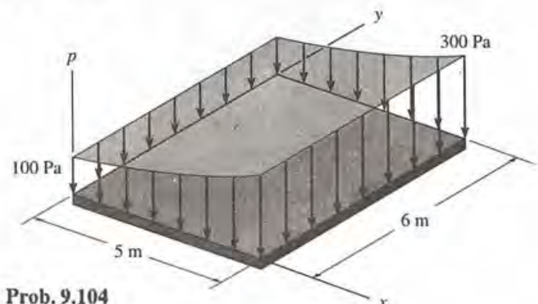
Prob. 9.102

9.103. La acción de las cargas sobre una placa cuadrada está representada por una distribución parabólica. Determine la magnitud y localización de la fuerza resultante. También, ¿cuáles son las reacciones en los rodillos B y C y la rótula de apoyo en A. Se despreciará el peso de la placa.



Prob. 9.103

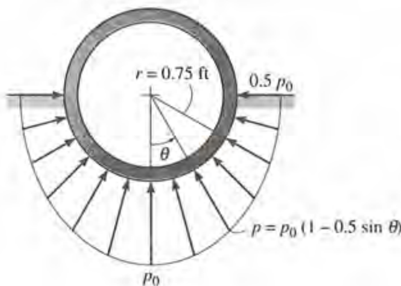
*** 9.104.** La carga de presión sobre la placa está descrita por la función $p = [-240/(x + 1) + 340]$ Pa. Determine la magnitud de la fuerza resultante y las coordenadas del punto donde la línea de acción de la fuerza interseca el plano.



Prob. 9.104

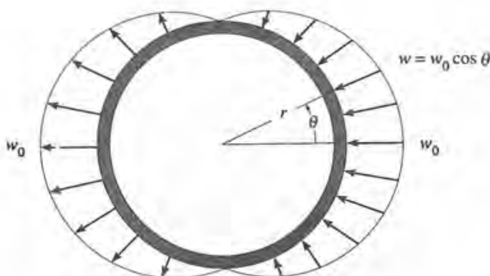
http://librosysolucionarios.net

9.105. El apoyo ejerce sobre el tubo la distribución de cargas. El tubo pesa 50 lb y tiene 3 ft de longitud: determinar la magnitud de p_o para el equilibrio. *Sugerencia:* la fuerza que actúa sobre el segmento diferencial $r\,d\theta$ del tubo es $dF = p(3\text{ ft})\,r\,d\theta$. Esta fuerza tiene componentes horizontal y vertical de magnitud dF sen θ y dF cos θ, respectivamente.



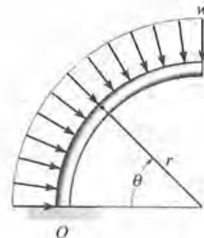
Prob. 9.105

9.106. Determine la fuerza resultante de la distribución de cargas que actúa por unidad de longitud del tubo. *Sugerencia*: la fuerza que actúa en el segmento diferencial $r\,d\theta$ del tubo es $dF = wrd\theta$. Esta fuerza tiene componentes horizontal y vertical de dF cos θ y dF sen θ, respectivamente.



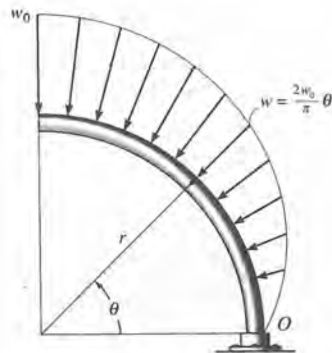
Prob. 9.106

9.107. La barra curva está sometida a la distribución de cargas uniforme. Determine las componentes de la reacción en el apoyo fijo, para que se dé el equilibrio. *Sugerencia:* vea el problema 9.106



Prob. 9.107

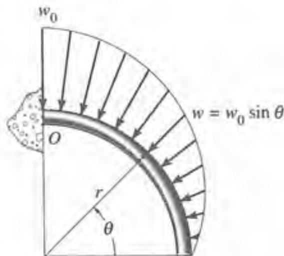
*** 9.108.** La carga distribuida varía a lo largo de la barra curva de manera lineal, de tal forma que se mide en radianes. Determine las componentes de la reacción en el apoyo fijo, necesaria para el equilibrio. *Sugerencia:* vea el problema 9.106.



Prob. 9.108

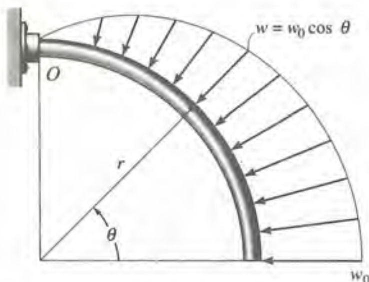
http://librosysolucionarios.net

9.109. Reemplace las cargas distribuidas que actúan sobre el miembro curvo por las componentes horizontal y vertical de una fuerza resultante equivalente y el momento de un par que actúa en *O*. *Sugerencia*: vea el problema 9.106.



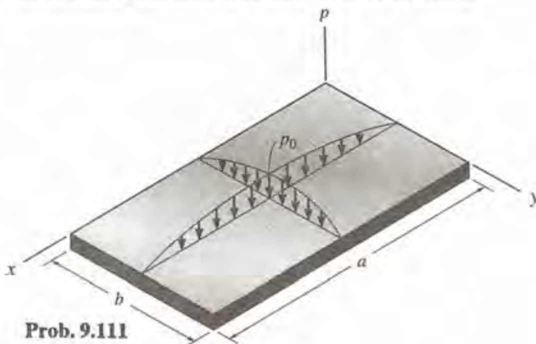
Prob. 9.109

9.110. Reemplace las cargas distribuidas que actúan sobre el miembro curvo por una fuerza resultante equivalente y momento de un par que actúan en el punto *O*. *Sugerencia*: vea el problema 9.106.



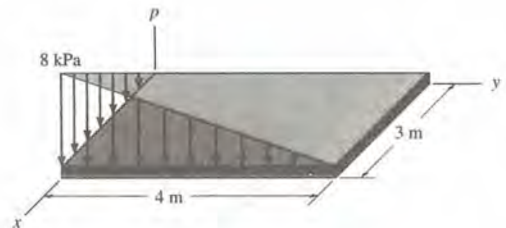
Prob. 9.110

9.111. La placa rectangular está sometida a una distribución de cargas sobre toda la superficie. Si la carga está definida por la expresión $p = p_o$ sen $(\pi x/a)$ sen $(\pi y/b)$, donde p_o representa la presión que actúa en el centro de la placa, determine la magnitud y localización de la fuerza resultante que actúa sobre la placa.



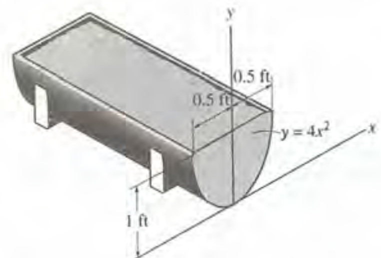
Prob. 9.111

*** 9.112.** La carga sobre la placa varía linealmente a lo largo de la misma y de modo tal que $p = \frac{2}{3}[x(4 - y)]$ kPa. Determine la fuerza resultante y su posición (x, y) en la placa.



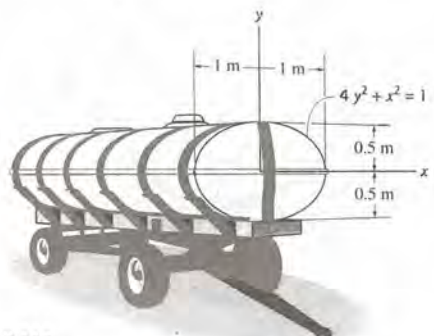
Prob. 9.112

9.113. La pileta se ha construido a partir de una pieza metálica y de modo que sus placas delantera y trasera tiene forma parabólica. Si se llena con agua de un peso específico de 62.4 lb/ft^3, determine la fuerza resultante en los extremos si el nivel del agua es (*a*) 0.5 ft, y (*b*) 1 ft.



Prob. 9.113

9.114. El tanque se ha llenado con un líquido cuya densidad es 900 kg/m^3. Determine la fuerza resultante que ejerce sobre la placa elíptica en un extremo del tanque, y la localización del centro de presión, medida desde el eje *x*.



Prob. 9.114

http://librosysolucionarios.net

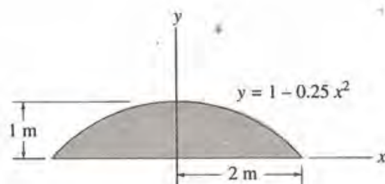
PROBLEMAS DE REPASO

9.115. Determine la distancia $\bar{y}$ al eje centroidal $\bar{x}-\bar{x}$ de la sección transversal de la viga. Desprecie el tamaño de las soldaduras esquineras en A y en B, para los cálculos.



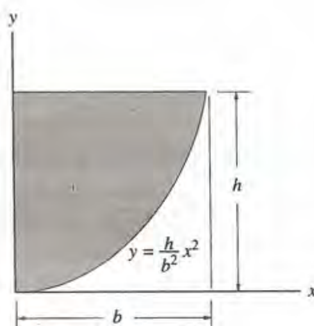
Prob. 9.115

*** 9.116.** Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del área de la placa.



Prob. 9.116

9.117. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área parabólica.



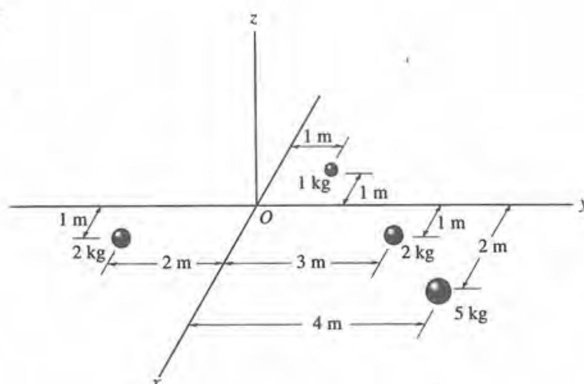
Prob. 9.117

9.118. Determine la distancia z al centro de gravedad para el paraboloide truncado. El material es homogéneo.



Prob. 9.118

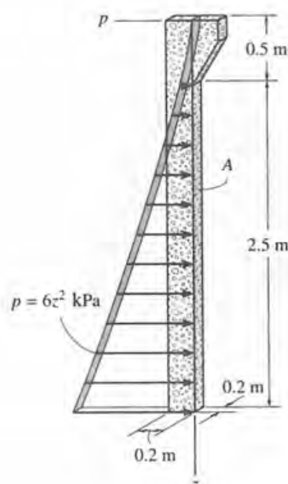
9.119. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa para el sistema de cuatro partículas situadas en el plano x–y.



Prob. 9.119

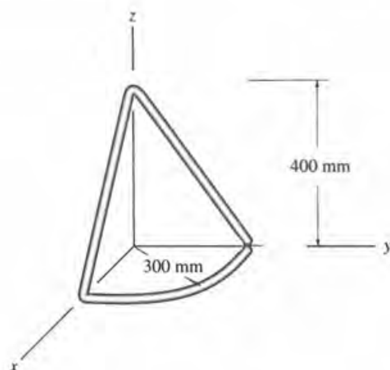
http://librosysolucionarios.net

***9.120.** El molde se usa para colar columnas de concreto. Determine la fuerza resultante que el concreto húmedo ejerce a lo largo de la placa A, $0.5 \text{ m} \leq z \leq 3\text{m}$, si la presión debida al concreto varía como se muestra. Especifique la localización de la fuerza resultante, midiendo desde el punto más alto de la columna.



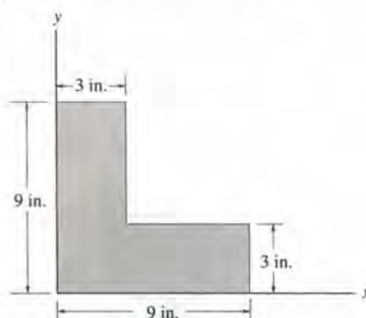
Prob. 9.120

9.121. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centro de gravedad del alambre homogéneo.



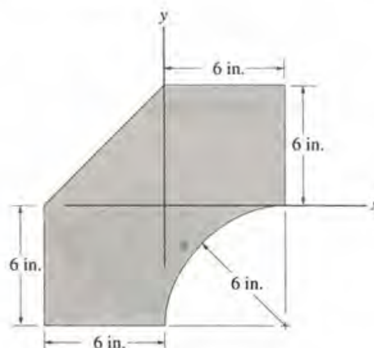
Prob. 9.121

9.122. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del área.



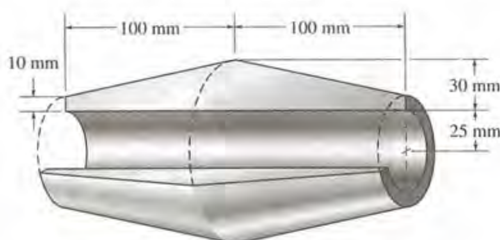
Prob. 9.122

9.123. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide de la placa homogénea.



Prob. 9.123

***9.124.** Determine el volumen de acero que se necesita para producir la pieza ahusada. La sección transversal se muestra, aunque la pieza es de circunferencia completa. También, calcular la superficie exterior de la pieza , excluyendo los extremos.



Prob. 9.124

http://librosysolucionarios.net

10 Momentos de inercia

En este capítulo se desarrollará un método para determinar el momento de inercia para un área y para un cuerpo de masa especificada. El momento de inercia de un área es una propiedad importante en la ingeniería, ya que debe determinarse o especificarse antes de analizar o diseñar un miembro estructural o una pieza mecánica. Por otro lado, el momento de inercia de masa de un cuerpo debe ser conocido al proponerse estudiar el movimiento del cuerpo.

10.1 Definición de los momentos de inercia para las áreas

En el capítulo precedente determinamos el centroide para un área por consideración del primer momento del área alrededor de un eje; es decir, para llevar a cabo el cálculo era necesario evaluar una integral de la forma $\int x\,dA$. Las integrales del segundo momento de un área, tales como $\int x^2\,dA$, se denominan el *momento de inercia* del área. La terminología "momento de inercia", como aquí la usamos, es una designación errónea; sin embargo, la hemos adoptado por su semejanza con las integrales de la misma forma relacionadas con la masa.

El momento de inercia de un área se origina cuando es necesario calcular el momento de una carga distribuida que varía linealmente desde el eje de momento. Un ejemplo característico de esta clase de carga lo tenemos en la carga de presión debida a un líquido sobre la superficie de una placa sumergida. En la sección 9.6 fue señalado que la presión, o fuerza por unidad de área, ejercida en un punto localizado a distancia z por debajo de la su-

http://librosysolucionarios.net

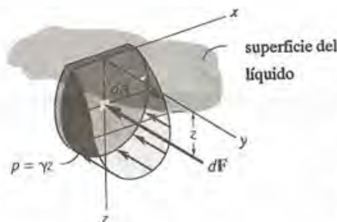


Fig. 10.1

perficie de un líquido es $p = \gamma z$, ecuación 9.15, donde γ es el peso específico del líquido. Así, la magnitud de la fuerza ejercida por un líquido sobre el área dA de la placa sumergida que se muestra en la figura 10.1 es $dF = p\,dA = \gamma z\,dA$. El momento de esta fuerza en torno al eje x de la placa es $dM = dFz = \gamma z^2\,dA$, y por tanto, el momento creado por la totalidad de la distribución de presiones es $M = \gamma \int z^2\,dA$. Aquí la integral representa el momento de inercia del área de la placa alrededor del eje x. Ya que las integrales de esta forma suelen darse en las fórmulas de la mecánica de fluidos, la mecánica de materiales, mecánica estructural, y diseño de máquinas el ingeniero debería familiarizarse con los métodos utilizados para calcularlas.

Momento de inercia. Consideremos el área A, que se muestra en la figura 10.2, situada en el plano x-y. Por definición, los momentos de inercia del área plana diferencial dA en torno al eje x y al eje y son, $dI_x = y^2\,dA$ y $dI_y = x^2\,dA$, respectivamente. Para el área total *los momentos de inercia* se determinan por integración, es decir,

$$I_x = \int_A y^2\,dA$$
$$I_y = \int_A x^2\,dA \tag{10.1}$$

También podemos formular el segundo momento del área diferencial dA en torno al polo O o el eje z, figura 10.2. A esto nos referimos como el momento polar de inercia, $dJ_O = r^2\,dA$. Aquí r es la distancia perpendicular del polo (eje z) al elemento dA. Para el área total, el momento polar de inercia es

$$J_O = \int_A r^2\,dA = I_x + I_y \tag{10.2}$$

La relación entre J_O e I_x, I_y es posible, dado que $r^2 = x^2 + y^2$, figura 10.2.

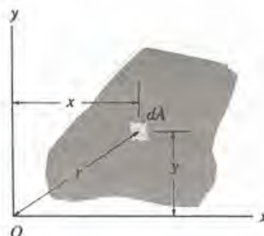


Fig. 10.2

http://librosysolucionarios.net

De las formulaciones anteriores se ve que I_x, I_y y J_O serán *siempre positivos*, pues involucran el producto de la distancia al cuadrado con un área. Además, las unidades para el momento de inercia involucran longitud a la cuarta potencia, por ejemplo, m^4, mm^4, o ft^4, in^4.

10.2 Teorema de los ejes paralelos para un área

Si se conoce el momento de inercia de un área alrededor de un eje que pasa por su centroide, conviene determinar el momento de inercia del área en torno a un eje correspondiente paralelo usando el *teorema de los ejes paralelos*. Para deducir este teorema, consideremos la determinación del momento de inercia de la región sombreada que se muestra en la figura 10.3, alrededor del eje x. En este caso, un elemento diferencial dA del área se localiza a una distancia arbitraria y' a partir del eje *centroidal* x', mientras que la *distancia fija* entre los ejes paralelos x y x' se define como d_y. Como el momento de inercia de dA alrededor del eje x es $dI_x = (y' + d_y)^2\, dA$, entonces para la totalidad del área,

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_A (y' + d_y)^2\, dA \\
&= \int_A y'^2\, dA + 2d_y \int_A y'\, dA + d_y^2 \int_A dA
\end{aligned}
$$

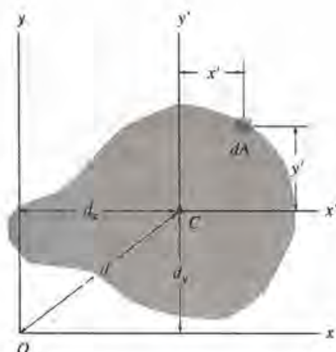


Fig. 10.3

La primera integral representa el momento de inercia del área en torno al eje centroidal, $\bar{I}_{x'}$. La segunda integral es cero, ya que el eje x' pasa a través del centroide del área C; es decir, $\int y'\, dA = \bar{y} \int dA = 0$, puesto que $\bar{y} = 0$. Si comprendemos que la tercera integral representa la totalidad del área A, el resultado final es, por lo tanto,

http://librosysolucionarios.net

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \tag{10.3}$$

Una expresión semejante puede escribirse para I_y, es decir

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 \tag{10.4}$$

Y, finalmente, para el momento polar de inercia en torno a un eje perpendicular al plano x–y y que pasa a través del polo O (eje z), figura 10.3, tenemos

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \tag{10.5}$$

La forma de cada una de estas ecuaciones establece que *el momento de inercia de un área alrededor de un eje es igual al momento de inercia, del área en torno a un eje paralelo que pasa a través del centroide más el producto del área y el cuadrado de la distancia perdendicular entre los ejes.*

10.3 Radio de giro de un área

El *radio de giro* de un área plana se usa a menudo para el diseño de columnas en mecánica estructural. Siempre que se *conozcan* el área y los momentos de inercia, los radios de giro se determinarán a partir de las fórmulas

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{10.6}$$

Note que la forma de estas ecuaciones se recuerda fácilmente, ya que es semejante a las que se usan para encontrar el momento de inercia de un área diferencial alrededor de un eje. Por ejemplo, $I_x = k_x^2 A$; mientras que para un área diferencial, $dI_x = y^2\, dA$.

10.4 Momentos de inercia para un área por integración

Cuando las fronteras de un área plana pueden expresarse mediante funciones matemáticas, las ecuaciones 10.1 pueden integrarse para determinar los momentos de inercia para el área. Si el elemento de área escogido para la integración tiene un tamaño diferencial en dos direcciones, como se indica en la figura 10.2, debe efectuarse una doble integración para evaluar el mo-

http://librosysolucionarios.net

mento de inercia. Sin embargo, muy a menudo, es más fácil escoger un elemento que tenga un tamaño diferencial o espesor en una dirección solamente, debido a que entonces el cálculo requiere solamente una integración simple.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Si se efectúa una sola integración para determinar el momento de inercia de un área alrededor de un eje, será necesario determinar primero el elemento diferencial dA. La mayoría de las veces este elemento será rectangular con longitud finita y ancho diferencial. El elemento se localizará de modo que corte la frontera del área en el punto arbitrario (x, y).Existen dos maneras posibles de orientar el elemento respecto al eje alrededor del cual se determinará. El momento de inercia.

Caso 1. La *longitud* del elemento puede orientarse en forma *paralela* al eje. Esta situación ocurre cuando se usa el elemento rectangular mostrado en la figura 10.4 para calcular el I_y del área. La aplicación *directa* de la ecuación 10.1, es decir, $I_y = \int x^2 dA$, puede hacerse en este caso, ya que el elemento tiene grosor infinitesimal dx, y luego *todas las partes* del elemento se localizan a la *misma* distancia de brazo de palanca x del eje y.*

Caso 2. La *longitud* del elemento puede orientarse paralelamente al eje. Aquí la ecuación 10.1 *no se aplica*, ya que *no* todas las partes del elemento *quedan* a la misma distancia del eje. Por ejemplo, si se usa el elemento rectangular de la figura 10.4 para calcular el I_x del área, primero será necesario calcular el momento de inercia del *elemento* en torno a un eje horizontal que pase a través de su centroide y después determinar el momento de inercia del *elemento* alrededor del eje x usando el teorema de los ejes paralelos. La integración de este resultado conducirá a I_x.

Los ejemplos siguientes ilustran la aplicación para cada uno de los casos.

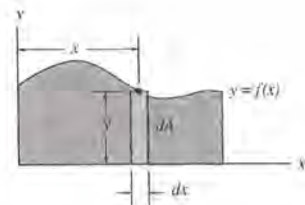


Fig. 10.4

*En el caso del elemento $dA = dx\,dy$, figura 10.2, los brazos de palanca y, x son adecuados para la formulación de I_x e I_y (ecuación 10.1) ya que *todo* el elemento, debido a su "pequeñez" queda situado a las distancias perpendiculares y, x especificadas a partir de los ejes x, y.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.1

Determine el momento de inercia para el área rectangular mostrada en la figura 10.5 con respecto a (*a*) el eje x' centroidal, (*b*) al eje x_b, que pasa a través de la base del rectángulo y (*c*) al polo o eje z' perpendicular al plano x'–y', y que pasa a través del centroide C.

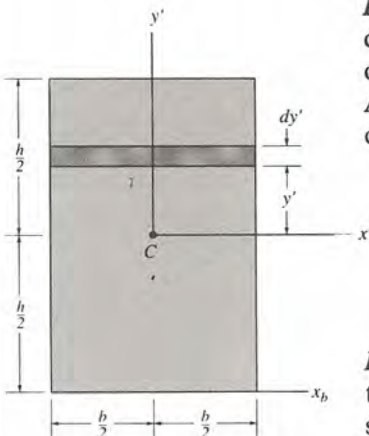


Fig. 10.5

SOLUCIÓN (*CASO I*)

Parte (a). Se escoge para la integración el elemento diferencial mostrado en la figura 10.5. Debido a su localización y orientación, todo el elemento está a la distancia y' del eje x'. Aquí es necesaria la integración de $y' = -h/2$ a $y' = h/2$. Dado que $dA = b\,dy'$, entonces

$$\bar{I}_{x'} = \int_A y'^2\,dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2(b\,dy') = b\int_{-h/2}^{h/2} y'^2\,dy'$$

$$= \frac{1}{12}bh^3 \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b). El momento de inercia en torno a un eje que pasa a través de la base del rectángulo puede obtenerse usando el resultado de la parte (*a*) y aplicando el teorema de los ejes paralelos, ecuación 10.3.

$$I_{x_b} = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}bh^3 \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (c). Para obtener el momento polar de inercia alrededor del punto C, debemos obtener primero $\bar{I}_{y'}$, que puede encontrarse intercambiando las dimensiones b y h en el resultado de la parte (*a*), en cuyo caso

$$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}hb^3$$

Usando la ecuación 10.2, el momento polar de inercia alrededor de C es, por lo tanto,

$$\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}bh(h^2 + b^2) \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.2

Determine el momento de inercia del área sombreada mostrado en la figura 10.6*a* alrededor del eje *x*.

SOLUCIÓN I (*Caso 1*)

Se escoge para la integración un elemento diferencial de área que es *paralelo* al eje *x*, como se muestra en la figura 10.6a. Como el elemento tiene un espesor dy e intersecta a la curva en el punto arbitrario (x, y), el área es $dA = (100 - x)\,dy$. Además, todas las partes del elemento quedan a la misma distancia y del eje x. Por tanto, si integramos con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 200$ mm, obtenemos como resultado

$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_A y^2(100 - x)\,dy$$
$$= \int_0^{200} y^2\left(100 - \frac{y^2}{400}\right)dy = 100\int_0^{200} y^2\,dy - \frac{1}{400}\int_0^{200} y^4\,dy$$
$$= 107(10^6)\text{ mm}^4$$

SOLUCIÓN II (*Caso 2*)

Para la integración se escoge un elemento diferencial *paralelo* al eje y, como se muestra en la figura 10.6*b*. Este elemento interseca a la curva en el punto arbitrario (x, y). En este caso, *no* todas las partes del elemento quedan a la misma distancia del eje x; por consiguiente, debe usarse el teorema de los ejes paralelos para determinar el *momento de inercia del elemento* alrededor del eje. En la parte (*a*) del ejemplo 10.1 se ha calculado el momento de inercia de un rectángulo que tiene una base b y una altura h, en torno a un eje centroidal. Ahí se encontró que $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$. Para el elemento diferencial mostrado en la figura 10.6*b*, $b = dx$ y $h = y$, de modo que $d\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}\,dx\,y^3$. Como el centroide del elemento está a una distancia $\tilde{y} = y/2$ del eje x, el momento de inercia del elemento alrededor del eje x es

$$dI_x = d\bar{I}_{x'} + dA\,\tilde{y}^2 = \frac{1}{12}\,dx\,y^3 + y\,dx\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}y^3\,dx$$

[Este resultado también puede concluirse de la parte (b) del ejemplo 10.1].

Si integramos con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = 100$ mm, tendremos

$$I_x = \int dI_x = \int_A \frac{1}{3}y^3\,dx = \int_0^{100} \frac{1}{3}(400x)^{3/2}\,dx$$
$$= 107(10^6)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

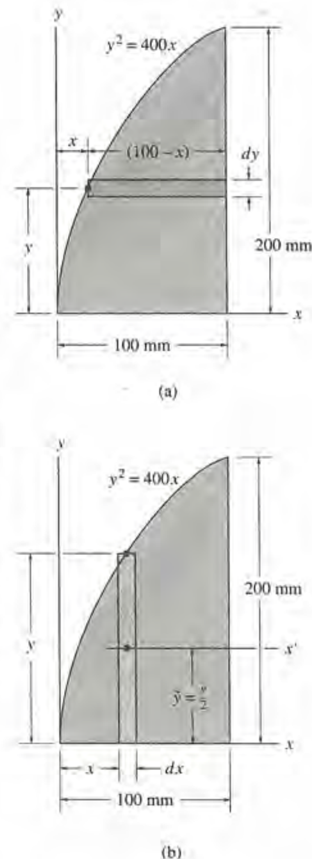
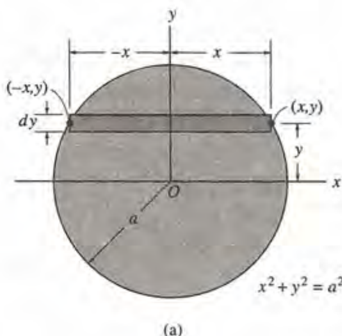


Fig. 10.6

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.3

Determine el momento de inercia en torno al eje x del área circular mostrada en la figura 10.7a.



SOLUCIÓN I (*Caso 1*)

Si usamos el elemento diferencial mostrado en la figura 10.7a, como $dA = 2x\,dy$, tenemos

$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_A y^2(2x)\,dy$$

$$= \int_{-a}^{a} y^2(2\sqrt{a^2 - y^2})\,dy = \frac{\pi a^4}{4} \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II (*Caso 2*)

Cuando se escoge el elemento diferencial como se muestra en la figura 10.7b, el centroide del elemento queda situado sobre el eje x y, por lo tanto, si aplicamos la ecuación 10.3, teniendo en cuenta que $dA = 2y\,dx$, tenemos

$$dI_x = \frac{1}{12}\,dx\,(2y)^3$$

$$= \frac{2}{3}y^3\,dx$$

Si integramos con respecto a x, se obtiene

$$I_x = \int_{-a}^{a} \frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = \frac{\pi a^4}{4} \qquad \textit{Resp.}$$

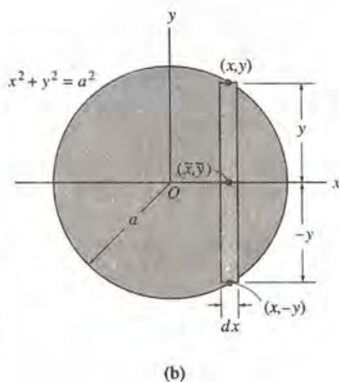


Fig. 10.7

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.4

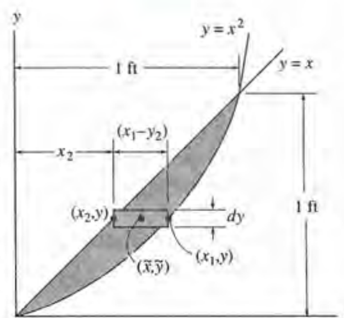
Determine el momento de inercia de la región sombreada que se muestra en la figura 10.8*a*, alrededor del eje *x*.

SOLUCIÓN I (*Caso 1*)

El elemento diferencial de área paralelo al eje x se toma para integrar figura 10.8*a*. El elemento interseca la curva en los puntos arbitrarios (x_2, y) y (x_1, y). En consecuencia, su área es $dA = (x_1 - x_2)\,dy$. Como todas las partes del elemento están a la misma distancia y del eje x, tenemos

$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_0^1 y^2(x_1 - x_2)\,dy = \int_0^1 y^2(\sqrt{y} - y)\,dy$$

$$I_x = \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{1}{4}y^4\Big|_0^1 = 0.0357 \text{ ft}^4 \qquad \textit{Resp.}$$



(a)

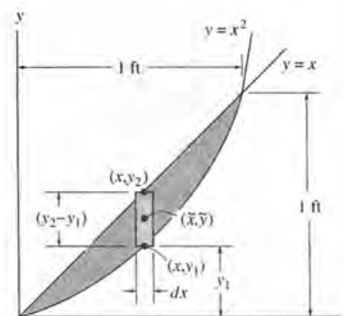
SOLUCIÓN II (*Caso 2*)

El elemento diferencial de área paralelo al eje y se muestra en la figura 10.8*b*. Este elemento interseca las curvas en los *puntos arbitrarios* (x, y_2) y (x, y_1). Ya que *no* todas las partes se encuentran a la misma distancia del eje x, debemos usar primeramente el teorema de los ejes paralelos para encontrar el momento de inercia del elemento en torno al eje x, y luego integrar este resultado para determinar I_x. Así,

$$dI_x = d\bar{I}_{x'} + dA\,\bar{y}^2 = \frac{1}{12}dx\,(y_2 - y_1)^3 + (y_2 - y_1)\,dx\left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}(y_2^3 - y_1^3)\,dx = \frac{1}{3}(x^3 - x^6)\,dx$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^3 - x^6)\,dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{21}x^7\Big|_0^1 = 0.0357 \text{ ft}^4 \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

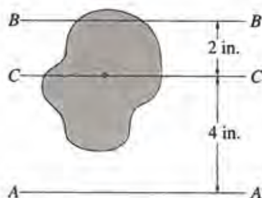
Fig. 10.8

Por comparación, la solución I requiere muchos menos cálculos. Si se dificulta la integral de un elemento particular, debe intentarse resolver el problema usando un elemento orientado en el otro sentido.

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

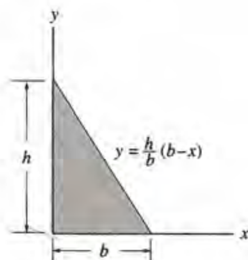
10.1. El área irregular tiene un momento de inercia en torno al eje A–A que es igual a 500 in^4. Si el área total tiene un valor de 12 in^2, determine el momento de inercia alrededor del eje B–B. El eje C–C pasa por el centroide.



Prob. 10.1

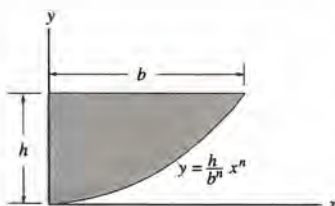
10.2. Determine el momento de inercia del área triangular en torno al eje x.

10.3. Determine el momento de inercia del área triangular en torno al eje y.



Probs. 10.2/10.3

*** 10.4.** Determine los momentos de inercia I_x e I_y del área sombreada.



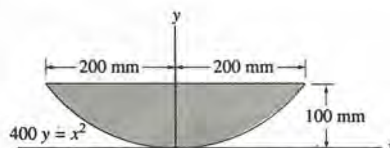
Prob. 10.4

10.5. Determine el momento de inercia alrededor eje x del área limitada por las líneas $x = 0$, $y = 1$ in y la parábola $y = 3x^2$.

10.6. Determine los momentos de inercia en torno a los ejes $x\,y$ del área limitada por la curva $y^2 = 2x$ y las rectas $x = 2$ in $y = 0$.

10.7. Determine los momentos polares de inercia J_O para la sección transversal de una flecha sólida de radio 20 mm y un tubo de radio exterior 20 mm e interior 15 mm. ¿En qué porcentaje de J_O contribuye el tubo respecto a la flecha sólida?

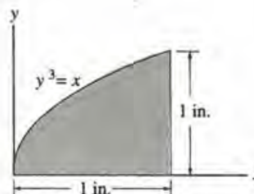
*** 10.8.** Determine el momento de inercia del área en torno al eje x.



Prob. 10.8

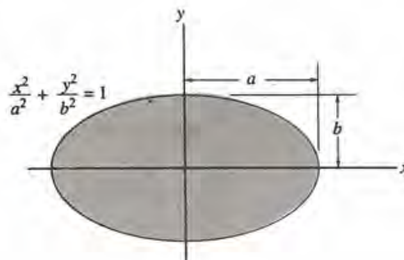
10.9. Determine el momento de inercia del área sombreada en torno al eje x.

10.10. Determine el momento de inercia del área sombreada alrededor al eje y.



Probs. 10.9/10.10

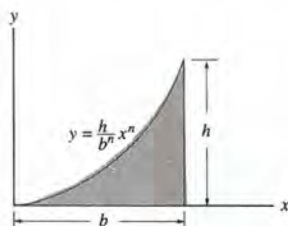
10.11. Determine el momento de inercia de la región sombreada respecto del eje x.



Prob. 10.11

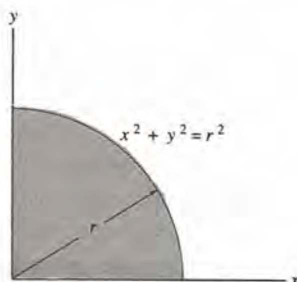
http://librosysolucionarios.net

* **10.12.** Determine los momentos de inercia de la región sombreada en torno a los ejes x e y.



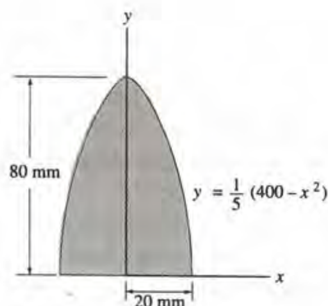
Prob. 10.12

10.13. Determine los momentos de inercia del cuarto de círculo en torno al eje x.



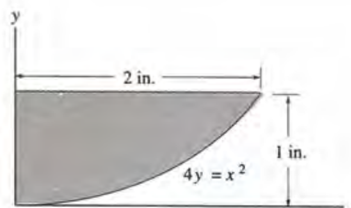
Prob. 10.13

10.14. Determine el radio de giro del área sombreada alrededor del eje y.



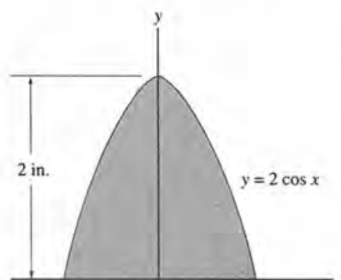
Prob. 10.14

10.15. Determine el momento de inercia de la región sombreada en torno al eje x.



Prob. 10.15

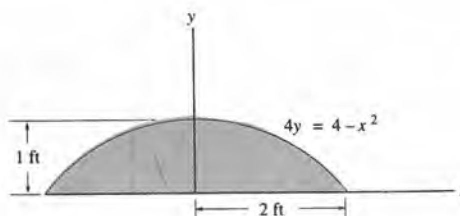
* **10.16.** Determine los momentos de inercia de la región sombreada en torno a los ejes x y y.



Prob. 10.16

10.17. Determine el momento de inercia de la región sombreada alrededor del eje y.

10.18. Determine el momento de inercia de la región sombreada alrededor del eje x.



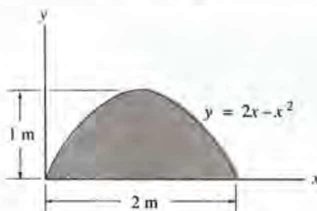
Probs. 10.17/10.18

http://librosysolucionarios.net

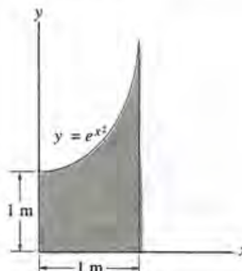
10.19. Determine el momento de inercia del área sombreada alrededor del eje x.

* **10.20.** Determine el momento de inercia de la región sombreada alrededor del eje y.

10.21. Determine el momento de inercia del área sombreada alrededor del eje y. Use la regla de Simpson para evaluar la integral.



Probs. 10.19/10.20



Prob. 10.21

10.5 Momentos de inercia para áreas compuestas

Un área compuesta consta de una serie de áreas "más simples" unidas, tales como semicírculos, rectángulos y triángulos. Siempre que se conozca el momento de inercia de cada una de esas partes o pueda calcularse con respecto a un eje común, el momento de inercia del área compuesta será igual a la *suma algebraica* de los momentos de inercia de todas su partes componentes.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento proporciona un método para determine el momento de inercia de un área compuesta en torno a un eje de referencia.

Partes constitutivas. Usando un croquis, divida el área en sus partes constitutivas e indique la distancia perpendicular a partir del *centroide* de cada parte al eje de referencia.

Teorema de los ejes paralelos. El momento de inercia de cada parte deberá calcularse en torno a su eje centroidal que sea paralelo al eje de referencia. Para el cálculo, use la tabla de la parte interior de la cubierta. Si el eje centroidal no coincide con el eje de referencia, deberá usarse el teorema de ejes paralelos, $I = \bar{I} + Ad^2$, para determinar el momento de inercia de la parte, en torno al eje de referencia.

Sumas. El momento de inercia de toda el área alrededor del eje de referencia se determina sumando los resultados de sus partes componentes. En particular, si un área constitutiva tiene un "agujero", su momento de inercia se encuentra "restando" el momento de inercia del agujero al momento de inercia de la parte que incluye el agujero.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.5

Calcule el momento de inercia del área compuesta mostrada en la figura 10.9*a* alrededor del eje *x*.

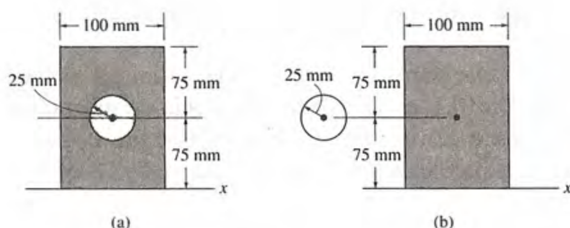


Fig. 10.9

SOLUCIÓN

Partes constitutivas. El área compuesta se obtiene *restando* el círculo del rectángulo, como se indica en la figura 10.9*b*. El centroide de cada área está localizado en la figura.

Teorema de los ejes paralelos. Los momentos de inercia en torno al eje *x* se calculan usando el teorema de ejes paralelos y la información de la tabla anexa al final del libro.

Círculo

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\ \text{mm}^4$$

Rectángulo

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\ \text{mm}^4$$

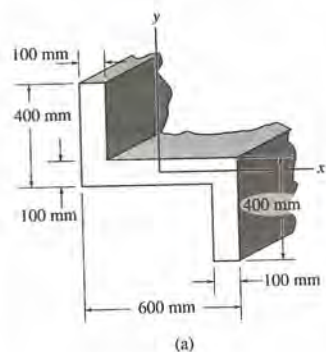
Suma. Así, el momento de inercia para el área compuesta es

$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$
$$= 101(10^6)\ \text{mm}^4$$ ***Resp.***

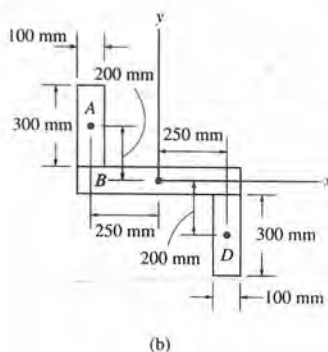
http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.6

Calcule los momentos de inercia del área de la sección transversal de la viga mostrada en la figura 10.10*a* alrededor de los ejes centroidales *x*, *y*.



(a)



(b)

Fig. 10.10

SOLUCIÓN

Partes constitutivas. La sección transversal puede considerarse formada por las tres áreas rectangulares componentes, *A*, *B* y *D*, mostradas en la figura 10.10*b*. Para el cálculo, el centroide de cada uno de estos rectángulos se localiza en la figura.

Teorema de los ejes paralelos. Según la tabla anexa al final del libro, o ejemplo 10.1, el momento de inercia de un rectángulo en torno a su eje centroidal es $\bar{I} = \frac{1}{12}bh^3$. Por tanto, usando el teorema de ejes paralelos para los rectángulos *A* y *D*, los cálculos son como sigue:

Rectángulo A

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$
$$= 1.425(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$
$$= 1.90(10^9)\ \text{mm}^4$$

Rectángulo B

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\ \text{mm}^4$$

Rectángulo D

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$
$$= 1.425(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$
$$= 1.90(10^9)\ \text{mm}^4$$

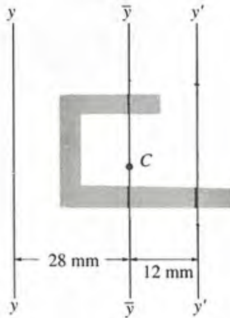
Sumas. Los momentos de inercia para toda la sección transversal son.

$$I_x = 1.425(10^9) + 0.05(10^9) + 1.425(10^9)$$
$$= 2.90(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$
$$I_y = 1.90(10^9) + 1.80(10^9) + 1.90(10^9)$$
$$= 5.60(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

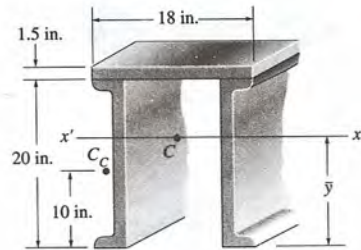
PROBLEMAS

10.22. El área tiene momento de inercia de $25(10^6)$ mm^4 alrededor del eje y–y. Si el área es $15(10^3)$ mm^2, determine el momento de inercia del área en torno al eje y'–y'. El eje $\bar{y}$–$\bar{y}$ pasa por el centroide C del área.



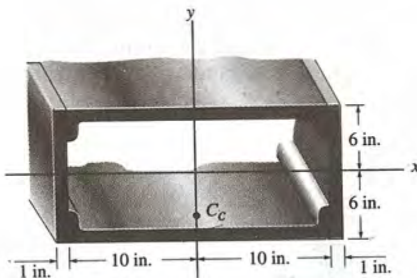
Prob. 10.22

***10.24.** Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide de la viga construida con dos canales y una placa de cubierta. Si cada canal tiene área en sección transversal de $A_C = 11.8$ in^2 y un momento de inercia alrededor de un eje horizontal que pasa por su centroide, C_C, de $(\bar{I}_{\bar{x}})_{C_C} = 349$ in^4, determine el momento de inercia de la viga respecto al eje x'–x'.



Prob. 10.24

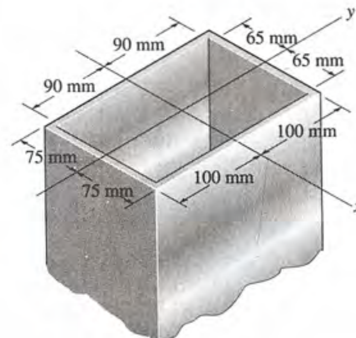
10.23. La viga ha sido construida con dos canales y dos cubiertas. Si cada canal tiene área en sección transversal $A_C = 11.8$ in^2 y momento de inercia en torno a un eje vertical que pasa por su centroide, C_C, de $(\bar{I}_{\bar{y}})_{C_C} = 349$ in^4, determine el momento de inercia de la viga alrededor del eje y.



Prob. 10.23

10.25. Determine el radio de giro k_x, de la sección transversal de la columna.

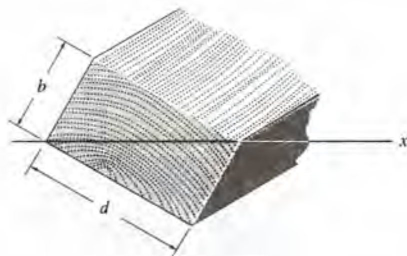
10.26. Determine el radio de giro k_y, de la sección transversal de la columna.



Probs. 10.25/10.26

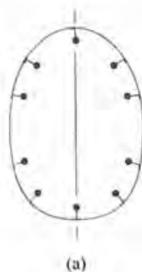
http://librosysolucionarios.net

10.27. Determine el momento de inercia de la sección transversal de la viga alrededor del eje x.

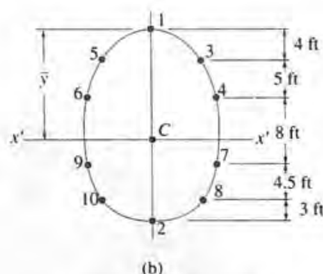


Prob. 10.27

•10.28. El fuselaje de un aeroplano consta de vigas longitudinales cubiertas con hojas metálicas como se muestra en *(a)*. Si las áreas combinadas de los ángulos y la hojas metálicas se tabulan y se suponen concentradas en los puntos 1 a 10 como se muestra en *(b)*, determine la distancia $\bar{y}$ al centroide y el momento de inercia en torno a un eje horizontal $x'x'$ que pasa por el centroide C de la sección transversal total. Usando los elementos de área, note que $\bar{y} = \Sigma\ \tilde{y}A/\Sigma A$ e $\bar{I}_{x'x'} = \Sigma\ \tilde{y}^2A$.



(a)

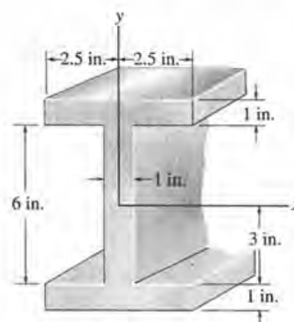


(b)

punto	área de punto
1, 2	0.20 ft²
3, 4, 5, 6	0.25 ft²
7, 8, 9, 10	0.30 ft²

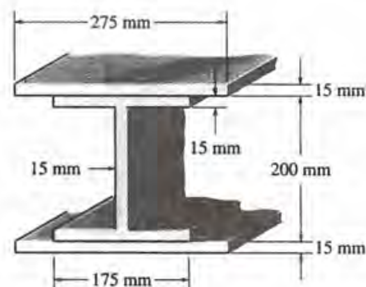
Prob. 10.28

10.29. Determine los momentos de inercia del área sombreada alrededor de los ejes x e y.



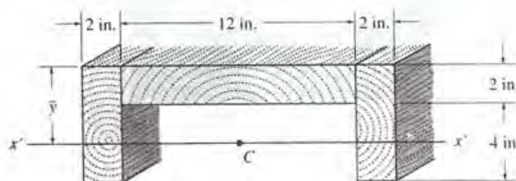
Prob. 10.29

10.30. La viga compuesta consta de una viga de ala ancha y cubreplacas soldadas de la manera que se muestra. Determine el momento de inercia del área en sección transversal alrededor de un eje horizontal que pasa por el centroide de la viga.



Prob. 10.30

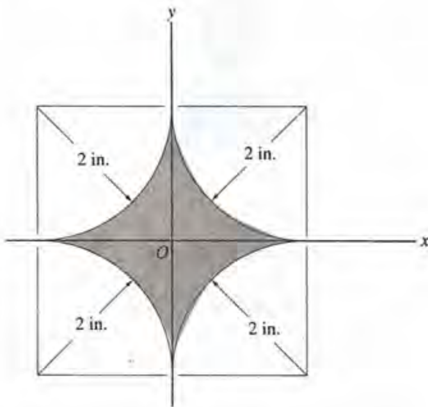
10.31. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide de la sección transversal del canal, y el momento de inercia alrededor del eje x'–x' pasando por el centroide.



Prob. 10.31

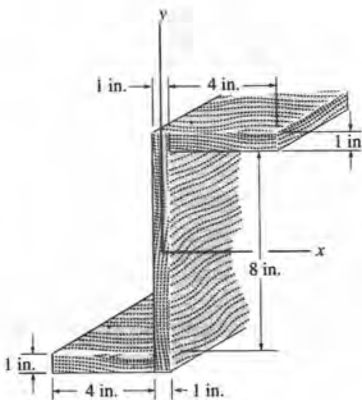
http://librosysolucionarios.net

*** 10.32.** Determine el momento polar de inercia de la región sombreada alrededor del centroide, el punto O.



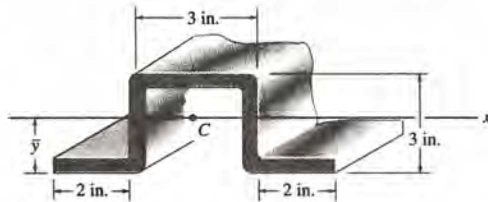
Prob. 10.32

10.33. Determine los momentos de inercia de la sección en "Z" alrededor de los ejes centroidales x y y.



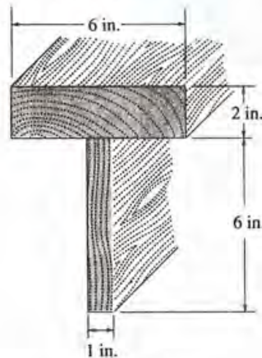
Prob. 10.33

10.34. Determine $\bar{y}$, que localiza el centroide C, de la viga canal, y el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ alrededor del el eje centroidal x'. Desprecie el efecto de redondear las esquinas. El material tiene espesor uniforme de 0.5 in.



Prob. 10.34

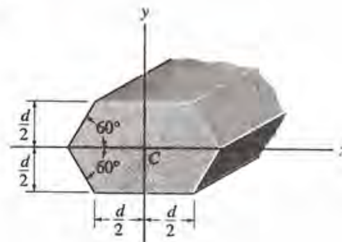
10.35. Determine el momento de inercia del área sombreada en torno a un eje horizontal que pasa por el centroide de la sección.



Prob. 10.35

*** 10.36.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga alrededor del eje x que pasa por el centroide C.

10.37. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga alrededor del eje y que pasa por el centroide C.

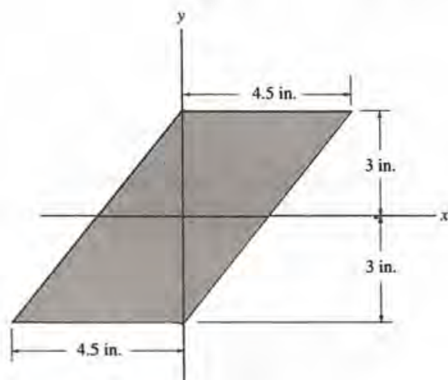


Probs. 10.36/10.37

http://librosysolucionarios.net

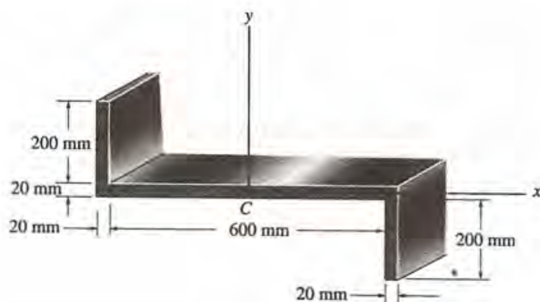
10.38. Determine el momento de inercia del área sombreada en torno al eje x.

10.39. Determine el momento de inercia del área sombreada en torno al eje y.



Probs. 10.38/10.39

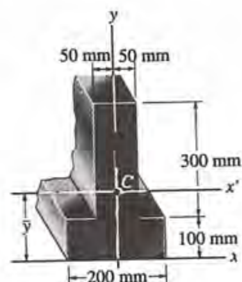
* **10.40.** Determine los momentos de inercia I_x e I_y de la sección en "Z", alrededor de los ejes x e y, que pasan por el centroide C.



Prob. 10.40

10.41. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del área en sección transversal de la viga, encuentre después el momento de inercia alrededor del eje x'.

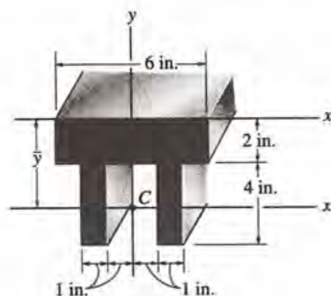
10.42. Determine el momento de inercia del área en sección transversal en torno al eje y.



Prob. 10.41/10.42

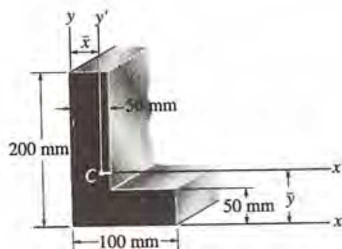
10.43. Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide del área de la sección transversal de la viga; después, determine el momento de inercia alrededor del eje x'.

* **10.44.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga en torno al eje y.



Prob. 10.43/10.44

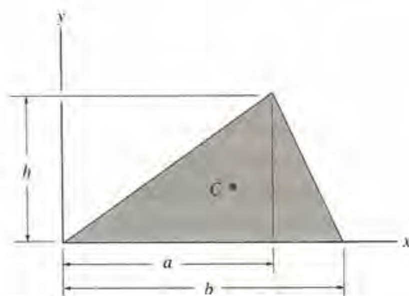
10.45. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide C del área de la sección transversal, y calcule los momentos de inercia alrededor de los ejes x' e y'.



Prob. 10.45

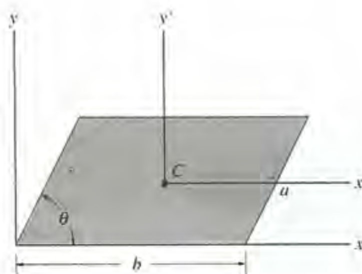
http://librosysolucionarios.net

10.46. Determine los momentos de inercia del área triangular alrededor de los ejes x' y y', que pasan por el centroide del área.



Prob. 10.46

10.47. Determine los momentos de inercia del paralelogramo alrededor de los ejes x' y y', que pasan por el centroide C del área.



Prob. 10.47

* 10.6 Producto de inercia para un área

En general, el momento de inercia para un área es diferente para cada eje alrededor del cual se calcula. En algunas aplicaciones de diseño estructural o mecánico, es necesario conocer la orientación de los ejes que dan, respectivamente, los momentos de inercia máximo y mínimo para el área. En la sección 10.7 se discute el método para determinarlos. Sin embargo, para usar este método, uno debe calcularse primero el producto de inercia para el área así como sus momentos de inercia para los ejes dados x e y.

El producto de inercia para un elemento de área localizado en el punto (x, y), como se indica en la figura 10.11, se define como $dI_{xy} = xy\,dA$. Así, para toda el área A, el *producto de inercia* es

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA \tag{10.7}$$

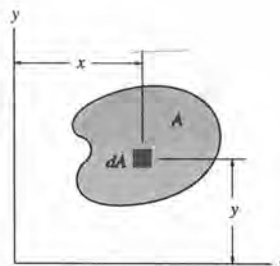


Fig. 10.11

Si se escoge el elemento de área con un tamaño diferencial en dos sentidos, como se indica en la figura 10.11, debe efectuarse una integral doble para calcular I_{xy}. Sin embargo, muy a menudo es más fácil escoger un elemento que tenga un tamaño o espesor diferencial en un sentido solamente, en cuyo caso el cálculo requiere de sólo una integral simple. (vea el ejemplo 10.7).

http://librosysolucionarios.net

Como el momento de inercia, el producto de inercia tiene unidades de longitud elevadas a la cuarta potencia, por ejemplo, m^4, mm^4, ft^4, in^4. Sin embargo, como x o y pueden ser cantidades negativas, mientras que el elemento de área siempre es positivo, el producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de la localización y orientación de los ejes coordenados. Por ejemplo, el producto de inercia I_{xy} para un área será *cero* si cualquiera de los ejes x o y es un eje de *simetría* para el área. Para demostrar esto, consideremos el área sombreada de la figura 10.12, donde para cada elemento dA localizado en el punto (x, y) hay un elemento correspondiente dA localizado en $(x, -y)$. Como los productos de inercia para estos elementos son, respectivamente, $xy\,dA$ y $-xy\,dA$, la suma algebraica o integración de los productos de inercia para todos los elementos del área que se escogen de esta manera se cancelarán unos con otros. Consecuentemente, el producto de inercia para el área total se vuelve cero. De la definición de I_{xy} también se deduce que el "signo" de esta cantidad depende del cuadrante donde está localizada el área. Como se muestra en la figura 10.13, si el área está rotada de un cuadrante al siguiente, cambia el signo de I_{xy}.

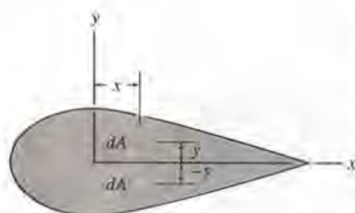


Fig. 10.12

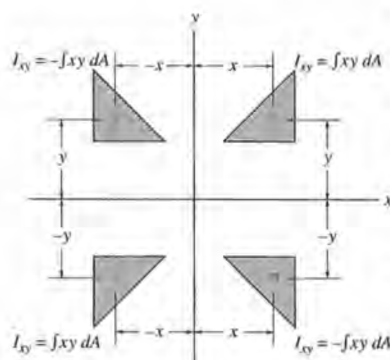


Fig. 10.13

Teorema de los ejes paralelos. Consideremos el área sombreada mostrada en la figura 10.14, donde x' y y' representan un sistema de ejes que pasan por el *centroide* del área, y x y y representan un sistema correspondiente de ejes paralelos. Como el producto de inercia de dA entorno a los ejes x y y es $dI_{xy} = (x' + d_x)(y' + d_y)\,dA$, entonces para toda el área

$$I_{xy} = \int_A (x' + d_x)(y' + d_y)\,dA$$

$$= \int_A x'y'\,dA + d_x\int_A y'\,dA + d_y\int_A x'\,dA + d_xd_y\int_A dA$$

El primer término de la derecha representa el producto de inercia del área con respecto al eje centroidal $\bar{I}_{x'y'}$. Las integrales del segundo y tercer términos son cero, ya que los momentos del área se toman alrededor de los ejes centroidales. Si observamos que la cuarta integral representa el área A, el resultado final es

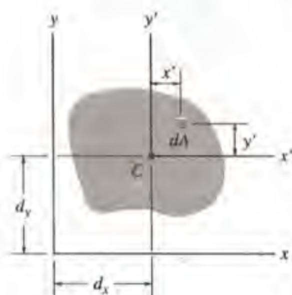


Fig. 10.14

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y \tag{10.8}$$

Debe notarse la semejanza entre esta ecuación y la correspondiente al teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia. En particular, es importante que al aplicar la ecuación 10.8 se conserven los *signos algebraicos* para d_x y d_y. Como se ilustra en el ejemplo 10.8, el teorema de los ejes paralelos tiene una importante aplicación al determinar el producto de inercia de un *área compuesta* con respecto a un sistema de ejes x y y.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.7

Determine el producto de inercia I_{xy} del triángulo mostrado en la figura 10.15*a*.

SOLUCIÓN I

Un elemento diferencial que tiene un espesor dx, figura 10.15*b*, tiene un área $dA = y\,dx$. El producto de inercia del elemento entorno a los ejes x y y se determina usando el teorema de ejes paralelos.

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{x'y'} + dA\,\tilde{x}\,\tilde{y}$$

donde $(\tilde{x}, \tilde{y})$ localizan el centroide del elemento. Como $d\bar{I}_{x'y'} = 0$, debido a la simetría, $\tilde{x} = x, \tilde{y} = y/2$, entonces

$$dI_{xy} = 0 + (y\,dx)\,x\left(\frac{y}{2}\right) = \left(\frac{h}{b}x\,dx\right)x\left(\frac{h}{2b}x\right)$$

$$= \frac{h^2}{2b^2}x^3\,dx$$

Si integramos con respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = b$, obtendremos.

$$I_{xy} = \frac{h^2}{2b^2}\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^2h^2}{8} \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

Un elemento diferencial que tiene un espesor dy, figura 10.15*c*, tiene un área $dA = (b - x)\,dy$. El *centroide* se localiza en el punto $\tilde{x} = x + (b - x)/2 = (b + x)/2, \tilde{y} = y$, de modo que el producto de inercia del elemento viene a ser

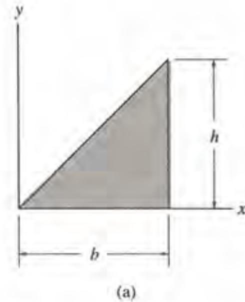
$$dI_{xy} = d\bar{I}_{x'y'} + dA\,\tilde{x}\,\tilde{y}$$

$$= 0 + (b - x)\,dy\left(\frac{b + x}{2}\right)y$$

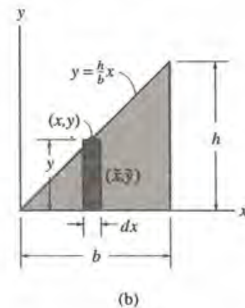
$$= \left(b - \frac{b}{h}y\right)dy\left[\frac{b + (b/h)y}{2}\right]y = \frac{1}{2}y\left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right)dy$$

Si se integra con respecto a y desde $y = 0$ hasta $y = h$, se obtiene como resultado

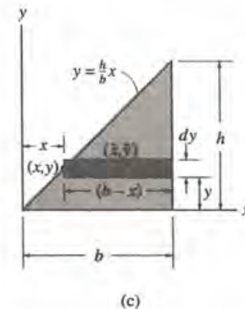
$$I_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^h y\left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right)dy = \frac{b^2h^2}{8} \qquad \textit{Resp.}$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 10.15

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.8

Determine el producto de inercia del área de la sección transversal de la viga, mostrada en la figura 10.16*a*, alrededor de los ejes centroidales *x* e *y*.

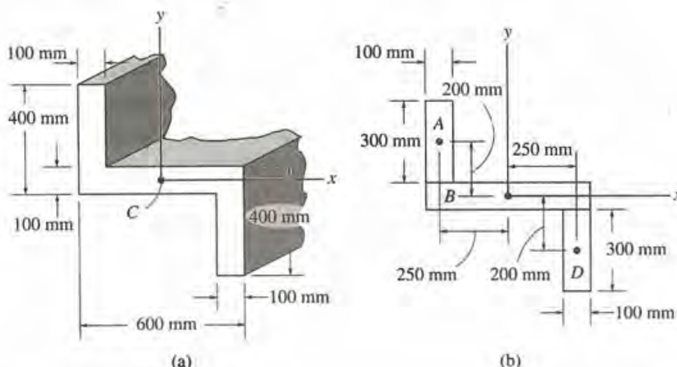


Fig. 10.16

SOLUCIÓN

Como en el ejemplo 10.6, la sección transversal puede considerarse formada por tres áreas rectangulares, *A*, *B* y *D*, figura 10.16*b*. En la figura se indican las coordenadas para el centroide de cada uno de estos rectángulos. Debido a la simetría, el producto de inercia de *cada rectángulo* es *cero* en torno al sistema de ejes *x′*, *y′* que pasan a través del centroide del rectángulo. Por tanto, la aplicación del teorema de los ejes paralelos a cada uno de los rectángulos da por resultado

Rectángulo A

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y \\ &= 0 + (300)(100)(-250)(200) \\ &= -1.50(10^9)\text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Rectángulo B

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rectángulo D

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y \\ &= 0 + (300)(100)(250)(-200) \\ &= -1.50(10^9)\text{ mm}^4 \end{aligned}$$

El producto de inercia para toda la sección transversal es, por tanto

$$I_{xy} = -1.50(10^9) + 0 - 1.50(10^9) = -3.00(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

10.7 Momentos de inercia para un área con respecto a ejes inclinados

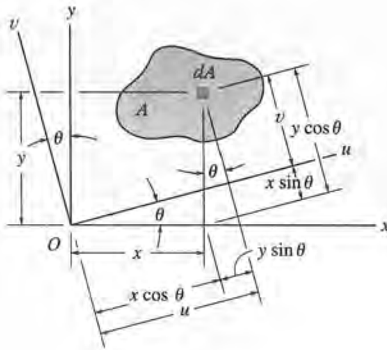


Fig. 10.17

En diseño estructural y mecánico, algunas veces es necesario calcular los momentos y el producto de inercia I_u, I_v e I_{uv} para un área con respecto a un sistema de ejes inclinados u y v, cuando se *conocen* los valores para θ, I_x, I_y e I_{xy}. Para hacerlo, utilizaremos *ecuaciones de transformación* que relacionan las coordenadas x, y con las coordenadas u, v. De la figura 10.17, estas ecuaciones son

$$u = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$$
$$v = y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta$$

Usando estas ecuaciones, los momentos y productos de inercia de dA alrededor de los ejes u y v vienen a ser

$$dI_u = v^2\,dA = (y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)^2\,dA$$
$$dI_v = u^2\,dA = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)^2\,dA$$
$$dI_{uv} = uv\,dA = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)(y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)\,dA$$

Si desarrollamos cada expresión e integramos, considerando que $I_x = \int y^2\,dA$, $I_y = \int x^2\,dA$, e $I_{xy} = \int xy\,dA$, obtenemos

$$I_u = I_x\cos^2\theta + I_y\operatorname{sen}^2\theta - 2I_{xy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$I_v = I_x\operatorname{sen}^2\theta + I_y\cos^2\theta + 2I_{xy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$I_{uv} = I_x\operatorname{sen}\theta\cos\theta - I_y\operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

http://librosysolucionarios.net

Estas ecuaciones pueden simplificarse usando las identidades trigonométricas sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ y cos $2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$, en cuyo caso,

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$
$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (10.9)$$
$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Si se suman las dos primeras ecuaciones miembro a miembro, se ve que el momento polar de inercia en torno al eje z que pasa por el punto 0 es *independiente* de la orientación de los ejes u y v; es decir,

$$J_O = I_u + I_v = I_x + I_y$$

Momentos de inercia principales. A partir de las ecuaciones 10.9 puede verse que I_u, I_v e I_{uv} dependen del ángulo de inclinación θ de los ejes u y v. Ahora determinaremos la orientación de los ejes u y v en torno a la cual los momentos de inercia para el área, I_u e I_v son máximo y mínimo. Estos ejes particulares se llaman los *ejes principales* del área, y los momentos de inercia correspondientes a esos ejes se llaman los *momentos de inercia principales.* En general, hay un sistema de ejes principales para cada origen O escogido, aunque en diseño estructural y mecánico, el centroide del área es una localización importante para O.

El ángulo $\theta = \theta_p$ que define la orientación de los ejes principales para el área puede encontrarse derivando la primera de las ecuaciones 10.9 con respecto a θ e igualando el resultado a cero. Así,

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\text{sen}\,2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Por consiguiente, en $\theta = \theta_p$,

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} \qquad (10.10)$$

http://librosysolucionarios.net

Esta ecuación tiene dos raíces, θ_{p_1} y θ_{p_2}, que difieren en 90° y especifican la inclinación de los ejes principales. Para sustituirlas en la ecuación 10.9, debemos primeramente encontrar el seno y coseno de $2\theta_{p_1}$ y $2\theta_{p_2}$. Esto se puede lograr usando los triángulos mostrados en la figura 10.18, que se basan en la ecuación 10.10.

Para θ_{p_1},

$$\operatorname{sen} 2\theta_{p_1} = -I_{xy} \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

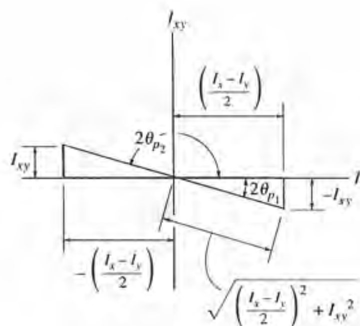


Fig. 10.18

Para θ_{p_2},

$$\operatorname{sen} 2\theta_{p_2} = I_{xy} \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\cos 2\theta_{p_2} = -\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Si sustituimos estos dos conjuntos de relaciones trigonométricas en la primera o en la segunda de las ecuaciones 10.9 y simplificamos, obtenemos

$$I_{\substack{\text{máx} \\ \text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (10.11)$$

Dependiendo del signo que se escoja, este resultado da el momento de inercia máximo o mínimo para el área. Además, si las relaciones trigonométricas anteriores para θ_{p_1} y θ_{p_2} se sustituyen en la tercera de las ecuaciones 10.9, puede verse que $I_{uv} = 0$, es decir, el *producto de inercia con respecto a los ejes principales es cero.* Ya que se indicó en la sección 10.6 que el producto de inercia con respecto a cualquier eje de simetría es cero, se deduce que *cualquier eje de simetría representa un eje principal de inercia para el área.*

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.9

Determine los momentos de inercia principales para el área de la sección transversal de la viga indicada en la figura 10.19*a*, con respecto a ejes que pasen a través del centroide.

SOLUCIÓN

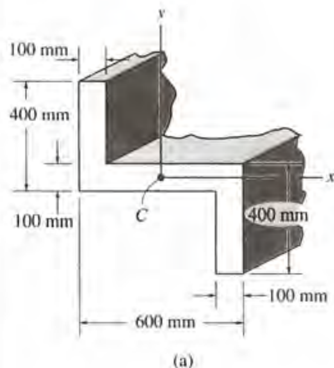
Los momentos y el producto de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes x e y se han calculado en los ejemplos 10.6 y 10.8. Los resultados son

$$I_x = 2.90(10^9)\ \text{mm}^4 \quad I_y = 5.60(10^9)\ \text{mm}^4 \quad I_{xy} = -3.00(10^9)\ \text{mm}^4$$

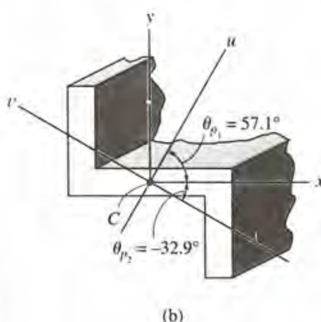
Usando la ecuación 10.10, los ángulos de inclinación de los ejes principales u y v, son

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{3.00(10^9)}{[2.90(10^9) - 5.60(10^9)]/2} = -2.22$$

$$2\theta_{p_1} = -65.8^\circ \qquad \text{y} \qquad 2\theta_{p_2} = 114.2^\circ$$



(a)



(b)

Fig. 10.19

Así, como se muestra en la figura 10.19*b*,

$$\theta_{p_1} = -32.9^\circ \quad \text{y} \quad \theta_{p_2} = 57.1^\circ$$

Los principales momentos de inercia con respecto a los ejes u y v se determinan usando la ecuación 10.11. Por tanto,

$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{2.90(10^9) + 5.60(10^9)}{2}$$

$$\pm \sqrt{\left[\frac{2.90(10^9) - 5.60(10^9)}{2}\right]^2 + [-3.00(10^9)]^2}$$

$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = 4.25(10^9) \pm 3.29(10^9)$$

o

$$I_{\text{máx}} = 7.54(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad I_{\text{mín}} = 0.960(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

Específicamente, el máximo momento de inercia, $I_{\text{máx}} = 7.54(10^9)$ mm^4, ocurre con respecto al eje u, ya que, *por inspección,* la mayor parte del área de la sección transversal está más alejada de este eje. Dicho de otra forma, $I_{\text{máx}}$ ocurre en torno al eje u, pues se encuentra localizado entre ±45° del eje y, que tiene el mayor valor de I ($I_y > I_x$). Esto también puede ser concluido matemáticamente sustituyendo los datos con $\theta = 57.1^\circ$ en la primera de las ecuaciones 10.9.

http://librosysolucionarios.net

* 10.8 Círculo de Mohr para momentos de inercia

Las ecuaciones 10.9 a 10.11 tienen una solución gráfica que es conveniente usar y generalmente es fácil de recordar. Si elevamos al cuadrado la primera y la tercera de las ecuaciones 10.9 y sumamos, encontramos que

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \qquad (10.12)$$

En un problema dado, I_u e I_v son *variables*, mientras que I_x, I_y e I_{xy} son *constantes conocidas.* Así, la ecuación 10.12 puede escribirse en forma compacta como

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

Cuando esta ecuación se grafica para un sistema de ejes que representan el momento de inercia y el producto de inercia, respectivamente, figura 10.20, la gráfica resultante representa un *círculo* de radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

que tiene su centro localizado en el punto $(a, 0)$, donde $a = (I_x + I_y)/2$. El círculo así construido se llama *círculo de Mohr*, en honor al ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918).

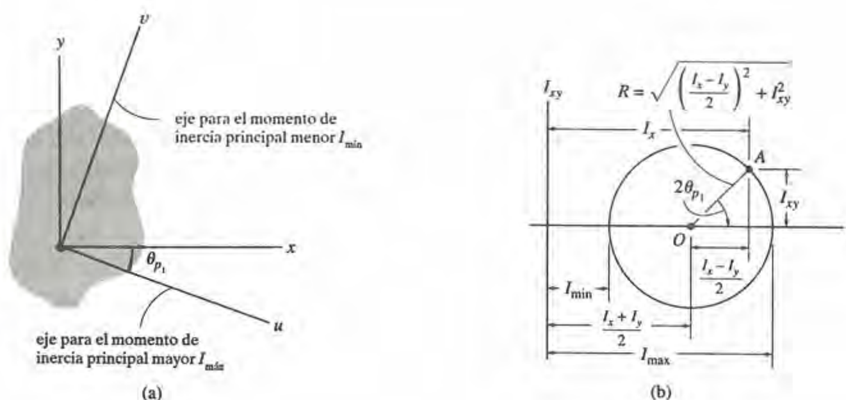


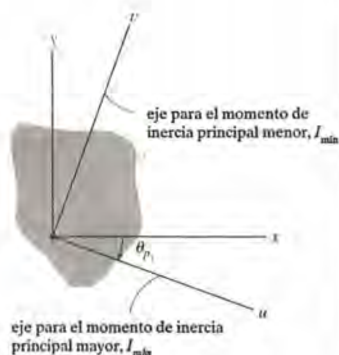
Fig. 10.20

http://librosysolucionarios.net

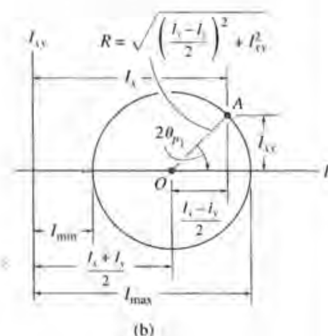
PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Existen varios métodos para trazar el círculo de Mohr, según se define por la ecuación 10.12. El principal objeto de usar el círculo de Mohr aquí es tener un medio conveniente para transformar I_x, I_y e I_{xy} en los momentos principales de inercia. El siguiente procedimiento proporciona un método para hacer esto.

Determinación de I_x, I_y, I_{xy}. Establezca los ejes x y y para el área, con el origen localizado en el punto P de interés, y determine I_x, I_y, e I_{xy}, figura 10.20*a*.



Construcción del círculo. Construya un sistema de ejes de coordenadas rectangulares, tales que la abscisa represente el momento de inercia I, y la ordenada represente el producto de inercia I_{xy}, figura 10.20*b*. Determine el centro, O, del círculo que se localiza a la distancia $(I_x + I_y)/2$ del origen y marque el "punto de control" A que tiene por coordenadas (I_x, I_{xy}). Por definición, I_x siempre es positivo, mientras que I_{xy} será positivo o negativo. Una el punto de control A con el centro del círculo y determine la distancia OA por trigonometría. Esta distancia representa el radio del círculo, figura 10.20*b*. Finalmente, trace el círculo.



(b)

Momentos de inercia principales. Los puntos donde el círculo interseca el eje de las abscisas dan los valores de los momentos de inercia principales $I_{mín}$ e $I_{máx}$. Note que el *producto de inercia será cero en estos puntos,* figura 10.20*b*.

Ejes principales. Para encontrar el sentido del eje principal mayor, determine por trigonometría el ángulo $2\theta_{p_1}$, *medido a partir del radio OA hacia la parte positiva del eje de las abscisas,* figura 10.20*b*. Este ángulo representa el *doble* del ángulo formado entre el eje x del *área* en cuestión y el eje de máximo momento de inercia $I_{máx}$, figura 10.20*a*. Tanto el ángulo $2\theta_{p_1}$, en el círculo, como el ángulo $2\theta_{p_1}$ en el área *deben medirse en el mismo sentido*, como se muestra en la figura 10.20. El eje para momento de inercia mínimo $I_{mín}$ es perpendicular al eje para $I_{máx}$.

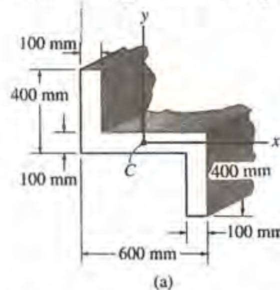
Fig. 10.20

Usando trigonometría puede verificarse que el procedimiento anterior está de acuerdo con las ecuaciones desarrolladas en la sección 10.7.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.10

Utilizando el círculo de Mohr, determine los momentos de inercia principales para el área de la sección transversal de la viga indicada en la figura 10.21*a*, con respecto a los ejes que pasan a través del centroide.



(a)

SOLUCIÓN

Determinación de I_x, I_y, e I_{xy}. Los momentos y el producto de inercia se han determinado en los ejemplos 10.6 y 10.8, con respecto a los ejes *x* y *y* mostrados en la figura 10.21*a*. Los resultados son $I_x = 2.90(10^9)$ mm^4, $I_y = 5.60(10^9)$ mm^4, e $I_{xy} = 3.00(10^9)$ mm^4.

Construcción del círculo. En la figura 10.21*b* se muestran los ejes *I* e I_{xy}. El centro *O* del círculo queda situado a una distancia $(I_x + I_y)/2 = (2.90 + 5.60)/2 = 4.25$ a partir del origen. Cuando el punto de control *A*(2.90, –3.00) se une al punto *O*, se determina el radio *OA* del triángulo *OBA* a partir del teorema de Pitágoras.

$$OA = \sqrt{(1.35)^2 + (-3.00)^2} = 3.29$$

El círculo está construido en la figura 10.21*c*.

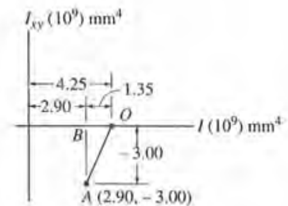
Momentos de inercia principales. El círculo interseca al eje *I* en los puntos (7.54, 0) y (0.960, 0). Por lo tanto,

$$I_{\text{máx}} = 7.54(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$I_{\text{mín}} = 0.960(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

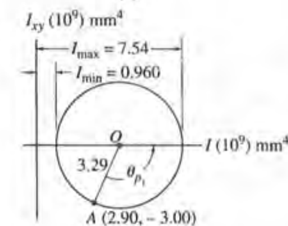
Ejes principales. Como se indica en la figura 10.21*c*, el ángulo $2\theta_{p_1}$ se determina a partir del círculo, midiéndolo en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde *OA* hasta la dirección del *eje positivo I*. Por tanto,

$$2\theta_{p_1} = 180° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{|BA|}{|OA|}\right) = 180° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{3.00}{3.29}\right) = 114.2°$$

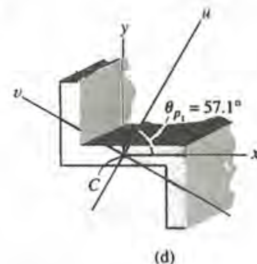
Por consiguiente, el eje principal para $I_{\text{máx}} = 7.54(10^9)$ mm^4 está orientado según un ángulo $\theta_{p_1} = 57.1°$, medido en *sentido contrario al de las manecillas del reloj,* a partir de la parte *positiva* del eje *x* hacia la parte *positiva* del eje *u*. El eje *v* es perpendicular a este eje. Los resultados se muestran en la figura 10.21*d*.



(b)



(c)



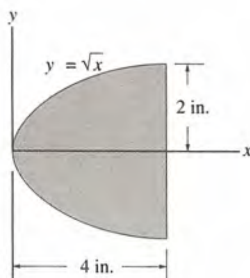
(d)

Fig. 10.21

http://librosysolucionarios.net

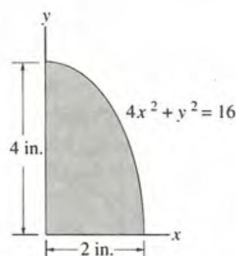
PROBLEMAS

* **10.48.** Determine el producto de inercia del área parabólica con respecto a los ejes x, y.



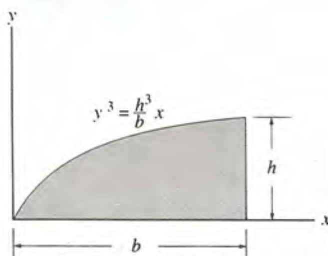
Prob. 10.48

10.49. Determine el producto de inercia del área sombreada de la elipse con respecto a los ejes x, y.



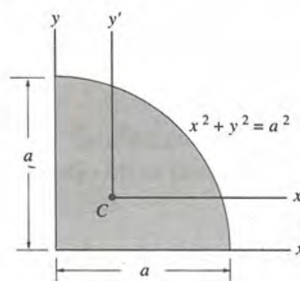
Prob. 10.49

10.50. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes de coordenadas.



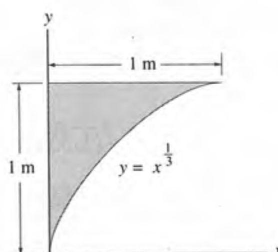
Prob. 10.50

10.51. Determine el producto de inercia alrededor del centroide x', y' del área de un cuarto de círculo con respecto a los ejes de coordenadas, utilizando el teorema de los ejes paralelos.



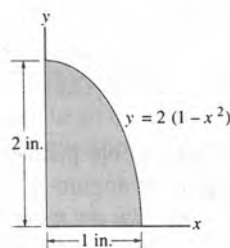
Prob. 10.51

* **10.52.** Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes de coordenadas.



Prob. 10.52

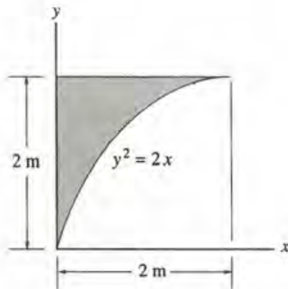
10.53. Determine el producto de inercia de la sección sombreada de la elipse con respecto a los ejes de coordenadas.



Prob. 10.53

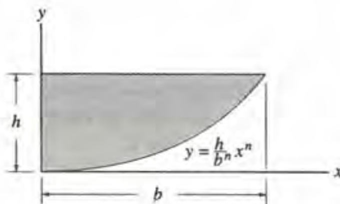
http://librosysolucionarios.net

10.54. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes de coordenadas.



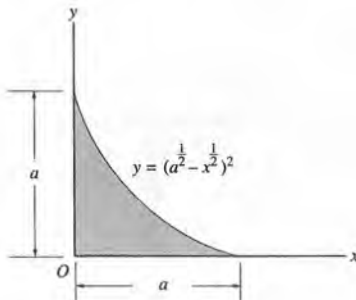
Prob. 10.54

10.55. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes de coordenadas.



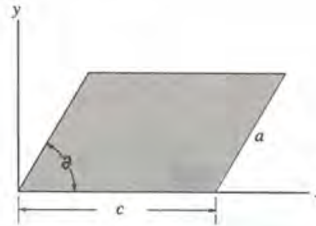
Prob. 10.55

* **10.56.** Determine el producto de inercia con respecto a los ejes de coordenadas.



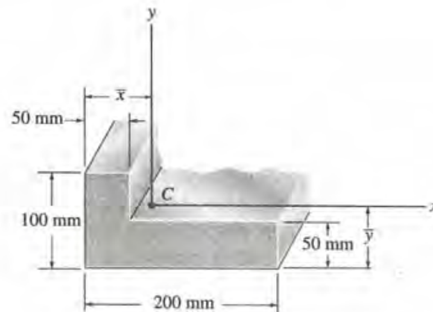
Prob. 10.56

10.57. Determine el producto de inercia con respecto a los ejes de coordenadas.



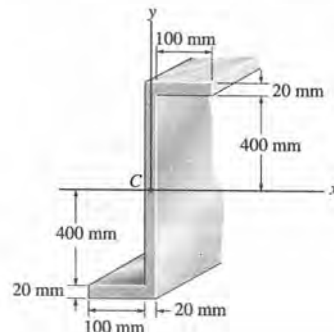
Prob. 10.57

10.58. Determine la localización del centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área de la sección transversal y calcule el producto de inercia respecto a los ejes de coordenadas.



Prob. 10.58

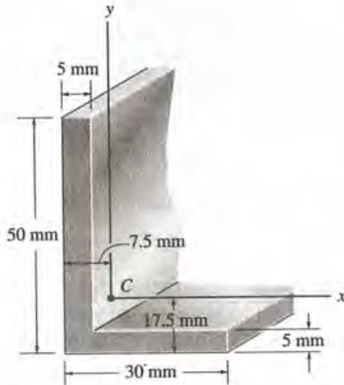
10.59. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes de coordenadas.



Prob. 10.59

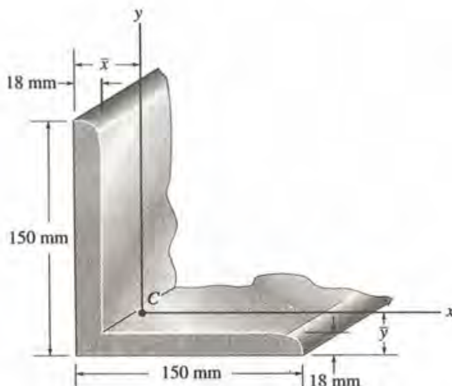
http://librosysolucionarios.net

***10.60.** Determine el producto de inercia de la sección transversal de la viga respecto a los ejes de coordenadas cuyo origen se sitúa en el centroide C.



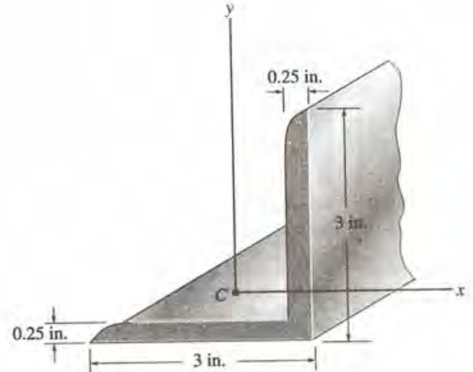
Prob. 10.60

10.61. Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide C de la sección transversal de la escuadra, y calcule el producto de inercia con respecto a los ejes de coordenadas. Suponga que todos los bordes son en ángulo recto.



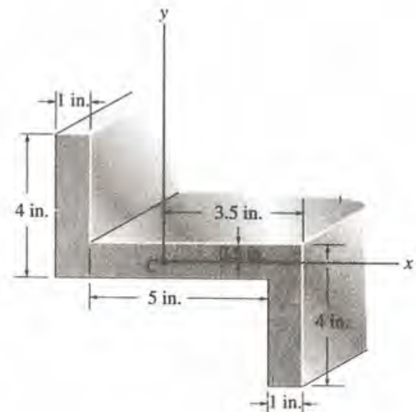
Prob. 10.61

10.62. Determine el producto de inercia para la escuadra con respecto a los ejes x, y, que pasan por el centroide C. Los bordes son rectos por hipótesis.



Prob. 10.62

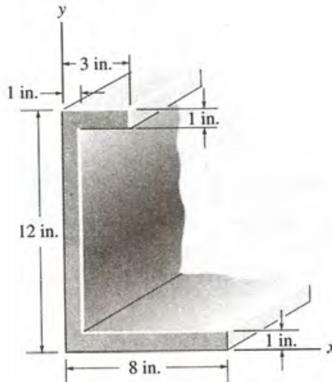
10.63. Determine el producto de inercia de la sección en "Z" con respecto a los ejes de coordenadas cuyo origen se sitúa en el centroide C.



Prob. 10.63

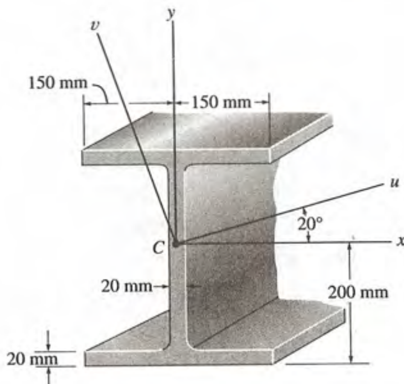
http://librosysolucionarios.net

* **10.64.** Determine el producto de inercia del área respecto a los ejes de coordenadas.



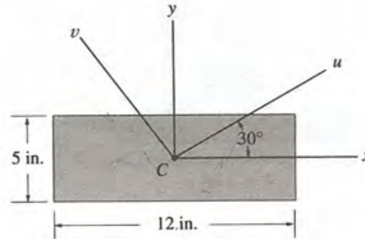
Prob. 10.64

10.65. Determine el producto de inercia para el área de la sección transversal con respecto a los ejes u, v.



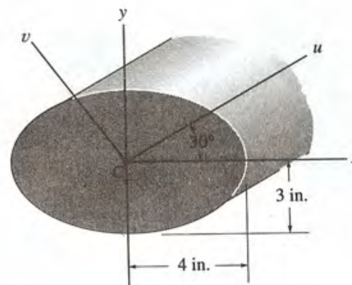
Prob. 10.65

10.66. Determine los momentos de inercia y el producto de inercia para el área rectangular con respecto a los ejes u y v que pasan por el centroide C.



Prob. 10.66

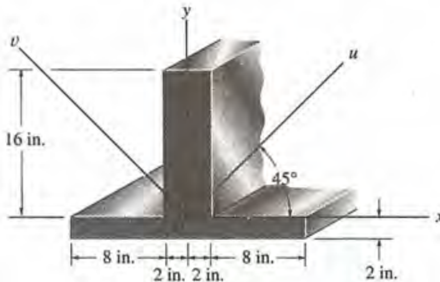
10.67. Determine los momentos de inercia I_u e I_v y el producto de inercia I_{uv} para el área elíptica. Los ejes u y v pasan por el centroide C. *Sugerencia*: vea el problema 10.11



Prob. 10.67

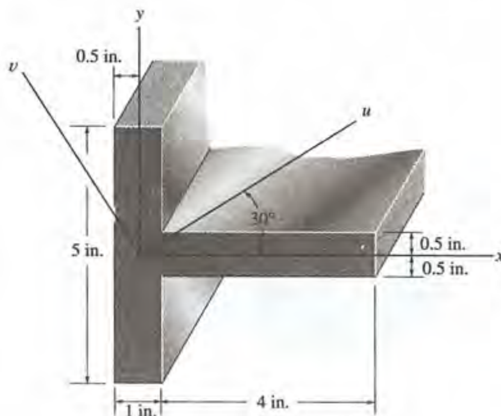
http://librosysolucionarios.net

* **10.68.** Determine los momentos de inercia I_u, I_v, e I_{uv} del área sombreada.



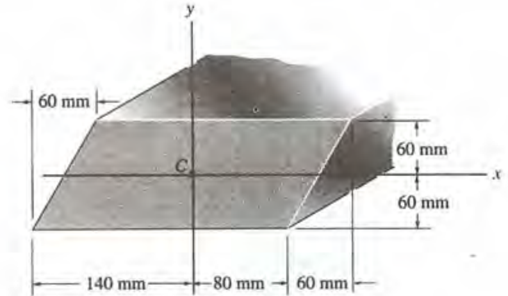
Prob. 10.68

10.69. Determine los momentos de inercia del área sombreada respecto a los ejes u y v.



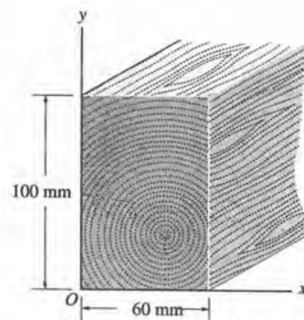
Prob. 10.69

10.70. Determine los momentos de inercia principales del área compuesta con respecto a un juego de ejes principales con origen situado en el centroide C. Use las ecuaciones desarrolladas en la sección 10.7. $I_{xy} = 15.84(10^6)\ \text{mm}^4$.



Prob. 10.70

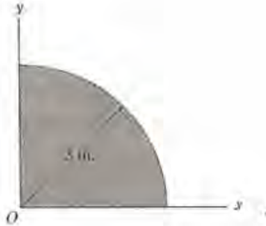
10.71. Determine las direcciones de los ejes principales con origen localizado en el punto O y los momentos principales de inercia para el área rectangular alrededor de estos ejes.



Prob. 10.71

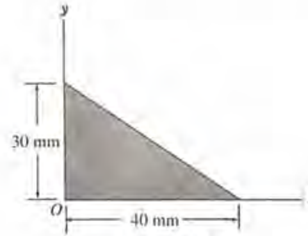
http://librosysolucionarios.net

10.72. Determine las direcciones de los ejes principales con origen situado en el punto O, y los momentos de inercia principales para el área de un cuarto de círculo, en torno a estos ejes. Use los resultados del problema 10.51.



Prob. 10.72

10.73. Usando el círculo de Mohr, Determine los momentos principales de inercia del área triangular y la orientación de los ejes principales de inercia con origen en el punto O.



Prob. 10.73

10.74. Resuelva el problema 10.70 usando el círculo de Mohr.

10.75. Resuelva el problema 10.71 usando el círculo de Mohr.

* **10.76.** Resuelva el problema 10.72 usando el círculo de Mohr.

10.9 Momento de inercia de masa

El momento de inercia de masa de un cuerpo es una propiedad que mide la resistencia del cuerpo a la aceleración angular. Ya que se le usa en la dinámica para estudiar el movimiento de rotación, se expondrán ahora métodos para calcularlo.

Definimos el *momento de inercia de masa* como la integral del "segundo momento" alrededor de un eje, de todos los elementos de masa dm que componen el cuerpo.* Consideremos por ejemplo el cuerpo rígido mostrado en la figura 10.22. El momento de inercia del cuerpo en torno al eje z es

$$I = \int_m r^2\, dm \tag{10.13}$$



Fig. 10.22

Aquí el" brazo de palanca" r es la distancia perpendicular desde el eje hasta el elemento arbitrario dm. Puesto que la formulación involucra r, el valor de I es *único* para cada eje z respecto al cual se le calcula. Sin embargo, el eje que suele tomarse para el análisis pasa por el centro de masa G. El momento de inercia calculado respecto a este eje se definirá como I_G. Observe que como r se eleva al cuadrado en la ecuación 10.13, el momento de inercia de masa es siempre una *cantidad positiva.* Las unidades comúnmente utilizadas para medirlo son kg · m^2 o slug · ft^2.

* Otra propiedad del cuerpo que mide la simetría de la masa del cuerpo respecto a un sistema de coordenadas es el producto de inercia de masa. Esta propiedad se aplica más a menudo al movimiento tridimensional de un cuerpo y se discute en Mecánica para ingenieros: Dinámica (capítulo 21).

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Para integrar consideraremos solamente cuerpos simétricos con superficies que se generan por revolución de alguna curva alrededor de un eje. En la figura 10.23 se muestra un ejemplo de un cuerpo de esta clase donde el eje de rotación es el eje z.

Si el cuerpo es de un material de densidad variable, $\rho = \rho(x, y\, z)$, la masa elemental dm del cuerpo se puede expresar en términos de su densidad y volumen como $dm = \rho\, dV$. Sustituyendo dm en la ecuación 10.13, el momento de inercia del cuerpo se calcula usando elementos de volumen para la integración; es decir

$$I = \int_V r^2 \rho\, dV \tag{10.14}$$

En el caso especial de que ρ sea *constante*, este término se factoriza fuera de la integral y el valor de la integral es ya solamente función geométrica:

$$I = \rho \int_V r^2\, dV \tag{10.15}$$

Cuando el volumen elemental elegido para la integración tiene dimensiones diferenciales en las tres direcciones, es decir, $dV = dx\, dy\, dz$, figura 10.23*a*, el momento de inercia del cuerpo debe determinarse usando "integración triple". El proceso de integración puede, sin embargo, simplificarse a una *integral simple* a condición de que el volumen elemental tenga tamaño o espesor diferencial en una sola dirección. Con este fin, suelen usarse cilindros o discos elementales.

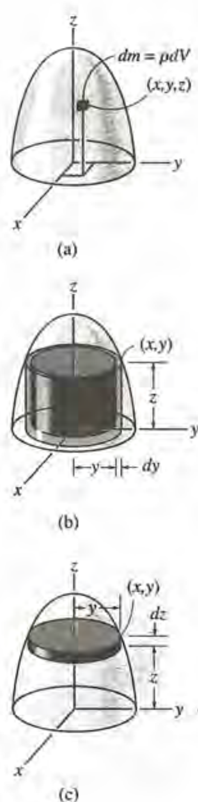


Fig. 10.23

Cáscara elemental. Si se elige para integrar un *cilindro hueco elemental* de altura z, radio y y espesor dy, figura 10.23*b*, entonces el volumen $dV = (2\pi y)(z)\, dy$. Este elemento puede usarse en la ecuación 10.14 o 10.15 para determinar el momento de inercia I_z del cuerpo alrededor del eje z, ya que *todo el elemento*, por "delgado" se encuentra a la *misma* distancia perpendicular $r = y$ desde el eje z (vea el ejemplo 10.11).

Disco elemental. Si un disco elemental de radio y y grueso dz es elegido para integración, figura 10.23*c*, entonces el volumen $dV = (\pi y^2)\, dz$. En este caso, sin embargo, el elemento es *finito* en la dirección radial, y consecuentemente sus partes *no* están todas a la *misma distancia radial r* del eje z. Como resultado, las ecuaciones 10.14 ó 10.15 *no pueden* ser utilizadas para determinar I_z. En vez de ello, para realizar la integración usando este elemento, es necesario primeramente determinar el momento de inercia *del elemento* en torno al eje z y después integrar este resultado (vea el ejemplo 10.12).

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.11

Determine el momento de inercia del cilindro mostrado en la figura 10.24*a* en torno al eje z. La densidad del material es constante.

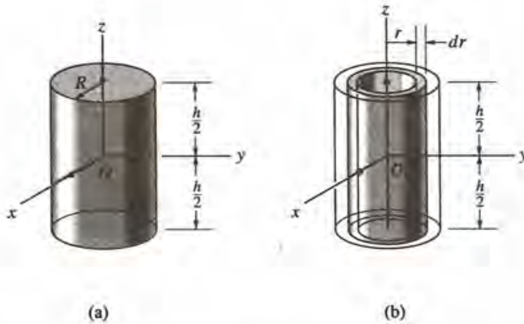


Fig. 10.24

SOLUCIÓN

"Cáscara" o cilindro elemental. Este problema puede resolverse usando la *"cáscara" elemental* que se muestra en la figura 10.24*b* y una integral simple. El volumen del elemento es $dV = (2\pi r)(h)\,dr$, de manera que su masa es $dm = \rho\, dV = \rho\,(2\pi hr\,dr)$. Puesto que *todo el elemento* se encuentra a la misma distancia r del eje z, el momento de inercia *del elemento* es

$$dI_z = r^2\,dm = \rho 2\pi h r^3\,dr$$

Si integramos sobre toda la región del cilindro, obtenemos

$$I_z = \int_m r^2\,dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\,dr = \frac{\rho\pi}{2} R^4 h$$

La masa del cilindro es

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\,dr = \rho\pi h R^2$$

y, por tanto,

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.12

El sólido de la figura se obtiene como sólido de revolución del área mostrada, en torno al eje y. Si la densidad del material es 5 slug/ft^3, determine el momento de inercia alrededor del eje y.

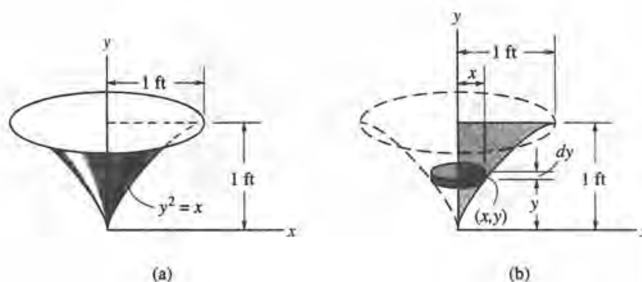


Fig. 10.25

SOLUCIÓN

Disco elemental. El momento de inercia será determinado usando un disco elemental, como se ve en la figura 10.25*b*. Aquí, este elemento interseca la curva en el punto arbitrario (x, y) y tiene masa

$$dm = \rho\, dV = \rho(\pi x^2)\, dy$$

Aunque no todas las porciones del elemento se localizan a la misma distancia del eje y, es posible determinar el momento de inercia dI_y *del elemento* alrededor del eje y. En el ejemplo 10.11 se mostró que el momento de inercia de un cilindro en torno a su eje longitudinal es $I = \frac{1}{2} mR^2$, donde m y R son la masa y el radio del cilindro. Puesto que la altura del cilindro no se involucra en la fórmula, podemos usarla también para un disco. Así, para el disco elemental de la figura 10.25*b*, tenemos

$$dI_y = \frac{1}{2}(dm)\,x^2 = \frac{1}{2}[\rho(\pi x^2)\, dy]x^2$$

Si sustituimos $x = y^2$, $\rho = 5$ slug/ft^3, e integramos respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 1$ ft, se obtiene el momento de inercia para el sólido entero:

$$I_y = \frac{5\pi}{2}\int_0^1 x^4\, dy = \frac{5\pi}{2}\int_0^1 y^8\, dy = 0.873 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Teorema de los ejes paralelos. Si se conoce el momento de inercia del cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro de masa, entonces el momento de inercia en torno a cualquier eje paralelo podrá determinarse usando el *teorema de los ejes paralelos.* Este teorema puede deducirse por consideración del cuerpo que se muestra en la figura 10.26. El eje z' pasa por el centro de masa G, mientras que el eje paralelo z está a distancia constante, d. Eligiendo el elemento diferencial de masa dm que se localiza en el punto (x', y') y usando el teorema pitagórico, $r^2 = (d + x')^2 + y'^2$, podemos expresar el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje z como

$$I = \int_m r^2\, dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\, dm$$

$$= \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm + 2d \int_m x'\, dm + d^2 \int_m dm$$

Puesto que $r'^2 = x'^2 + y'^2$, la primera integral representa I_G. La segunda integral es *cero*, pues el eje z' pasa por el centro de masa del cuerpo, esto es, $\int x'\, dm = \bar{x}\, dm = 0$ ya que $\bar{x} = 0$. Finalmente, la tercera integral representa la masa total m del cuerpo. Así pues, el momento de inercia en torno al eje z puede escribirse

$$I = I_G + md^2 \qquad (10.16)$$

donde I_G = momento de inercia en torno al eje z' que pasa por el centro de masa G
m = masa del cuerpo
d = distancia perpendicular entre los ejes paralelos

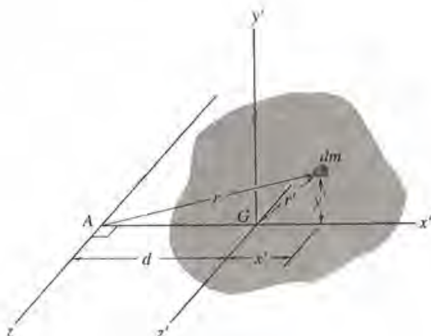


Fig. 10.26

http://librosysolucionarios.net

Radio de giro. En ocasiones, el momento de inercia de un cuerpo alrededor de un eje especificado se reporta en los manuales usando el *radio de giro, k*. Este valor tiene unidades de longitud, y cuando se le conoce a la vez que la masa m del cuerpo, el momento de inercia se determina de la ecuación

$$I = mk^2 \quad o \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{10.17}$$

Observe la *semejanza* entre la definición de k en esta fórmula y r en la ecuación $dI = r^2\, dm$, que define el momento de inercia de una masa elemental dm del cuerpo en torno a un eje.

Cuerpos compuestos. Si se construye un cuerpo a partir de formas simples como son los discos, las esferas y las barras, el momento de inercia del cuerpo en torno a un eje z se puede determinar por adición algebraica de los momentos de inercia de las partes constitutivas calculados alrededor del eje z. La adición algebraica es necesaria, ya que si una parte constitutiva ha sido incluida antes dentro de otra, entonces debe considerarse negativa, por ejemplo, un agujero "sustraido" de una placa. El teorema de los ejes paralelos es necesario para los cálculos, si el centro de masa de cada parte componente no se encuentra en el eje z. Para los cálculos, $I = \Sigma(I_G + md^2)$, donde I_G para cada una de las partes componentes se calcula mediante integración o se determina con ayuda de una tabla como la que se encuentra anexa en las últimas páginas del libro.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.13

Si la placa que se muestra en la figura 10.27*a* tiene densidad de 8000 kg/m³ y espesor de 10 mm, calcule su momento de inercia en torno a un eje dirigido perpendicularmente a la página y que pasa por el punto *O*.



Fig. 10.27

SOLUCIÓN

La placa tiene dos partes componentes, el disco de radio 250 mm *menos* un disco de radio 125 mm, figura 10.27*b*. El momento de inercia alrededor de *O* puede ser determinado calculando el momento de inercia de cada una de estas partes en torno a *O* y sumando luego *algebraicamente* los resultados. Los cálculos se efectúan usando el teorema de los ejes paralelos junto con los datos enlistados en la tabla anexa al final del libro.

Disco. El momento de inercia de un disco alrededor de un eje perpendicular al plano del disco es $I_G = \frac{1}{2}mr^2$. El centro de masa del disco se localiza a una distancia de 0.25 m del punto *O*. Así,

$$m_d = \rho_d V_d = 8000\ \text{kg/m}^3[\pi(0.25\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 15.71\ \text{kg}$$

$$(I_O)_d = \tfrac{1}{2} m_d r_d^2 + m_d d^2$$

$$= \frac{1}{2}(15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2 + (15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

$$= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Agujero. Para el disco de radio 125 mm (el agujero), tenemos

$$m_h = \rho_h V_h = 8000\ \text{kg/m}^3[\pi(0.125\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 3.93\ \text{kg}$$

$$(I_O)_h = \tfrac{1}{2} m_h r_h^2 + m_h d^2$$

$$= \frac{1}{2}(3.93\ \text{kg})(0.125\ \text{m})^2 + (3.93\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

$$= 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia de la placa alrededor del punto *O* por tanto, es

$$I_O = (I_O)_d - (I_O)_h$$

$$= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$= 1.20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 10.14

El péndulo consiste en dos barras delgadas, cada una de un peso de 10 lb, suspendidas del punto O como se ve en la figura 10.28. Determine el momento de inercia del péndulo alrededor de un eje que pasa por (a) el pasador en O, y (b) el centro de masa G del péndulo.

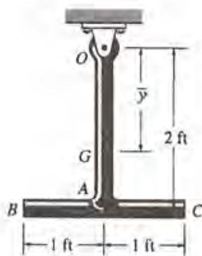


Fig. 10.28

SOLUCIÓN

Parte (a). Consultando la tabla anexa al final del libro, se ve que el momento de inercia de la barra OA en torno a un eje perpendicular a la página y que pasa por el extremo O de la barra es $I_O = \frac{1}{3}ml^2$. Así pues,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10}{32.2}\right)(2)^2 = 0.414 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

El mismo valor puede calcularse usando $I_G = \frac{1}{12}ml^2$ y el teorema de los ejes paralelos; esto es,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10}{32.2}\right)(2)^2 + \frac{10}{32.2}(1)^2$$
$$= 0.414 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

Para la barra BC tenemos

$$(I_{BC})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10}{32.2}\right)(2)^2 + \frac{10}{32.2}(2)^2$$
$$= 1.346 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

El momento de inercia del péndulo en torno a O es por tanto

$$I_O = 0.414 + 1.346 = 1.76 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b). El centro de masa G se localizará en relación con el pasador O. Si suponemos que esta distancia sea $\bar{y}$, figura 10.28, y usamos la fórmula para determinar el centro de masa, tenemos

$$y = \frac{\Sigma\tilde{y}m}{\Sigma m} = \frac{1(10/32.2) + 2(10/32.2)}{(10/32.2) + (10/32.2)} = 1.50 \text{ ft}$$

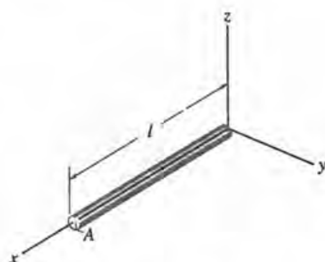
El momento de inercia I_G puede calcularse de la misma manera que I_O, que requiere aplicaciones sucesivas del teorema de los ejes paralelos para transferir los momentos de inercia de las barras OA y BC a G. Una solución más directa, sin embargo, involucra la aplicación del teorema de los ejes paralelos, usando el resultado para I_O antes determinado; es decir,

$$I_O = I_G + md^2; \qquad 1.76 = I_G + \left(\frac{20}{32.2}\right)(1.50)^2$$
$$I_G = 0.362 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

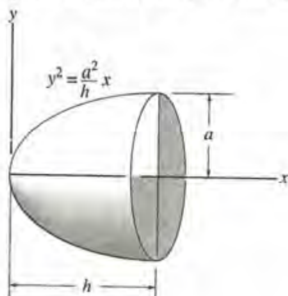
PROBLEMAS

10.77. Determine el momento de inercia de la barra delgada con respecto al eje y. La densidad de la barra, ρ, y el área en sección transversal A son constantes. Exprese el resultado en términos de m, la masa total de la barra .



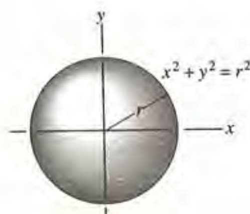
Prob. 10.77

10.78. El paraboloide se forma por la revolución del área sombreada alrededor del eje x. Determine el radio de giro k_x. El material es de densidad constante ρ.



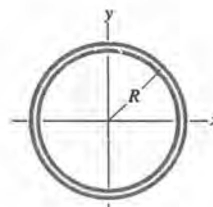
Prob. 10.78

10.79. Determine el momento de inercia con respecto al eje x y exprese el resultado en términos de la masa total m de la esfera. La esfera tiene densidad constante ρ.



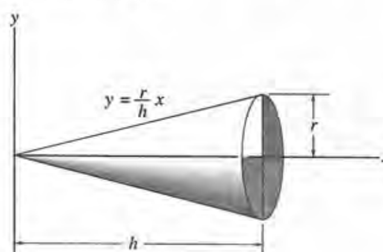
Prob. 10.79

* **10.80.** Determine el momento de inercia del anillo delgado alrededor del eje z. El anillo tiene masa m.



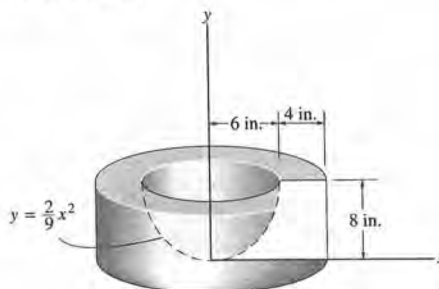
Prob. 10.80

10.81. El cono circular recto se genera por revolución del área sombreada alrededor del eje x. Determine el momento de inercia I_x y exprese el resultado en términos de la masa total m del cono. El cono tiene densidad constante ρ.



Prob. 10.81

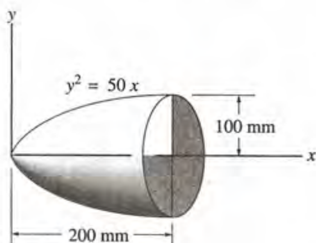
10.82. El sólido de concreto se genera por rotación del área sombreada alrededor del eje y. Determine el momento de inercia I_y. El peso específico del concreto es $\gamma = 150\ \text{lb/ft}^3$.



Prob. 10.82

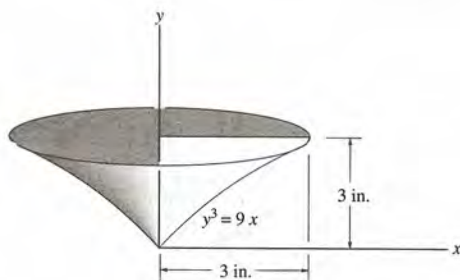
http://librosysolucionarios.net

10.83. El sólido se genera por revolución del área sombreada alrededor del eje x. Determine el radio de giro k_x. La densidad de masa del material es $\rho = 5\ \text{Mg/m}^3$.



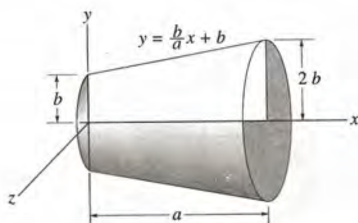
Prob. 10.83

* **10.84.** El sólido se genera por revolución del área sombreada alrededor del eje y. Determine el radio de giro k_y. El peso específico del material es $\gamma = 380\ \text{lb/ft}^3$.



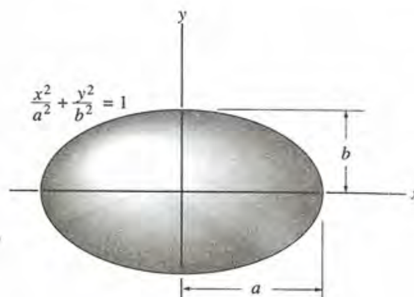
Prob. 10.84

10.85. El cono truncado se obtiene rotando el área sombreada alrededor del eje x. Determine el momento de inercia I_x y exprese el resultado en términos de la masa total m del cuerpo. Éste es de densidad constante.



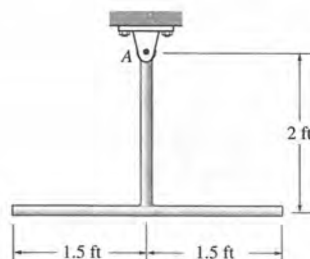
Prob. 10.85

10.86. El elipsoide se genera al rotar el área sombreada alrededor del eje x. Determine el momento de inercia I_x y exprese el resultado en términos de la masa total m del elipsoide. El cuerpo es de densidad constante.



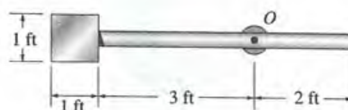
Prob. 10.86

10.87. Las barras delgadas tienen peso de 3 lb/ft. Determine el momento de inercia del ensamble entorno a un eje perpendicular a la página y que pasa por A.



Prob. 10.87

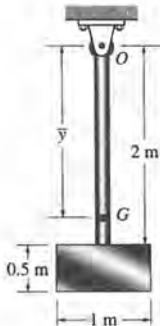
* **10.88.** El péndulo consiste en una placa con peso de 12 lb y una barra delgada de 4 lb. Determine el radio de giro del péndulo entorno a un eje perpendicular a la página y que pasa por O.



Prob. 10.88

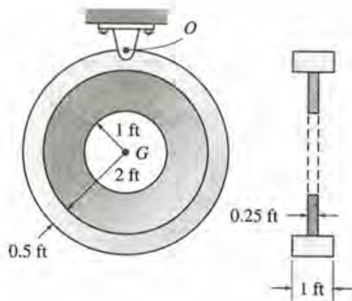
http://librosysolucionarios.net

10.89. El péndulo consiste en la barra delgada de 3 kg y la placa de 5 kg. Determine la localización $\bar{y}$ del centro de masa G del péndulo; después, calcule el momento de inercia del péndulo alrededor de un eje perpendicular a la página y que pasa por G.



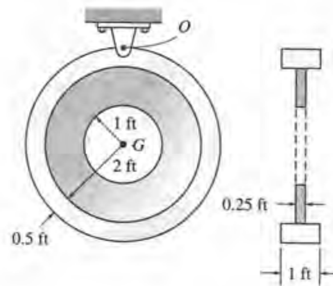
Prob. 10.89

10.90. Determine el momento de inercia del ensamble alrededor de un eje que es perpendicular a la página y pasa por el centro de masa G. El material tiene peso específico de $\gamma = 90$ lb/ft^3.



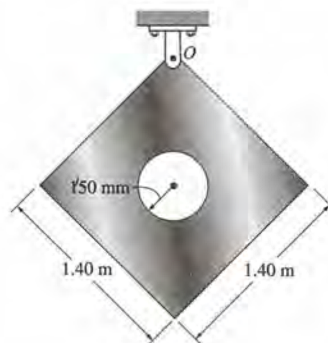
Prob. 10.90

10.91. Determine el momento de inercia del ensamble en torno a un eje perpendicular a la página y que pasa por el punto O. El material tiene peso específico $\gamma = 90$ lb/ft^3.



Prob. 10.91

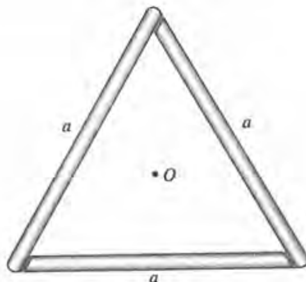
* **10.92.** Determine el momento de inercia de la placa delgada alrededor de un eje perpendicular a la página que pasa por el pasador en O. La placa tiene un agujero en el centro. Su espesor es de 50 mm y el material tiene densidad de $\rho = 50$ Mg/m^3.



Prob. 10.92

http://librosysolucionarios.net

10.93. Cada una de las tres barras tiene masa m. Determine el momento de inercia del ensamble en torno a un eje perpendicular a la página, que pasa por el punto O central.



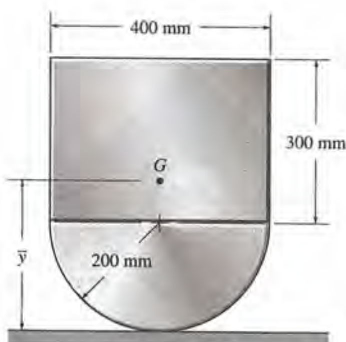
Prob. 10.93

10.95. Determine el momento de inercia I_z del cono truncado con una depresión cónica. El material tiene una densidad de 200 kg/m^3.



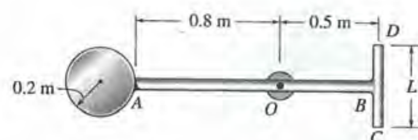
Prob. 10.95

10.94. Determine la distancia $\bar{y}$ al centro de masa G del ensamble y calcule entonces el momento de inercia alrededor del eje que es perpendicular a la página y pasa por G. El bloque tiene masa 3 kg y la masa del semicilindro es 5 kg.



Prob. 10.94

* **10.96.** El péndulo consta de un disco de masaje 2 kg y barras delgadas AB y DC que tienen masa de 2 kg/m. Determine la longitud L de DC, de modo que el centro de masa se sitúe en el apoyo en O. ¿Cuál es el momento de inercia del ensamble en torno al eje que es perpendicular a la página y pasa por O?

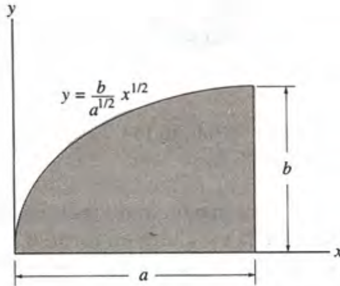


Prob. 10.96

http://librosysolucionarios.net

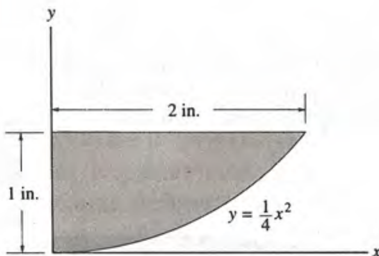
PROBLEMAS DE REPASO

10.97. Determine el producto de inercia del área parabólica con alrededor de los ejes x y y.



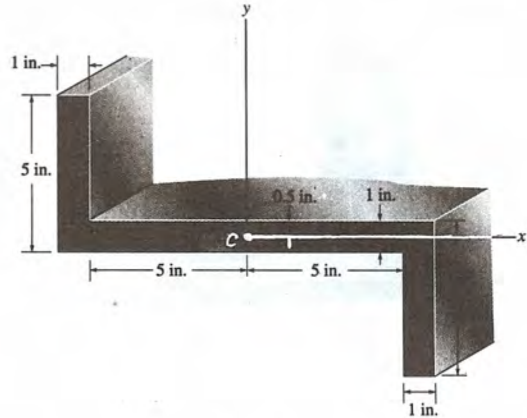
Prob. 10.97

10.98. Determine el producto de inercia del área sombreada alrededor del eje x y al eje y.



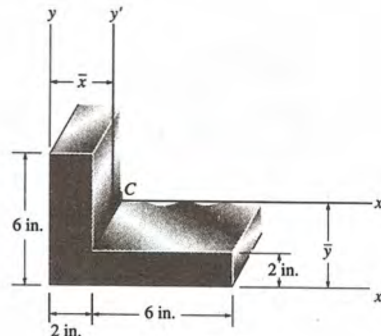
Prob. 10.98

10.99. Determine el producto de inercia del área en sección transversal alrededor del eje x y al eje y con el origen de coordenadas en el centroide O.



Prob. 10.99

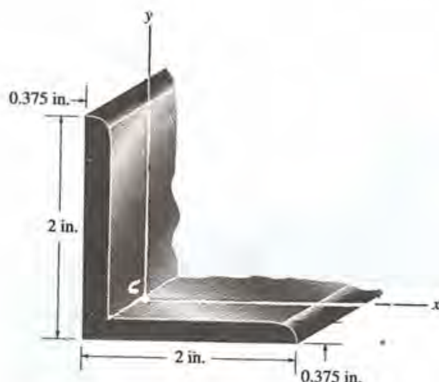
* **10.100.** Determine la localización $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide C de la sección transversal de la escuadra, y encuentre los momentos de inercia en torno a los ejes centroidales y' y y'.



Prob. 10.100

http://librosysolucionarios.net

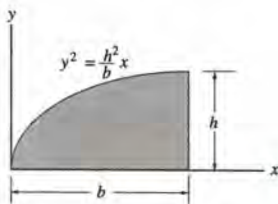
10.101. Determine los momentos principales de inercia para la escuadra alrededor de los ejes de coordenadas que pasan por el centroide C. Use las ecuaciones desarrolladas en la sección 10.7. Suponga que las esquinas son cuadradas.



Prob. 10.101

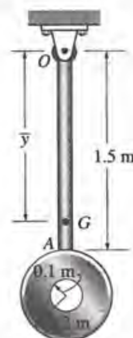
10.102. Determine el momento de inercia del área sombreada en torno al eje x.

10.103. Determine el momento de inercia del área sombreada en torno al eje y.



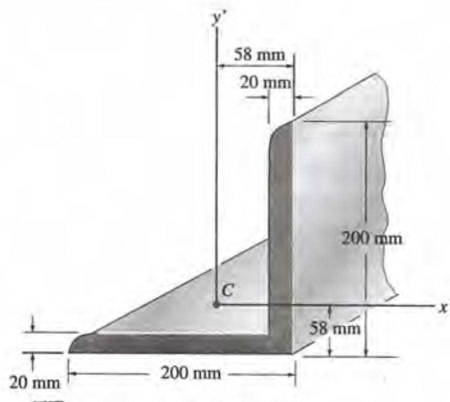
Probs. 10.102/10.103

***10.104.** El péndulo consiste en una barra delgada OA, con masa de 3 kg. La placa delgada tiene masa de 12 kg/m^2. Determine la distancia $\overline{y}$ al centro de masa G del péndulo; calcular entonces el momento de inercia del péndulo alrededor del eje perpendicular a la página y que pasa por G.



Prob. 10.104

10.105. Determine el producto de inercia para la sección transversal de la escuadra en torno a los ejes x' y y' con origen de coordenadas en el centroide C. Suponga que las esquinas son rectas.



Prob. 10.105

10.106. Determine el momento de inercia del ensamble de acero sólido, alrededor del eje x–x. El acero tiene peso específico $\gamma_{st} = 490$ lb/ft^3.



Prob. 10.106

http://librosysolucionarios.net

11 Trabajo virtual

En este capítulo usaremos el principio del trabajo virtual y el método de la energía potencial para determinar la posición de equilibrio de una serie de cuerpos rígidos conectados. Aunque la aplicación requiere matemáticas más sofisticadas que en el caso de las ecuaciones de equilibrio, se mostrará que una vez establecida la ecuación de trabajo virtual o la función de energía potencial, la solución se obtiene *directamente,* sin tener que desmembrar el sistema para obtener relaciones entre las fuerzas que ocurren en las conexiones. Además, al usar el método de la energía potencial, podremos investigar el "tipo" de equilibrio o la estabilidad de la configuración.

11.1 Definición de trabajo y de trabajo virtual

Trabajo de una fuerza. En la mecánica una fuerza *F* efectúa trabajo sólo cuando se desplaza en su mismo sentido. Por ejemplo, consideremos, la fuerza *F* en la figura 11.1, que se localiza en la trayectoria *s* especificada por el vector de posición **r**. Si la fuerza se mueve a lo largo de la trayectoria a una nueva posición $r' = r + d\mathbf{r}$, el desplazamiento dr y, por tanto, el trabajo dU es una cantidad escalar, definida por el producto escalar

$$dU = \mathbf{F} \cdot dr$$

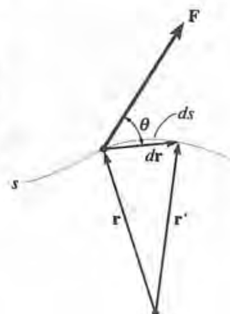


Fig. 11.1

Puesto que dr es infinitesimal, la magnitud de dr puede representarse por ds, el segmento diferencial de arco a lo largo de la trayectoria. Si el ángulo entre los segmentos representativos de

http://librosysolucionarios.net

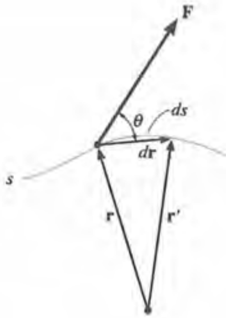


Fig. 11.1

dr y de ***F*** es θ, figura 11.1, entonces por definición del producto punto o producto escalar, la ecuación anterior se puede escribir también

$$dU = F\,ds\ \cos\theta$$

El trabajo expresado por esta ecuación se puede interpretar en una de dos formas: ya sea como producto de ***F*** con la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza, esto es, $ds\ \cos\theta$, o como el producto de ds con la componente de la fuerza en el sentido del desplazamiento, es decir $F\ \cos\theta$. Nótese que si $0° \le \theta < 90°$, el desplazamiento y la componente de la fuerza tienen el *mismo sentido,* de modo que el trabajo es *positivo*; en tanto que si $90° < \theta \le 180°$, los vectores en cuestión tienen *sentidos contrarios* y por tanto el trabajo es *negativo.* También, $dU = 0$ si la fuerza es *perpendicular* al desplazamiento, pues $\cos 90° = 0$, o si la fuerza se aplica en un *sólo punto*, porque en este último caso $ds = 0$.

La unidad básica del trabajo combina unidades de fuerza y desplazamiento. En el sistema SI un *joule* (J) es equivalente al trabajo hecho por una fuerza de 1 newton que se mueve 1 metro en la dirección de la fuerza (1 J = 1 N · m). En el sistema FPS el trabajo se define en unidades de ft·lb. El momento de una fuerza tiene la misma combinación de unidades; sin embargo, el concepto de trabajo no tiene nada que ver con el concepto de momento. El momento es una cantidad vectorial, en tanto que el trabajo es escalar.

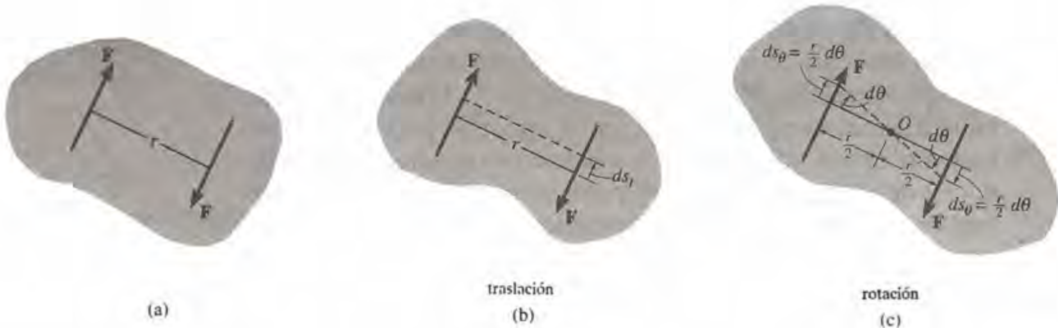


Fig. 11.2

http://librosysolucionarios.net

Trabajo de un par. Las dos fuerzas de un par efectúan trabajo cuando el par *gira* en torno a un eje perpendicular al plano del par. Para mostrarlo, considere el cuerpo en la figura 11.2*a*, que está sujeto a un par cuyo momento tiene magnitud $M = Fr$. Cualquier desplazamiento diferencial general del cuerpo puede considerarse como la combinación de una traslación y una rotación. Cuando el cuerpo se *traslada* de tal manera que la *componente del desplazamiento* a lo largo de la línea de acción de cada fuerza es ds_t, es claro que el trabajo "positivo" de una de las fuerzas ($F\,ds_t$) *cancela* el trabajo "negativo" de la otra ($-F\,ds_t$), figura 11.2*b*. Consideremos ahora una *rotación* diferencial $d\theta$ del cuerpo alrededor de un eje perpendicular al plano del par, y que interseca el plano en el punto O, figura 11.2*c*. (Para la deducción, sirve cualquier otro punto del plano). Como se muestra, cada fuerza está sujeta a un desplazamiento $ds_\theta = (r/2)\,d\theta$ en el sentido de la fuerza; por tanto, el trabajo de las dos fuerzas es

$$dU = F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr)\,d\theta$$

o

$$dU = M\,d\theta$$

El trabajo resultante es *positivo* cuando el sentido de $\mathbf{M}$ es el *mismo* que el de $d\theta$, y negativo de otra manera. Como en el caso del vector de momento, la *dirección* y el *sentido* de $d\theta$ están definidos por la regla de la mano derecha, donde los dedos de la mano derecha siguen la rotación y el pulgar indica la dirección de $d\theta$. Así pues, la línea de acción de $d\theta$, será paralela a la línea de acción de $\mathbf{M}$ si el movimiento del cuerpo ocurre en el *mismo plano*. Sin embargo, si el cuerpo gira en el espacio se requerirá la componente de $d\theta$ en la dirección de $\mathbf{M}$. En general, el trabajo efectuado por un par está definido por el producto escalar, $dU = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}$.

Trabajo virtual. Las definiciones del trabajo de una fuerza y de un par se han presentado en términos de *movimientos reales* expresados por desplazamientos diferenciales de magnitudes ds y $d\theta$. Consideremos ahora un *movimiento imaginario o virtual*, que indica un desplazamiento o rotación que se *supone y no existe en realidad*. Estos movimientos son cantidades diferenciales de primer orden y se designarán mediante los símbolos δs y $\delta\theta$ (delta s y delta θ). El *trabajo virtual* efectuado por una fuerza sometida a un desplazamiento virtual δs es

$$\delta U = F\cos\theta\,\delta s \tag{11.1}$$

http://librosysolucionarios.net

Análogamente, cuando a un par se le da una rotación virtual $\delta\theta$ en el plano de las fuerzas del par, el *trabajo virtual* es

$$\delta U = M\,\delta\theta \qquad (11.2)$$

11.2 Principio del trabajo virtual para una partícula y un cuerpo rígido

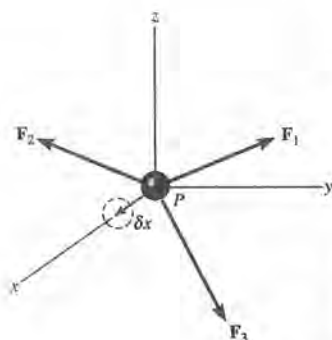


Fig. 11.3

Si una partícula se encuentra en equilibrio, la resultante del sistema de fuerzas que actúan en ella debe ser cero. Así, si la partícula se somete a un desplazamiento imaginario o virtual en sentido x, y o z, el trabajo virtual (δU) efectuado por el sistema de fuerzas debe ser igual a cero puesto que las componentes $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$. En forma alternativa, puede expresarse esto como

$$\delta U = 0$$

Por ejemplo, si la partícula en la figura 11.3 se somete a un desplazamiento virtual δx, sólo las componentes x de las fuerzas que actúan sobre la partícula hacen un trabajo. (Las componentes en dirección y y z no efectúan trabajo, pues son perpendiculares al desplazamiento) La ecuación de trabajo virtual es, por tanto,

$$\delta U = 0; \qquad F_{1x}\,\delta x + F_{2x}\,\delta x + F_{3x}\,\delta x = 0$$

Si encontramos sacando el factor común δx, tenemos

$$(F_{1x} + F_{2x} + F_{3x})\,\delta x = 0$$

Puesto que $\delta x \neq 0$, esta ecuación se satisface sólo si la suma de las componentes de fuerza en la dirección x es igual a cero, es decir, $\Sigma F_x = 0$. Otras dos ecuaciones virtuales pueden ser escritas suponiendo desplazamientos virtuales δy y δz en las direcciones y, z. Esto implica que sean satisfechas las ecuaciones de equilibrio para la partícula $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$.

Análogamente, un cuerpo rígido sometido a un sistema coplanar de fuerzas estará en equilibrio si $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_o = 0$. También podemos escribir un conjunto de tres ecuaciones virtuales de equilibrio para el cuerpo, cada una de las cuales requiere $\delta U = 0$. Si estas ecuaciones involucran traslaciones virtuales separadas en las direcciones x y y, una rotación virtual en torno a un eje perpendicular al plano $x - y$ y que pasa por el punto O, se puede demostrar que corresponderán a las tres ecuaciones de equilibrio mencionadas. Al escribir estas ecuaciones, *no es nece-*

http://librosysolucionarios.net

sario incluir el trabajo hecho por las *fuerzas internas* que actúan dentro del cuerpo, pues un cuerpo rígido *no se deforma* al someterse a cargas externas y, además, cuando el cuerpo se mueve en desplazamiento virtual, las fuerzas internas ocurren en pares iguales en magnitud y colineales opuestas, de modo que el trabajo correspondiente hecho por cada par de fuerzas se *cancela.*

Como en el caso de una partícula, sin embargo, no se gana nada resolviendo problemas de equilibrio de cuerpo rígido usando el principio del trabajo virtual. Esto se debe a que para cada aplicación de la ecuación de trabajo virtual, el desplazamiento virtual, común a cada término, se factoriza, y se deja una ecuación que se hubiera podido obtener de *manera más directa* aplicando las ecuaciones de equilibrio.

11.3 Principio del trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos conectados

El método del trabajo virtual es el más indicado para resolver problemas de equilibrio que involucran un sistema de varios cuerpos rígidos *conectados* como los de la figura 11.4. Sin embargo, antes de poder
temas, debemos primeramente especificar el número de grados de libertad de un sistema y establecer coordenadas que definan la posición del mismo.

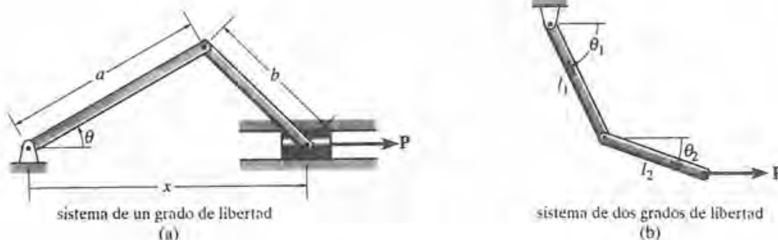


Fig. 11.4

Grados de libertad. Un sistema conexo de cuerpos rígidos toma una forma única que puede especificarse siempre que se conozca la posición de un cierto número de puntos específicos en el sistema. Estas posiciones se definen usando *coordenadas independientes q*, que se miden desde puntos de referencia fijos. Para cada coordenada establecida, el sistema tendrá un *grado de*

http://librosysolucionarios.net

libertad para desplazarse a lo largo del eje de coordenadas que sea consistente con la acción restrictiva de los apoyos. Así, un sistema de n grados de libertad requiere n coordenadas independientes q_n para especificar la localización de todos sus miembros. Por ejemplo, el dispositivo de eslabones y bloque deslizante que se muestra en la figura 11.4*a* es un ejemplo de sistema de un grado de libertad. La coordenada independiente $q = \theta$ puede usarse para especificar la localización de los dos eslabones y el bloque. La coordenada x podría también usarse como la coordenada independiente. Sin embargo, dado que el bloque está restringido a moverse dentro de la ranura, x no es independiente de θ; más bien, se puede relacionar con θ usando la ley de los cosenos, $b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos\theta$. El dispositivo de dos eslabones, mostrado en la figura 11.4*b*, es un ejemplo de un sistema de dos grados de libertad. Para especificar la situación de cada eslabón, deben conocerse las coordenadas angulares θ_1 y θ_2, puesto que la rotación de un eslabón es independiente de la del otro.

Principio del trabajo virtual. El principio del trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos cuyas conexiones son *sin fricción* puede enunciarse como sigue: *Un sistema de cuerpos rígidos conectados está en equilibrio a condición de que el trabajo virtual realizado por todas las fuerzas externas y pares que actúan sobre el sistema sea cero para cada desplazamiento virtual independiente del sistema.* Matemáticamente, esto puede expresarse como

$$\delta U = 0 \tag{11.3}$$

donde δU representa el trabajo virtual de todas las fuerzas externas (y pares) que actúan sobre el sistema durante cualquier desplazamiento virtual independiente.

Como se dijo antes, si un sistema tiene n grados de libertad se necesitan n coordenadas independientes q_n para especificar la localización del sistema completamente. Por tanto, para el sistema es posible escribir n ecuaciones de trabajo virtual independientes, una para cada desplazamiento virtual que se toma a lo largo de cada uno de los ejes de coordenadas independientes, mientras que las restantes $n - 1$ coordenadas independientes se mantienen *fijas.* *

* Este método de aplicación del principio del trabajo virtual suele llamarse el *método de los desplazamientos virtuales,* puesto que se aplica un desplazamiento virtual y se calcula una fuerza real. Aunque no lo usaremos aquí, es necesario percatarse de que el principio del trabajo virtual también es un método de fuerzas virtuales. Este método suele usarse para determinar los desplazamientos de los puntos en cuerpos deformables. Vea R.C. Hibbeler, Mecánica de materiales, CECSA, Nueva York, 1993.

http://librosysolucionarios.net

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente procedimiento proporciona un método para aplicar la ecuación del trabajo virtual a solución de problemas que involucran un sistema de cuerpos conectados sin fricción, con un solo grado de libertad.

Diagrama de cuerpo libre. Trace el diagrama de cuerpo libre de todo el sistema de cuerpos conectados y defina la *coordenada independiente* q. Bosqueje la "posición de deflexión" del sistema en el diagrama de cuerpo libre cuando el sistema es sometido a un desplazamiento positivo virtual δq. De aquí, "especifique" las fuerzas activas y los pares, es decir, aquellos que realizan trabajo.

Desplazamientos virtuales. Indique las *coordenadas de posición* s_i, medidas desde un *punto fijo* en el diagrama de cuerpo libre hasta las fuerzas y pares "activos", en número i. Cada eje de coordenadas debiera ser paralelo a la línea de acción de la fuerza "activa" a la que está dirigido, de modo que se pueda calcular el trabajo virtual a lo largo de los ejes de coordenadas.

Relacione cada una de las coordenadas de posición s_i a la coordenada independiente q, después, *diferencie* estas expresiones para indicar los desplazamientos virtuales δs_i en términos de δq.

Ecuación de trabajo virtual. Escriba *la ecuación de trabajo virtual* para el sistema suponiendo que, sea posible o no lo sea, todas las coordenadas de posición s_i "ese" s_i se someten a desplazamientos virtuales *positivos* δs_i. Si. Usando las relaciones para δs_i, exprese el trabajo de cada fuerza y par activos en la ecuación en términos del desplazamiento virtual independiente δq. Si se obtiene como factor común este desplazamiento, queda una ecuación que en general puede ser resuelta para una fuerza desconocida, un par o una posición de equilibrio.

Si el sistema contiene n grados de libertad deben especificarse n coordenadas independientes q_n. En este caso se seguirá el procedimiento precedente y dejará *sólo una* de las coordenadas independientes sometida a un desplazamiento virtual, en tanto que las $n-1$ restantes se mantienen fijas. En esta forma, podrán escribirse n ecuaciones de trabajo virtual, una para cada coordenada independiente.

Los ejemplos que representan a continuación ayudarán a ver más claramente la aplicación del procedimiento.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 11.1

Determine el ángulo θ para equilibrio del dispositivo de dos eslabones mostrado en la figura 11.5*a*. Cada miembro tiene masa de 10 kg.

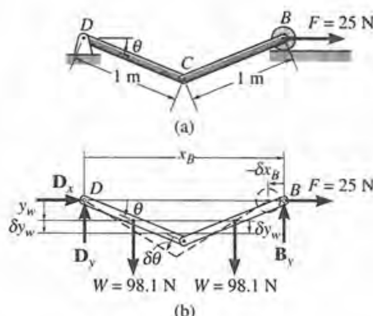


Fig. 11.5

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El sistema tiene sólo un grado de libertad, ya que la situación de los dos eslabones puede especificarse por la coordenada independiente $(q =)\ \theta$. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre en la figura 11.5*b*, cuando θ se somete a una rotación virtual *positiva* (en el sentido contrario al de las manecillas del reloj) $\delta\theta$, solamente las fuerzas activas, **F** y los dos pesos de 98.1 N, realizan trabajo. (Las fuerzas reactivas $\mathbf{D}_x$ y $\mathbf{D}_y$ son fijas, y $\mathbf{B}_y$ no se mueve a lo largo de su línea de acción).

Desplazamientos virtuales. Si el origen de coordenadas se establece en el pasador *fijo D*, la localización de **F** y **W** puede especificarse por las *coordenadas de posición* x_B y y_w, como se muestra en la figura. Con el propósito de determinar el trabajo, note que estas coordenadas son paralelas a las líneas de acción de sus fuerzas asociadas.

http://librosysolucionarios.net

Si expresamos las coordenadas de posición en términos de la coordenada independiente θ y tomamos las derivadas, tenemos

$$x_B = 2(1 \cos \theta) \text{ m} \qquad \delta x_B = -2 \text{ sen } \theta \, \delta\theta \text{ m} \qquad (1)$$

$$y_W = \tfrac{1}{2}(1 \text{ sen } \theta) \text{ m} \qquad \delta y_W = 0.5 \cos \theta \, \delta\theta \text{ m} \qquad (2)$$

Se ve por los signos de estas ecuaciones, y se indica en la figura 11.5*b*, que un incremento en θ (es decir $\delta\theta$) causa *disminución* en x_B e *incremento* en y_W.

Ecuación de trabajo virtual. Si los desplazamientos virtuales δx_B y δy_W fuesen *ambos positivos,* las fuerzas y sus correspondientes desplazamientos tendrían el mismo sentido, y el trabajo de las fuerzas **W** y **F** sería positivo. Luego, la ecuación de trabajo virtual para el desplazamiento $\delta\theta$ es

$$\delta U = 0; \qquad W\,\delta y_W + W\,\delta y_W + F\,\delta x_B = 0 \qquad (3)$$

Si sustituimos las ecuaciones 1 y 2 en la ecuación 3 para relacionar los desplazamientos virtuales con el desplazamiento virtual común $\delta\theta$ tenemos

$$98.1(0.5 \cos \theta \, \delta\theta) + 98.1(0.5 \cos \theta \, \delta\theta) + 25(-2 \text{ sen } \theta \, \delta\theta) = 0$$

Observe que "el trabajo negativo" hecho por **F** (fuerza en sentido opuesto al desplazamiento) se ha *tomado en cuenta* en la ecuación de arriba por el signo negativo de la ecuación 1. Al sacar como *factor común al desplazamiento* $\delta\theta$ y resolver en θ, considerando que $\delta\theta$ no es nulo, se obtiene

$$(98.1 \cos \theta - 50 \text{ sen } \theta) \, \delta\theta = 0$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{98.1}{50} = 63.0° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Si este problema se hubiese resuelto usando las ecuaciones de equilibrio, hubiese sido necesario desmembrar los eslabones y aplicar tres ecuaciones escalares a *cada* eslabón. El principio del trabajo virtual, por medio del cálculo, ha eliminado esta tarea, de modo que la respuesta se obtiene directamente.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 11.2

Usando el principio del trabajo virtual, determine el ángulo θ requerido para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura 11.6a. Se despreciará el peso de los eslabones. El resorte está inextendido cuando $\theta = 0°$ y mantiene posición horizontal debido al rodillo.

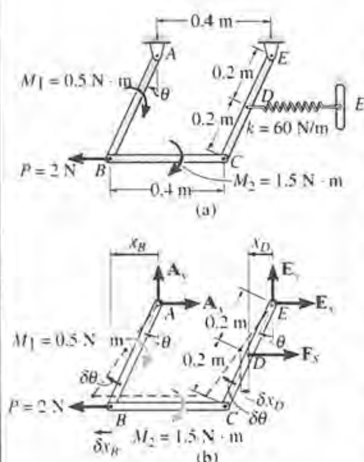


Fig. 11.6

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El mecanismo tiene un grado de libertad solamente y, por tanto, la situación de cada miembro puede determinarse usando la coordenada independiente θ. Cuando θ es sometida a un desplazamiento virtual *positivo* $\delta\theta$, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 11.6*b*, los eslabones AB y EC giran la misma distancia, puesto que tienen la misma longitud y el eslabón BC sólo se traslada. Dado que un momento de par *sólo* trabaja cuando gira, el trabajo realizado por M_2 es cero. Las fuerzas reactivas en A y en E no realizan trabajo. ¿Por qué?

Desplazamientos virtuales. Las coordenadas de posición x_B y x_D son paralelas a las líneas de acción de **P** y **F**, y estas coordenadas localizan estas fuerzas con respecto a los puntos fijos A y E. De la figura 11.6*b*

$$x_B = 0.4\, sen\ \theta \text{ m}$$
$$x_D = 0.2\, sen\ \theta \text{ m}$$

De modo que

$$\delta x_B = 0.4 \cos\theta\,\delta\theta \text{ m}$$
$$\delta x_D = 0.2 \cos\theta\,\delta\theta \text{ m}$$

Ecuación de trabajo virtual. Si aplicamos la ecuación de trabajo virtual considerando que para desplazamientos positivos, $\mathbf{F}_s$ es opuesta a δx_D, por tanto, realiza un trabajo negativo, obtenemos

$$\delta U = 0; \qquad M_1\,\delta\theta + p\,\delta x_B - F_s\,\delta x_D = 0$$

Si relacionamos cada uno de los desplazamientos virtuales al desplazamiento virtual *común* $\delta\theta$ tenemos

$$0.5\,\delta\theta + 2(0.4\cos\theta\,\delta\,\theta) - F_s(0.2\cos\theta\,\delta\theta) = 0$$
$$(0.5 + 0.8\cos\theta - 0.2F_s\cos\theta)\,\delta\theta = 0 \qquad (1)$$

Para el ángulo arbitrario θ, el resorte se estira una distancia de $x_D = (0.2 \text{ sen } \theta)$ m; y, por tanto, $F_s = 60$ N/m$(0.2 \text{ sen } \theta)$m $= (12 \text{ sen } \theta)$N. Si sustituimos en la ecuación, considerando que $\delta\theta$ es diferente de cero, tenemos

$$0.5 + 0.8\cos\theta - 0.2(12 \text{ sen } \theta)\cos\theta = 0$$

Ya que $sen\ 2\theta = 2\, sen\ \theta \cos\theta$, se obtiene

$$1 = 2.4 \text{ sen } 2\theta - 1.6\cos\theta$$

Si resolvemos en θ por un método de aproximaciones sucesivas, obtenemos

$$\theta = 36.3° \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 11.3

Usando el principio del trabajo virtual, determine la fuerza horizontal que el pasador en C debe ejercer para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura 11.7*a* cuando $\theta = 45°$. Desprecie el peso de los miembros.

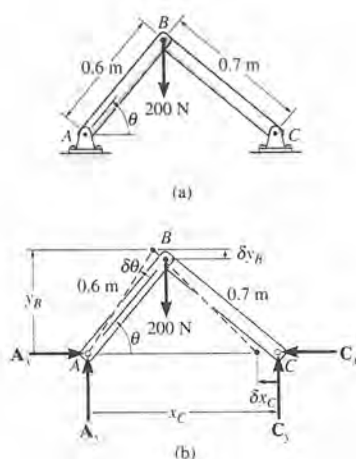


Fig. 11.7

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La reacción $\mathbf{C}_x$ puede obtenerse *liberando* la restricción en C en la dirección x y permitiendo el desplazamiento del bastidor en esta dirección. El sistema tiene sólo un grado de libertad definido por la coordenada independiente θ, figura 11.7*b*: cuando θ es sometida a un desplazamiento virtual *positivo* $\delta\theta$, sólo realizan un trabajo $\mathbf{C}_x$ y la fuerza de 200–N.

Desplazamientos virtuales. Las fuerzas $\mathbf{C}_x$ y 200 N se localizan a partir del origen fijo A usando las coordenadas de posición y_B y x_C. De la figura 11.7*b*, x_C puede relacionarse con θ por la "ley de los cosenos". Así pues,

http://librosysolucionarios.net

$$(0.7)^2 = (0.6)^2 + x_C^2 - 2(0.6)x_C \cos\theta \quad (1)$$

$$0 = 0 + 2x_C\,\delta x_C - 1.2\,\delta x_C \cos\theta + 1.2x_C\, sen\,\theta\,\delta\theta$$

$$\delta x_C = \frac{1.2x_C\, sen\,\theta}{1.2\cos\theta - 2x_C}\delta\theta \quad (2)$$

También

$$y_B = 0.6\, sen\,\theta$$

$$\delta y_B = 0.6\cos\theta\,\delta\theta \quad (3)$$

Ecuación de trabajo virtual. Cuando y_B y x_C se someten a desplazamientos virtuales *positivos* δy_B y δx_C, C_x y 200 N efectúan *trabajo negativo*, pues actúan en el sentido opuesto a $\delta \mathbf{y}_B$ y $\delta \mathbf{x}_C$ De tal manera que,

$$\delta U = 0; \qquad -200\,\delta y_B - C_x\,\delta x_C = 0$$

Si sustituimos las ecuaciones 2 y 3 en esta ecuación, factorizando $\delta\theta$ y resolviendo para C_x tenemos

$$-200(0.6\cos\theta\,\delta\theta) - C_x\frac{1.2x_C \text{ sen }\theta}{1.2\cos\theta - 2x_C}\delta\theta = 0$$

$$C_x = \frac{-120\cos\theta(1.2\cos\theta - 2x_C)}{1.2x_C \text{ sen }\theta} \quad (4)$$

En la posición de equilibrio requerida $\theta = 45°$, el valor correspondiente de x_C puede encontrarse utilizando la ecuación 1, y en este caso

$$x_C^2 - 1.2\cos 45°\, x_C - 0.13 = 0$$

Si resolvemos para obtener la raíz positiva, obtenemos

$$x_C = 0.981 \text{ m}$$

Así, de la ecuación 4,

$$C_x = 114 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 11.4

Usando el principio del trabajo virtual, determine la posición de equilibrio del dispositivo de dos eslabones mostrado en la figura 11.8*a*. Desprecie el peso de los eslabones.

SOLUCIÓN

El sistema tiene dos grados de libertad, ya que las *coordenadas independientes* θ_1 y θ_2 deben conocerse para localizar la posición de ambos eslabones. La coordenada de posición x_B, medida desde el punto fijo O, se usa para especificar la localización de **P**, figura 11.8b y *c*.

Si θ_1 se mantiene *fijo* y θ_2 varía en una cantidad $\delta\theta_2$, como se ve en la figura 11.8*b*, la ecuación de trabajo virtual viene a ser

$$[\delta U = 0]_{\theta_2}; \qquad P(\delta x_B)_{\theta_2} - M\,\delta\theta_2 = 0 \qquad (1)$$

Aquí P y M representan las magnitudes de la fuerza y momento de par aplicados cuando actúan en el eslabón AB.

Cuando θ_2 se mantiene *fijo* y θ_1 varía en una cantidad $\delta\theta_1$, como se ve la figura 11.8*c*, la ecuación de trabajo virtual es

$$[\delta U = 0]_{\theta_1}; \qquad P(\delta x_B)_{\theta_1} - M\,\delta\theta_1 - M\,\delta\theta_1 = 0 \qquad (2)$$

La *coordenada de posición* x_B puede relacionarse con las coordenadas independientes θ_1 y θ_2 por la ecuación

$$x_B = l \text{ sen } \theta_1 + l \text{ sen } \theta_2 \qquad (3)$$

Para obtener la variación de δx_B en términos de $\delta\theta_2$, es necesario tomar la *derivada parcial* de x_B con respecto a θ_2 ya que x_B es una función de θ_1 y de θ_2. Así,

$$\frac{\partial x_B}{\partial \theta_2} = l \cos \theta_2 \qquad (\delta x_B)_{\theta_2} = l \cos \theta_2\, \delta\theta_2$$

Sustituyendo en la ecuación 1, tenemos

$$(Pl \cos \theta_2 - M)\,\delta\theta_2 = 0$$

Dado que $\delta\theta_2 \neq 0$, se tendrá

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{M}{Pl}\right) \qquad \textit{Resp.}$$

Usando la ecuación 3 para obtener la variación de x_B con θ_1 se obtiene

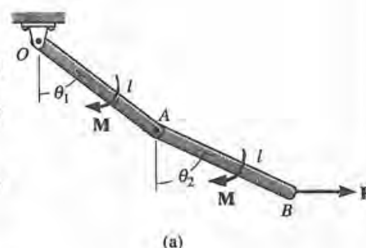
$$\frac{\partial x_B}{\partial \theta_1} = l \cos \theta_1 \qquad (\delta x_B)_{\theta_1} = l \cos \theta_1\, \delta\theta_1$$

Sustituyendo en la ecuación 2, tenemos

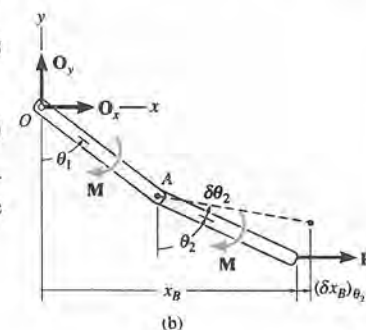
$$(Pl \cos \theta_1 - 2M)\,\delta\theta_1 = 0$$

Ya que $\delta\theta_1 \neq 0$, se obtiene

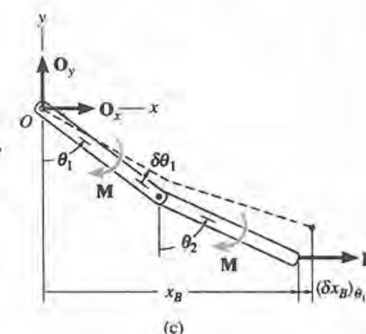
$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{2M}{Pl}\right) \qquad \textit{Resp.}$$



(a)



(b)



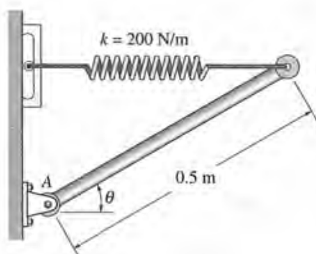
(c)

Fig. 11.8

http://librosysolucionarios.net

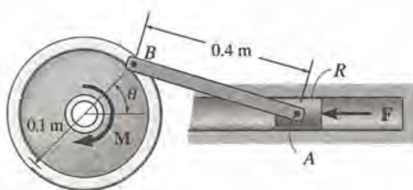
PROBLEMAS

11.1. Determine la fuerza desarrollada en el resorte y requerida para mantener en equilibrio la barra de 6 kg cuando $\theta = 30°$.



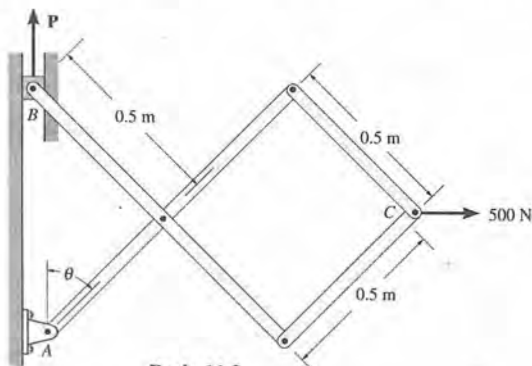
Prob. 11.1

11.2. La prensa troqueladora consta del émbolo de percusión R, la barra de conexión AB, y un volante. Si se aplica un momento de torsión de $M = 50$ N· m, determine la fuerza **F** aplicada en el émbolo para mantener la barra en la posición $\theta = 60°$.



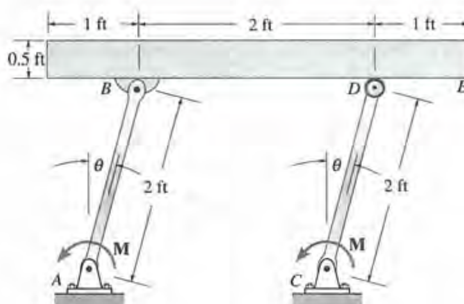
Prob. 11.2

11.3. El mecanismo de articulaciones está restringido en A por un pasador y en B por un bloque liso deslizante. Si $P = 200$ N, determine el ángulo θ para equilibrio.



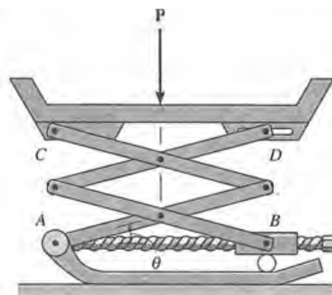
Prob. 11.3

*** 11.4.** Determine la magnitud de los momentos de par aplicados **M**, que se necesitan para mantener el equilibrio cuando $\theta = 20°$. La placa E tiene un peso de 50 lb. Desprecie el peso de los eslabones AB y CD.



Prob. 11.4

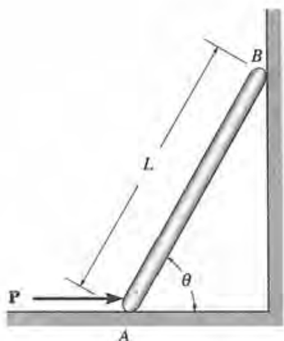
11.5. El gato de tijeras soporta una carga **P**. Determine la fuerza axial necesaria en el tornillo para el equilibrio cuando el gato está en la posición θ. Cada uno de los cuatro eslabones tiene longitud L y está articulado en el punto medio. Los puntos B y D pueden moverse horizontalmente.



Prob. 11.5

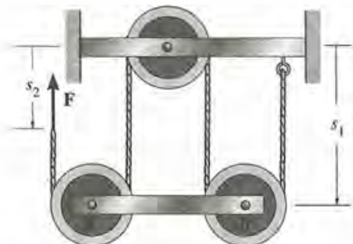
http://librosysolucionarios.net

11.6. La barra delgada de peso W descansa apoyada en la pared lisa y el piso. Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantenerla en equilibrio.



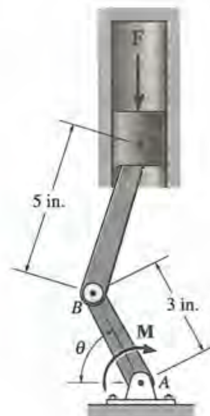
Prob. 11.6

11.7. Determine la magnitud de la fuerza **F** que actúa en la cuerda, que se necesite para mantener el equilibrio de la barra horizontal de 10 kg, *AB*. *Sugerencia*: exprese la *longitud l vertical constante* de la cuerda en términos de las coordenadas de posición s_1 y s_2. La derivada de esta ecuación proporciona una relación entre δs_1 y δs_2.



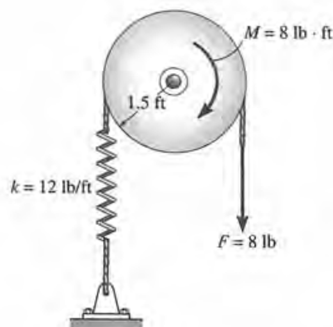
Prob. 11.7

* **11.8.** El codo está sujeto a un momento de torsión de $M = 50$ lb · ft. Determine la fuerza vertical de compresión **F** que se aplica sobre el pistón para el equilibrio cuando $\theta = 60°$.



Prob. 11.8

11.9. El disco tiene un peso de 10 lb y está sometido a una fuerza vertical de $F = 8$ lb y un momento de par $M = 8$ lb · ft. Determine la rotación del disco θ si el extremo del resorte se enrolla sobre el borde del disco al girar éste. El resorte originalmente está inextendido.

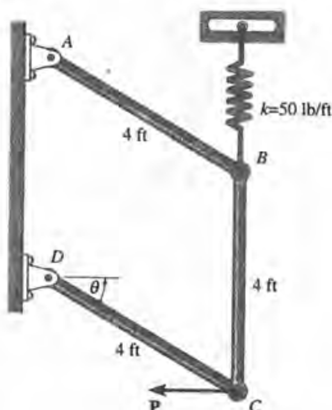


Prob. 11.9

http://librosysolucionarios.net

11.10. Si cada uno de los eslabones del mecanismo tiene un peso de 20 lb, determine el ángulo θ para equilibrio. El resorte, que siempre está vertical, se encuentra inextendido cuando $\theta = 0°$. Considere que $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

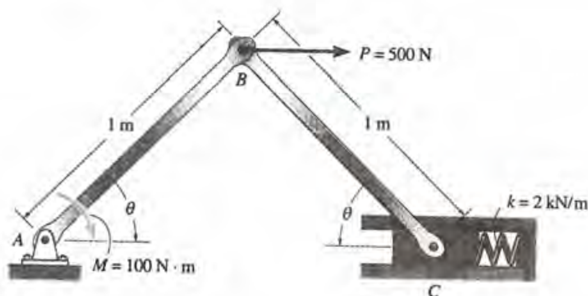
11.11. El resorte está inextendido cuando $\theta = 0°$. Si $P = 100$ lb, determine el ángulo θ para equilibrio. Desprecie el peso de las correderas.



Probs. 11.10/11.11

11.13. El dispositivo de dos barras eslabones está sujeto a un momento de par $M = 100$ N · m y una fuerza horizontal $P = 500\,N$. Determine el ángulo θ para equilibrio. El resorte está inextendido cuando $\theta = 45°$. Desprecie la masa de cada barra.

11.14. El dispositivo de dos barras eslabones está sujeto a un momento de par $M = 100$ N · m y una fuerza horizontal $P = 500$ N. También cada barra es uniforme y tiene masa de 10 kg. Determine el ángulo θ para equilibrio. El resorte está inextendido cuando $\theta = 45°$.

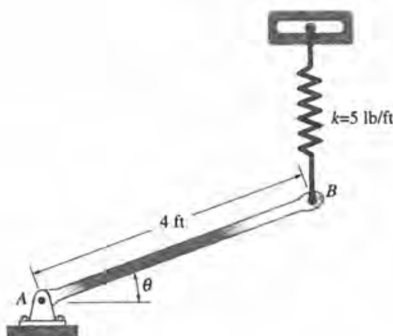


Probs. 11.13/11.14

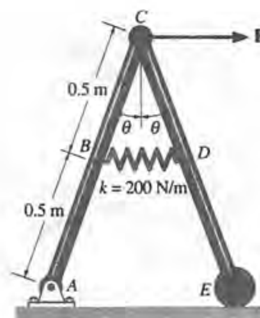
11.15. El resorte inextendido mide 0.3 m. Determine el ángulo θ para equilibrio si los eslabones uniformes tienen cada uno masa de 5 kg. Considere que $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

* **11.16.** El resorte inextendido mide 0.3 m. Determine el ángulo θ para equilibrio si $P = 50$ N. Desprecie el peso de los eslabones.

* **11.12.** La barra uniforme AB pesa 10 lb. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 60°$, determine el ángulo θ para equilibrio.



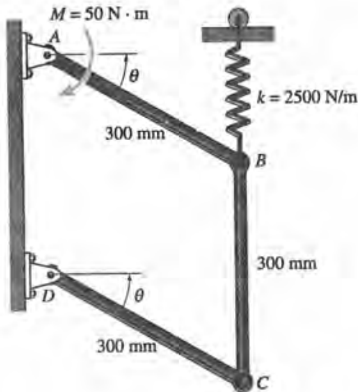
Prob. 11.12



Probs. 11.15/11.16

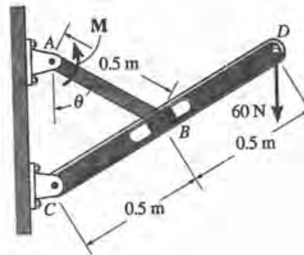
http://librosysolucionarios.net

11.17. Cada miembro del mecanismo articulado tiene una masa de 8 kg. Si el resorte inextendido corresponde a un valor $\theta = 0°$, determine el ángulo θ para equilibrio.



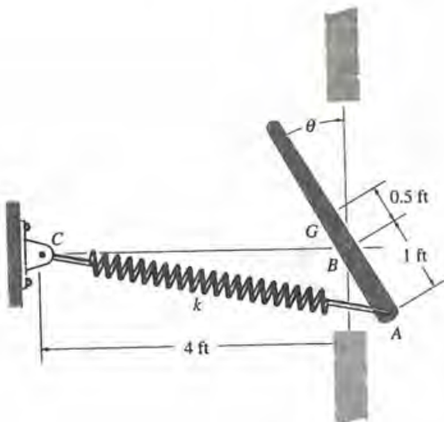
Prob. 11.17

11.19. Determine el momento M requerido para mantener el equilibrio del mecanismo deslizador $\theta = 60°$.



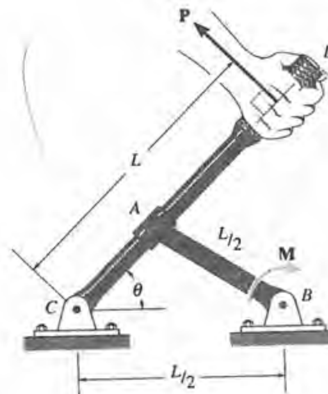
Prob. 11.19

11.18. La placa de ventilación tiene en B un apoyo de pasador. Si su peso es de 15 lb y tiene centro de gravedad en G, determine la rigidez k del resorte, de modo que la placa permanezca en equilibrio en $\theta = 30°$. Cuando $\theta = 0°$, el resorte está inextendido.



Prob. 11.18

*** 11.20.** Determine la fuerza **P** que debe aplicarse perpendicularmente a la manija para mantener el mecanismo en equilibrio para cualquier ángulo θ de la barra CD. Existe un momento de par aplicado al eslabón BA, denotado **M**. Un collarín liso en A resbala sobre CD.

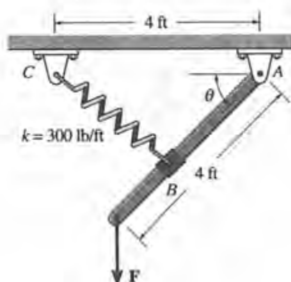


Prob. 11.20

http://librosysolucionarios.net

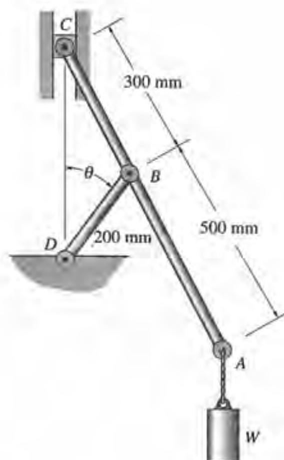
11.21. La barra es soportada por un pasador en A y un collarín liso en B. Si el resorte inextendido mide 1 ft, determine el ángulo θ para equilibrio cuando la fuerza vertical que actúa sobre la barra es $F = 50$ lb.

11.22. Resuelva el problema 11.21 si la fuerza **F** se aplica *perpendicularmente* a la barra, esto es, de tal modo que se dirija hacia abajo y a la derecha.



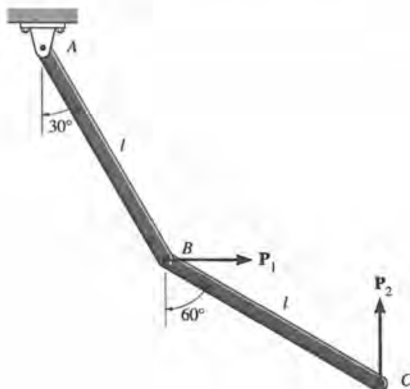
Probs. 11.21/11.22

* **11.24.** Un bloque con un peso de W se encuentra atado al extremo de la barra ABC. La barra está apoyada en C por un bloque liso deslizante y en la barra BD, determine el ángulo θ. Desprecie los pesos de las barras y el deslizador.



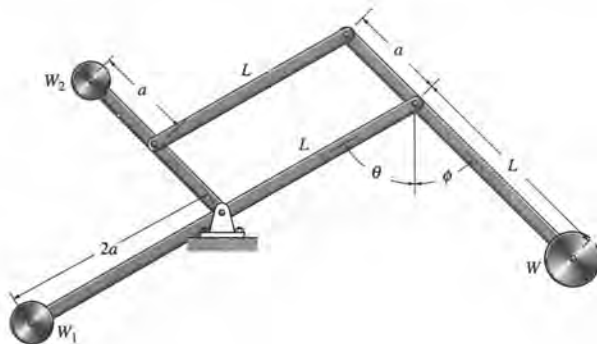
Prob. 11.24

11.23. Determine la fuerza horizontal $\mathbf{P}_1$ y vertical $\mathbf{P}_2$ necesarias para mantener la posición de equilibrio de los dos eslabones uniformes. Cada eslabón pesa 20 lb.



Prob. 11.23

11.25. Un peso W se suspende en un extremo del dispositivo de eslabones paralelos que se muestra. Determine los pesos W_1 y W_2 que deben suspenderse de los otros extremos para que el sistema permanezca en equilibrio para cualquier ángulo θ o Φ de los miembros. Desprecie el peso de los miembros en el cálculo.



Prob. 11.25

http://librosysolucionarios.net

* 11.4 Fuerzas conservativas

El trabajo realizado por una fuerza en un *desplazamiento diferencial* se ha definido como $dU = F \cos \theta \, ds$. Si la fuerza se desplaza por una trayectoria de *longitud finita* s, el trabajo se determina integrando sobre la trayectoria; esto es,

$$U = \int_s F \cos \theta \, ds$$

Para evaluar la integral, es necesario obtener una relación entre F y la componente del desplazamiento $ds \cos \theta$. En condiciones especiales, sin embargo, el trabajo será *independiente* de la trayectoria recorrida por la fuerza y sólo dependerá de los puntos extremos, inicial y final, de la trayectoria. Una fuerza que goce de esta propiedad se denomina una *fuerza conservativa*.

Peso. Considere el cuerpo de la figura 11.9, inicialmente en P'. Si se mueve hacia *abajo* por la *trayectoria arbitraria* a la posición de línea segmentada, entonces, para un desplazamiento ds a lo largo de la trayectoria, la componente de desplazamiento en la dirección de **W** tiene magnitud $dy = ds \cos \theta$, como se muestra. Ya que tanto la fuerza como el desplazamiento tienen el mismo sentido, el trabajo es positivo; luego

$$U = \int_s W \cos \theta \, ds = \int_0^y W \, dy$$

o

$$U = Wy$$

De manera semejante, el trabajo realizado por el peso cuando el cuerpo se mueve hacia arriba una distancia y de regreso a P', a lo largo de la trayectoria arbitraria A', es

$$U = -Wy$$

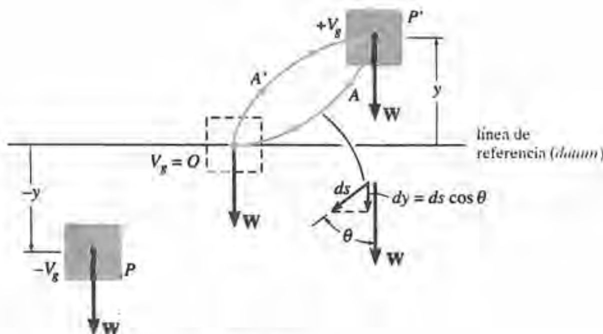


Fig. 11.9

http://librosysolucionarios.net

¿Por qué es negativo el trabajo?

El peso de un cuerpo es, por tanto, una fuerza conservativa, pues el trabajo realizado por el peso *sólo* depende del *desplazamiento vertical* del cuerpo y no depende de la trayectoria por la que se mueve.

Resorte elástico. La fuerza desarrollada por un resorte elástico ($F_s = ks$) es también de conservación. Si el resorte se sujeta a un cuerpo y éste se desplaza por *cualquier trayectoria*, con la elongación o acortamiento resultante del resorte de una posición s_1 a una posición s_2, el trabajo será negativo, pues el resorte ejerce una fuerza $\mathbf{F}_s$ *sobre el cuerpo* que es opuesta al desplazamiento ds del cuerpo, figura 11.10. Para la extensión o la compresión, el trabajo es independiente de la trayectoria y es simplemente

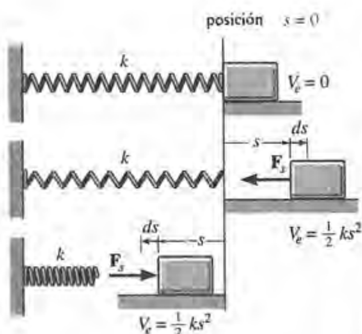


Fig. 11.10

$$U = \int_{s_1}^{s_2} F_s\, ds = \int_{s_1}^{s_2} (-ks)\, ds$$
$$= (\tfrac{1}{2} ks_2^2 - \tfrac{1}{2} ks_1^2)$$

Fricción. En contraste con una fuerza conservativa, consideremos la fuerza de *fricción* ejercida en un cuerpo en movimiento por una superficie fija. El trabajo realizado por la fuerza de fricción depende de la trayectoria; cuanto más larga la trayectoria, tanto mayor el trabajo. En consecuencia, las fuerzas de fricción *no son conservativas* y el trabajo realizado se disipa del cuerpo en forma de calor.

* 11.5 Energía potencial

Cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza conservativa, le da la capacidad de efectuar trabajo. Esta capacidad, medida como *energía potencial*, depende de la localización del cuerpo.

Energía potencial gravitacional. Si un cuerpo se sitúa a una distancia *y por arriba* de una referencia horizontal, figura 11.9, el cuerpo tiene una energía potencial gravitacional *positiva* V_g, ya que **W** tiene la capacidad de hacer trabajo positivo al regresar el cuerpo a la línea de referencia. Así también, si el cuerpo se sitúa una distancia y *debajo* de la línea de referencia, V_g es *negativa*, pues el cuerpo realiza trabajo negativo al ser movido de regreso a la línea de referencia. En la línea de referencia, $V_g = 0$.

Midiendo *y* como *positiva hacia arriba*, la energía potencial gravitacional del peso de cuerpo, W, es, entonces

$$V_g = Wy \tag{11.4}$$

http://librosysolucionarios.net

Energía potencial elástica. La energía potencial elástica V_e que produce un resorte en un cuerpo sujetado, cuando el resorte se alarga y comprime desde la posición indeformada ($s = 0$) a la posición final s, es

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \tag{11.5}$$

Aquí, V_e *siempre es positiva*, pues en la posición deformada el resorte tiene la capacidad de realizar *trabajo positivo* al *retornar* el cuerpo a la posición indeformada para el resorte, figura 11.10.

Función potencial. En el caso general, si un cuerpo está sometido a fuerzas gravitacionales y a fuerzas elásticas, la *energía potencial o función potencial* V del cuerpo puede ser expresada como la suma algebraica

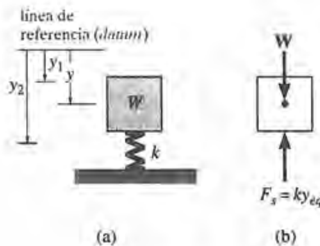


Fig. 11.11

$$V = V_g + V_e \tag{11.6}$$

donde la medición de V depende de la posición del cuerpo respecto a una línea de referencia elegida, de acuerdo con las ecuaciones 11.4 y 11.5.

En general, si un sistema de cuerpos rígidos conectados sin fricción tiene *sólo un grado de libertad*, tal que su posición respecto a la línea de referencia se define por la coordenada independiente q, la función potencial para el sistema puede expresarse como $V = V(q)$. El trabajo realizado por todas las fuerzas conservativas que actúan en el sistema para moverlo de la posición q_1 a q_2 se mide por la *diferencia* en V; esto es,

$$U_{1\text{-}2} = V(q_1) - V(q_2) \tag{11.7}$$

Por ejemplo, la función potencial para un sistema que consta de un bloque de peso **W** soportado por un resorte, figura 11.11*a*, puede expresarse en términos de su coordenada independiente ($q =$) y, medida desde una línea de referencia fija situada en la longitud inextendida del resorte; tenemos

http://librosysolucionarios.net

$$V = V_g + V_e$$
$$= -Wy + \tfrac{1}{2}ky^2 \qquad (11.8)$$

Si el bloque se mueve de y_1 a una posición más baja y_2, el trabajo de **W** y $\mathbf{F}_s$ es

$$U_{1\text{-}2} = V(y_1) - V(y_2) = -W[y_1 - y_2] + \tfrac{1}{2}ky_1^2 - \tfrac{1}{2}ky_2^2$$

11.6 Criterio de la energía potencial para el equilibrio

Sistema que tiene un solo grado de libertad. Cuando el desplazamiento de un sistema conectado sin fricción es *infinitesimal*, esto es, desde q hasta $q + dq$, la ecuación 11.7 viene a ser

$$dU = V(q) - V(q + dq)$$

o

$$dU = -dV$$

Además, si el sistema recibe un *desplazamiento virtual* δq, en vez de un desplazamiento real dq, entonces $\delta U = -\delta V$. Para equilibrio, el principio del trabajo virtual requiere que $\delta U = 0$ y por tanto, siempre que la función potencial para el sistema sea conocida, se requiere que también $\delta V = 0$. Podemos también expresar la condición como

$$\frac{dV}{dq} = 0 \qquad (11.9)$$

De tal manera que, *cuando un sistema conectado sin fricción de cuerpos rígidos está en equilibrio, la primera variación o cambio en V es cero*. Este cambio se determina tomando la *primera derivada* de la función potencial e igualándola a cero. Por ejemplo, usando la ecuación 11.8 para determinar la posición de equilibrio para el resorte y el bloque en la figura 11.11*a*, tenemos

$$\frac{dV}{dy} = W - ky = 0$$

Luego, la posición de equilibrio $y = y_{eq}$ es

$$y_{eq} = \frac{W}{k}$$

http://librosysolucionarios.net

Por supuesto que el *mismo resultado* se obtiene aplicando $\Sigma F_y = 0$ a las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre del bloque, figura 11.11*b*.

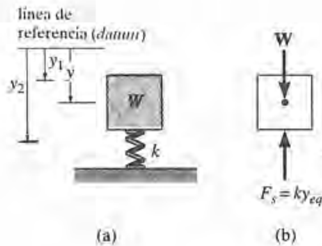


Fig. 11.11

Sistema con *n* grados de libertad. Cuando el sistema de cuerpos conectados posee *n* grados de libertad, la energía potencial almacenada en el sistema es una función de *n* coordenadas independientes q_n; esto es, $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Con el propósito de aplicar el criterio de equilibrio $\delta V = 0$, es necesario determinar el cambio en la energía potencial δV usando la "regla de la cadena" del cálculo diferencial; esto es,

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial q_n}\delta q_n = 0$$

Ya que los desplazamientos virtuales $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ son independientes entre sí, la ecuación se satisface siempre que

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0$$

De aquí que *es posible escribir n ecuaciones independientes para un sistema que posea n grados de libertad.*

* 11.7 Estabilidad del equilibrio

Una vez definida la configuración de equilibrio para un cuerpo o sistema de cuerpos conectados, puede ser importante investigar el "tipo" de equilibrio o la estabilidad de la configuración. Por ejemplo, consideremos la posición de una bola que descansa en un punto de cada una de las tres trayectorias mostradas en la fi-

http://librosysolucionarios.net

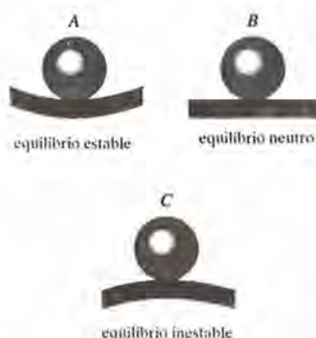


Fig. 11.12

gura 11.12. Cada situación representa un estado de equilibrio para la bola. Si se encuentra en A, se dice que se encuentra en *equilibrio estable*, porque si recibe un pequeño desplazamiento cuesta arriba, siempre *retornará* a la posición original, la más baja. En A, su energía potencial total es *mínima*. Cuando la bola está en B se dice que está en *equilibrio neutro*. Un pequeño desplazamiento hacia la derecha o la izquierda de B no cambiará la condición de equilibrio neutro. La bola *permanece* en equilibrio en su posición desplazada y, por tanto, su energía potencial es *constante*. Si la bola se encuentra en C, tiene *equilibrio inestable*. Aquí un pequeño desplazamiento da por resultado que la energía potencial *disminuya* y, por tanto, rodará lejos de su posición original más elevada, C. En C, la energía potencial de la bola es un *máximo*.

Tipo de equilibrio. El ejemplo anterior ilustra la posibilidad de especificar uno de tres tipos de posiciones de equilibrio para un cuerpo o un sistema de cuerpos conectados.

1. El *equilibrio estable* se presenta cuando un pequeño desplazamiento del sistema causa el retorno del sistema a su posición original. En este caso, la energía potencial original del sistema es un mínimo.
2. El *equilibrio neutro* se da cuando un pequeño desplazamiento del sistema causa que el sistema permanezca en su estado desplazado. En este caso la energía potencial del sistema permanece constante.
3. El *equilibrio inestable* ocurre cuando un pequeño desplazamiento del sistema causa que el sistema se desplace más allá todavía de su posición original. En este caso la energía potencial original del sistema es un máximo.

Sistema de un grado de libertad. Para el equilibrio de un sistema que tiene sólo un grado de libertad, definido por la coordenada independiente q, se ha mostrado que la primera derivada de la función potencial para el sistema debe ser cero; esto es, $dV/dq = 0$. Si se grafic.. la función potencial $V = V(q)$, figura 11.13, la primera derivada (posición de equilibrio) se representa como la pendiente dV/dq, que es nula cuando la función alcanza un valor máximo, o mínimo o en un punto de inflexión.

Si se pretende investigar la *estabilidad* del cuerpo en una posición de equilibrio, es necesario determinar la segunda derivada de V y evaluarla en la posición de equilibrio $q = q_{eq}$. Como se muestra en la figura 11.13*a*, si $V = V(q)$ es un *mínimo*, entonces

$$\frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} > 0 \quad \text{equilibrio estable} \tag{11.10}$$

http://librosysolucionarios.net

Si $V = V(q)$ es un *máximo*, figura 11.13*b*, entonces

$$\frac{dV}{dq} = 0, \frac{d^2V}{dq^2} < 0 \quad \text{equilibrio inestable} \tag{11.11}$$

Si la segunda derivada es cero, será necesario investigar derivadas de *órdenes superiores* para determinar la estabilidad. En particular, el estado de equilibrio ocurrirá si el orden más bajo posible de una derivada no nula es *par* y el signo de esta derivada no nula es positivo al evaluársele en $q = q_{eq}$; de otro modo, es inestable.

Si el sistema está en equilibrio neutro, figura 11.13*c*, se requiere que

$$\frac{dV}{dq} = \frac{d^2V}{dq^2} = \frac{d^3V}{dq^3} = \ldots = 0 \quad \text{equilibrio neutral} \tag{11.12}$$

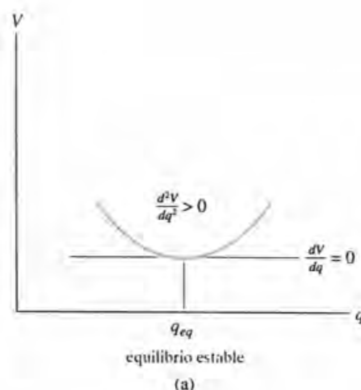
ya que V debe ser constante en y en la "vecindad" de q_{eq}.

Sistema de dos grados de libertad. Un criterio de investigación de la estabilidad aumenta en complejidad al elevarse el número de grados de libertad del sistema. Para un sistema que tenga dos grados de libertad, definido por las coordenadas independientes (q_1, q_2), puede verificarse (usando el cálculo de funciones de dos variables) que el equilibrio y la estabilidad ocurren en el punto (q_{1eq}, q_{2eq}) cuando

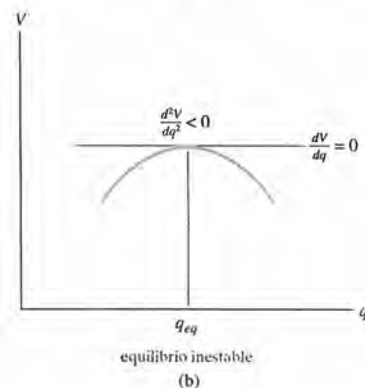
$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)\right] < 0$$

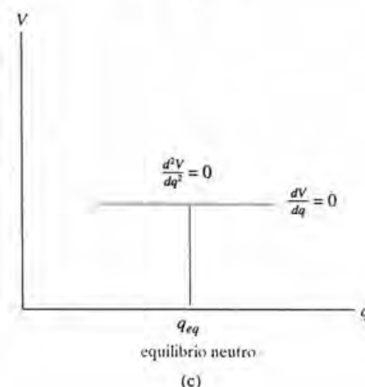
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right) > 0$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 11.13

http://librosysolucionarios.net

Habrá equilibrio con inestabilidad cuando

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)\right] < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right) < 0$$

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Usando métodos de energía potencial, pueden obtenerse las posiciones de equilibrio y la estabilidad de un cuerpo o un sistema de cuerpos conectados que posean un solo grado de libertad, por aplicación del procedimiento siguiente.

Función potencial. Formule la función potencial $V = V_g + V_e$ para el sistema. Para lograrlo, debe hacerse un bosquejo del sistema, de tal manera que se localice en alguna posición arbitraria especificada por la coordenada independiente q. Se establece una *línea de referencia* horizontal que pase por un *punto fijo*,* y la *energía potencial gravitacional* V_g se expresa en términos del peso W de cada miembro y su distancia vertical y a la línea de referencia $V_g = Wy$, ecuación 11.4. La energía potencial elástica V_e del sistema se expresa en términos del estiramiento o compresión, s, de un resorte cualquiera de conexión y la rigidez del resorte k, $V_e = \frac{1}{2}ks^2$, ecuación 11.5. Una vez que se ha establecido V, se expresan las *coordenadas de posición* y y s en términos de la coordenada independiente q.

Posición de equilibrio. La posición de equilibrio se determina tomando la primera derivada de V para igualarla a cero, $\delta V = 0$, ecuación 1.9.

Estabilidad. La estabilidad en la posición de equilibrio se determina evaluando la segunda derivada o derivadas de orden más alto, como se indica en las ecuaciones 11.10 a 11.12.

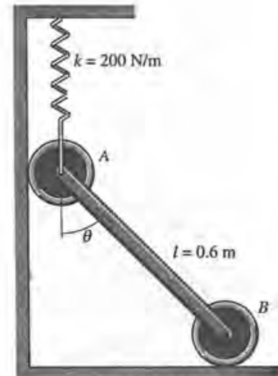
Los ejemplos siguientes ilustran numéricamente el procedimiento descrito.

* La localización de la línea de referencia es arbitraria, dado que sólo se requieren los cambios o diferenciales de V en la investigación de las posiciones de equilibrio y su estabilidad.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 11.5.

El eslabón uniforme mostrado en la figura 11.14*a* tiene masa de 10 kg. El resorte está sin deformar cuando $\theta = 0°$. Determine el ángulo para equilibrio e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.



(a)

SOLUCIÓN

Función potencial. La referencia se ubica en la parte alta del eslabón con el resorte inextendida, figura 11.14*b*. Cuando el eslabón se localiza en la posición arbitraria θ, el resorte aumenta su energía potencial alargándose, y el peso disminuye su energía potencial. Siendo así

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}ks^2 - W\left(s + \frac{l}{2}\cos\theta - \frac{l}{2}\right)$$

Dado que $l = s + l\cos\theta$ o $s = l(1-\cos\theta)$, tenemos

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1-\cos\theta)^2 - \frac{Wl}{2}(1-\cos\theta)$$

Posición de equilibrio. La primera derivada de V da

$$\frac{dV}{d\theta} = kl^2(1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \frac{Wl}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

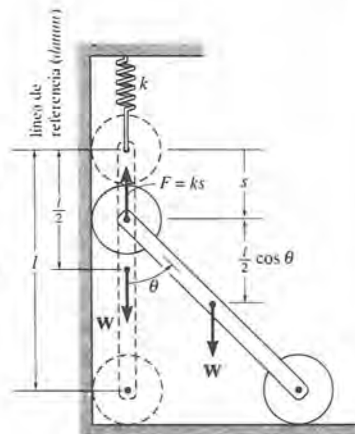
o

$$l\left[kl(1-\cos\theta) - \frac{W}{2}\right]\operatorname{sen}\theta = 0$$

Esta ecuación se satisface si

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \theta = 0° \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{W}{2kl}\right) = \cos^{-1}\left[1 - \frac{10(9.81)}{2(200)(0.6)}\right] = 53.8° \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 11.14

Estabilidad. Determinando la segunda derivada de V se tiene

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kl^2(1-\cos\theta)\cos\theta + kl^2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$

$$= kl^2(\cos\theta - \cos 2\theta) - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$

Si sustituimos los valores de las constantes, con $\theta = 0°$ y $\theta = 53.8°$, se obtiene

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0°} = 200(0.6)^2(\cos 0° - \cos 0°) - \frac{10(9.81)(0.6)}{2}\cos 0°$$

$$= -29.4 < 0 \text{ (equilibrio inestable en } \theta = 0°) \qquad \textit{Resp.}$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=53.8°} = 200(0.6)^2(\cos 53.8° - \cos 107.6°) - \frac{10(9.81)(0.6)}{2}\cos 53.8°$$

$$= 46.9 > 0 \text{ (equilibrio estable en } = 53.8°) \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 11.6

Determine la masa m del bloque necesaria para el equilibrio de la barra uniforme de 10 kg de la figura 11.15a cuando $\theta = 20°$. Investige la estabilidad de la posición de equilibrio.

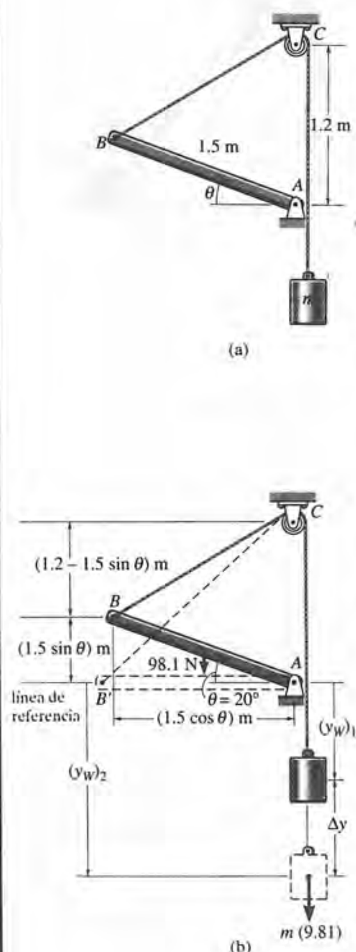


Fig. 11.15

SOLUCIÓN

***Función* potencial.** La referencia se hace pasar por el punto A, figura 11.15b. Cuando $\theta = 0°$, el bloque se supone suspendido $(y_w)_1$ por abajo de la referencia. Luego, en la posición θ,

$$V = V_e + V_g = 98.1\left(\frac{1.5 \text{ sen } \theta}{2}\right) - m(9.81)(\Delta y) \qquad (1)$$

La distancia $\Delta y = (y_w)_2 - (y_w)_1$ puede relacionarse a la coordenada independiente θ, midiendo la diferencia entre las longitudes de cuerda $B'C$ y BC. Puesto que

$$B'C = \sqrt{(1.5)^2 + (1.2)^2} = 1.92$$

$$BC = \sqrt{1.5 \cos \theta)^2 + (1.2 - 1.5 \text{ sen } \theta)^2} = \sqrt{3.69 - 3.60 \text{ sen } \theta}$$

entonces

$$\Delta y = B'C - BC = 1.92 - \sqrt{3.69 - 3.60 \text{ sen } \theta}$$

Al sustituir el resultado anterior en la ecuación 1 se tiene

$$V = 98.1\left(\frac{1.5 \text{ sen } \theta}{2}\right) - m(98.1)(1.92 - \sqrt{3.69 - 3.60 \text{ sen } \theta}) \qquad (2)$$

Posición de equilibrio

$$\frac{dV}{d\theta} = 73.6 \cos \theta - \left[\frac{m(98.1)}{2}\right]\left(\frac{3.60 \cos \theta}{\sqrt{3.69 - 3.60 \text{ sen } \theta}}\right) = 0$$

$$\left.\frac{dV}{d\theta}\right|_{\theta = 20°} = 69.16 - 10.58m = 0$$

$$m = \frac{69.16}{10.58} = 6.54 \text{ kg} \qquad \textit{Resp.}$$

Estabilidad. Tomando la segunda derivada de la ecuación 2, obtenemos

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -73.6 \text{ sen } \theta - \left[\frac{m(9.81)}{2}\right]\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{(3.60 \cos \theta)^2}{(3.69 - 3.60 \text{ sen } \theta)^{3/2}}$$

$$-\frac{m(981)}{2}\left(\frac{-3.60 \text{ sen } \theta}{\sqrt{3.69 - 3.60 \text{ sen } \theta}}\right)$$

Para la posición de equilibrio $\theta = 20°$, también $m = 6.54$ kg, de modo que

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 47.6 > 0 \quad \text{(equilibrio estable en } \theta = 20°) \qquad \textit{Resp.}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 11.7

El bloque homogéneo con masa m descansa sobre la cima de la superficie del cilindro, figura 11.16*a*. Demuestre que ésta es una condición de equilibrio inestable si $h > 2R$.

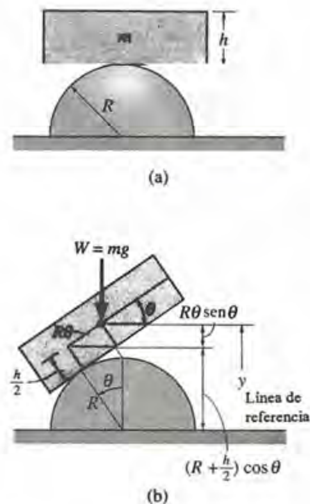


Fig. 11.16

SOLUCIÓN

Función potencial. La referencia se ubica en la base del cilindro, figura 11.16*b*. Si el bloque se desplaza en una distancia desde la posición de equilibrio, la función potencial puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} V &= V_e + V_g \\ &= 0 + mgy \end{aligned}$$

De la figura 11.16*b*,

$$y = \left(R + \frac{h}{2} \right) \cos \theta + R\theta \operatorname{sen} \theta$$

Así,

$$V = mg\left[\left(R + \frac{h}{2} \right) \cos \theta + R\theta \operatorname{sen} \theta\right]$$

Posición de equilibrio

$$\frac{dV}{d\theta} = mg\left[-\left(R + \frac{h}{2} \right) \operatorname{sen} \theta + R \operatorname{sen}\theta + R\theta \cos \theta \right] = 0$$

$$= mg\left(-\frac{h}{2} \operatorname{sen} \theta + R\theta \cos \theta \right) = 0$$

Obviamente, $\theta = 0°$ es la posición de equilibrio que satisface la ecuación.

Estabilidad. Tomando la segunda derivada de V se tiene

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\left(-\frac{h}{2} \cos \theta + R \cos \theta - R\theta \operatorname{sen} \theta \right)$$

En $\theta = 0°$,

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta = 0°} = -mg\left(\frac{h}{2} - R\right)$$

Ya que todas las constantes son positivas, el bloque está en equilibrio inestable si $h > 2R$, pues entonces $d^2V/d\theta^2 < 0$.

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS

11.26. Resuelva el problema 11.10 usando el principio de la energía potencial, e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.

11.27. Resuelva el problema 11.15 usando el principio de la energía potencial, e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.

* **11.28.** Resuelva el problema 11.12 usando el principio de la energía potencial, e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.

11.29. Resuelva el problema 11.18 usando el principio de la energía potencial, e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.

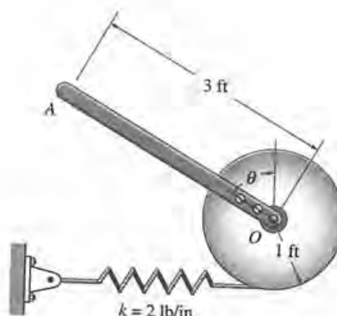
11.30. Si la energía potencial para un sistema de conservación de dos grados de libertad se expresa mediante la relación $V = (3y^2 + 2x^2)$ J, donde x, y, se dan en metros, determine las posiciones de equilibrio e investigue su estabilidad en cada caso.

11.31. Si la energía potencial para un sistema de conservación de un grado de libertad se expresa mediante la relación $V = (4x^3 - x^2 - 3x + 10)$ ft · lb donde x está dado en pies, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una.

* **11.32.** Si la energía potencial de un sistema de conservación de un grado de libertad se expresa mediante la relación $V = (10 \cos 2\theta + 24 \operatorname{sen} \theta)$ ft · lb, $0 \leq \theta \leq 180°$, determine la posición de equilibrio e investigue la estabilidad en cada posición.

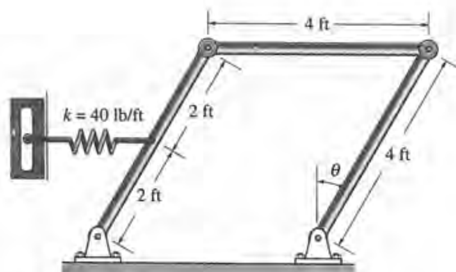
11.33. Si la energía potencial para un sistema de conservación de dos grados de libertad se expresa mediante la relación $V = (6y^2 + 2x^2)$ J, donde x y y se dan en metros, determine la posición de equilibrio e investigue la estabilidad en esta posición.

11.34. La barra uniforme OA pesa 20 lb, y cuando la barra está en posición vertical, el resorte está inextendido. Determine la posición para equilibrio. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.



Prob. 11.34

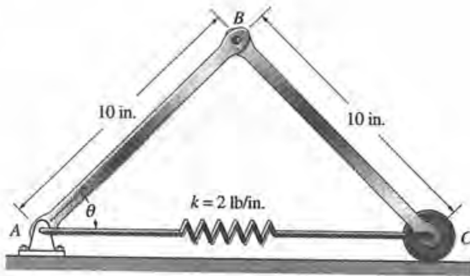
11.35. Cada uno de los tres eslabones del mecanismo tiene un peso de 10 lb. Determine el ángulo para equilibrio. El resorte está inextendido en $\theta = 0°$. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.



Prob. 11.35

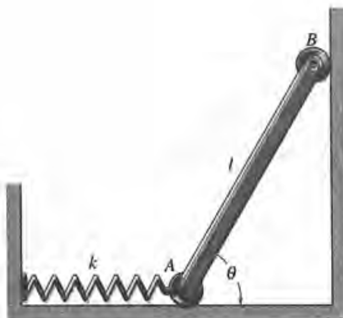
http://librosysolucionarios.net

***11.36.** Los miembros uniformes AB y BC tienen un peso de 20 lb cada uno. Determine el ángulo θ para equilibrio. El resorte inextendido mide 6 in. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.



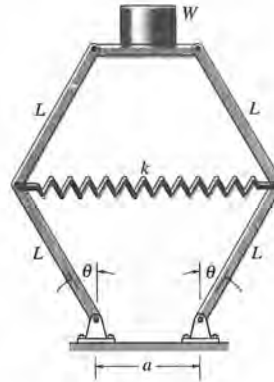
Prob. 11.36

11.37. La viga uniforme tiene un peso W. Determine el ángulo θ para equilibrio. El resorte no comprimido está en la posición $\theta = 90°$. Desprecie el peso de las ruedas.



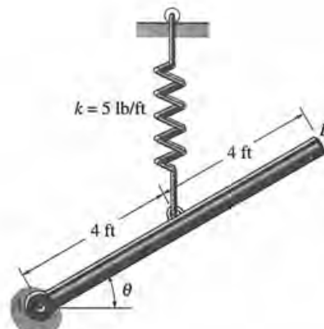
Prob. 11.37

11.38. El resorte de la balanza tiene, inextendido, una longitud a. Determine el ángulo θ para equilibrio cuando la plataforma soporta un peso W. Desprecie el peso de los miembros. ¿Qué valor de W se requeriría para mantener la balanza en equilibrio neutro cuando $\theta = 0°$?



Prob. 11.38

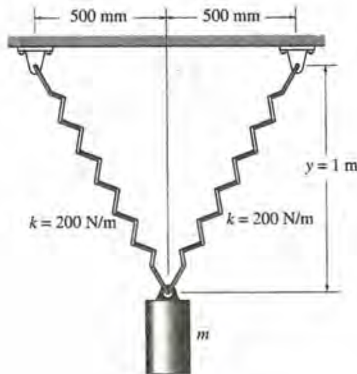
11.39. La barra uniforme AB pesa 10 lb. Si el resorte conectado está inextendido cuando $\theta = 90°$, determine el ángulo para equilibrio. Investigue la estabilidad de la barra cuando está en posición de equilibrio. Note que el resorte está siempre en posición vertical, porque el extremo de la barra está sujeto a una rueda que se mueve libremente por el plano horizontal.



Prob. 11.39

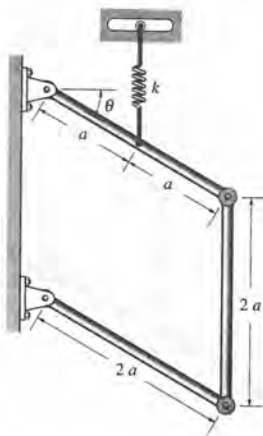
http://librosysolucionarios.net

*11.40. Cada uno de los dos resortes inextendidos tiene una longitud de 500 mm. Determine la masa requerida para mantener los resortes en la posición de equilibrio mostrada, es decir, $y = 1$ m.



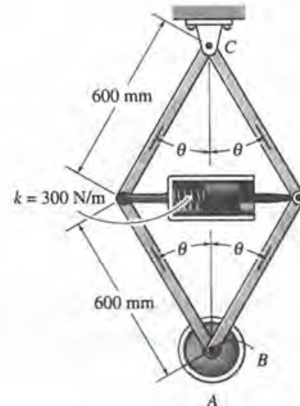
Prob. 11.40

11.41. Si cada uno de los tres eslabones del mecanismo tiene peso W, determine el ángulo para equilibrio. El resorte, que es siempre vertical, está sin deformar cuando $\theta = 0°$.



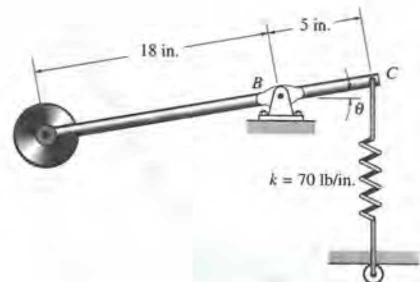
Prob. 11.41

11.42. El resorte sujeto al mecanismo tiene longitud indeformada cuando $\theta = 90°$. Determine la posición para equilibrio e investigue la estabilidad del mecanismo en esta posición. El disco está articulado a la estructura en B y tiene masa de 20 kg. Desprecie el peso de los eslabones.



Prob. 11.42

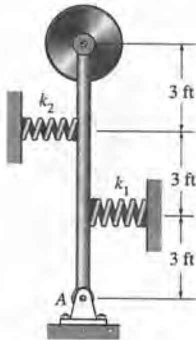
11.43. Determine el ángulo θ para equilibrio del peso de 10 lb. El resorte está sin deformar cuando $\theta = 0°$. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio. Desprecie el peso del eslabón.



Prob. 11.43

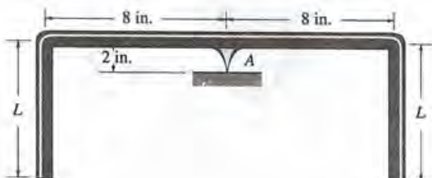
http://librosysolucionarios.net

* **11.44.** La barra soporta un peso de 500 lb en su extremo. Si los resortes están originalmente indeformados cuando la barra está en posición vertical y k_1 = 300 lb/ft, k_2 = 500 lb/ft, investigue la estabilidad de la barra cuando está en la posición de equilibrio.



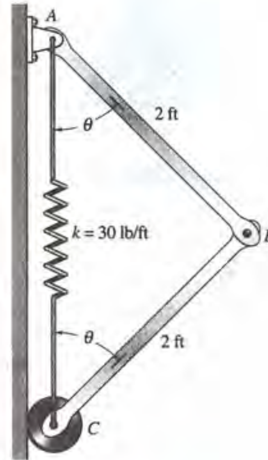
Prob. 11.44

11.45. La barra doblada pesa 5 lb/ft. En su punto medio A se ha puesto un pivote de tamaño despreciable para obtener el equilibrio mostrado. Determine la longitud L de sus segmentos verticales de modo que se mantenga en equilibrio neutro. Desprecie el grueso de la barra.



Prob. 11.45

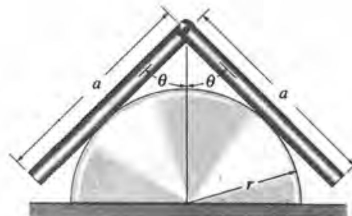
11.46. Las barras pesan 8 lb cada una. Determine el ángulo θ para equilibrio e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio. La longitud del resorte indeformado es 1 ft.



Prob. 11.46

11.47. Dos barras uniformes, cada una de peso W, están articuladas en un extremo. Si se colocan sobre una superficie cilíndrica lisa, demuestre que el ángulo θ para equilibrio debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta} = \frac{a}{2r}$$



Prob. 11.47

http://librosysolucionarios.net

*11.48. El cono homogéneo tiene una cavidad cónica interior como se muestra. Determine la profundidad d de la cavidad en términos de h, de modo que el cono se equilibre sobre el pivote y permanezca en equilibrio neutro.



Prob. 11.48

11.49. El bloque hemisférico tiene una cavidad cónica como se muestra. Determine la profundidad d de la cavidad en términos de r, de manera que el bloque esté balanceado sobre el pivote y permanezca en equilibrio neutro.



Prob. 11.49

11.50. El hemisferio está pegado al cono circular recto. Si las dos piezas tienen la misma densidad ρ, determine la altura h del cono si la configuración debe estar en equilibrio neutro en la posición mostrada.



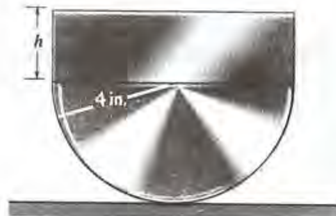
Prob. 11.50

11.51. Un bloque homogéneo descansa sobre la superficie cilíndrica como se muestra. Deduzca la relación entre el radio del cilindro, r, y la dimensión del bloque, b, para equilibrio estable. (*Sugerencia*: establezca la función de energía potencial para un ángulo *pequeño* ; esto es, aproxime sen $\theta \approx 0$, y $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$.)



Prob. 11.51

*11.52. Se han unido el bloque rectangular y la pieza semicilíndrica. Si el bloque pesa 8 lb y el medio cilindro pesa 2 lb, investigue la estabilidad cuando la pieza compuesta está en reposo en la posición de equilibrio . Considere que h = 4 in.

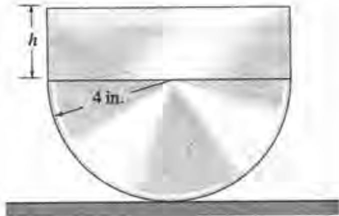


Prob. 11.52

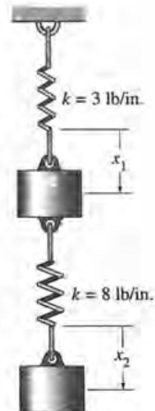
http://librosysolucionarios.net

11.53. El semicilindro de 2 lb soporta un bloque con peso específico $\gamma = 80$ lb/ft^3. Determine la altura h del bloque que producirá equilibrio neutro en la posición que se muestra. El bloque tiene 10 in de largo.

11.54. Los dos bloques pesan 10 lb cada uno y se suspenden de los resortes como se muestra. Determine el estiramiento de los resortes, x_1 y x_2, cuando los bloques están en equilibrio. Los resortes están sin deformación cuando $x_1 = x_2 = 0$.



Prob. 11.53

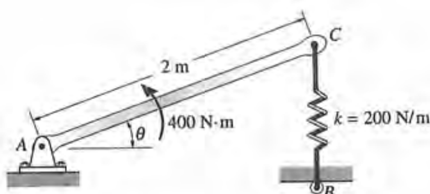


Prob. 11.54

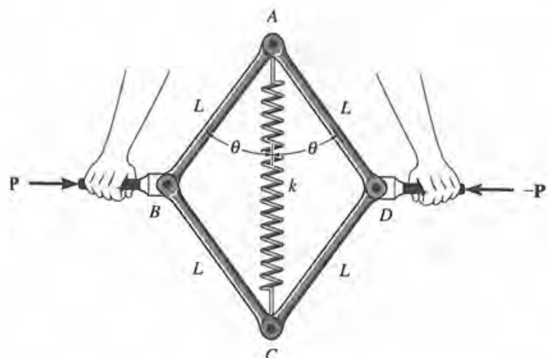
PROBLEMAS DE REPASO

11.55. Determine el ángulo θ para equilibrio de la barra uniforme de 7 kg AC. Debido al rodillo de guía en B, el resorte permanece vertical y está sin deformar cuando $\theta = 0°$. Use el principio de trabajo virtual.

***11.56.** El aparato se usa para ejercicio muscular. Consta de cuatro barras articuladas, de longitud L cada una, y un resorte de rigidez k y longitud indeformada a ($<2L$). Si se aplican las fuerzas horizontales **P** y **–P** en las agarraderas de modo que decrezca lentamente, determine el ángulo θ en que la magnitud de **P** es máxima. Use el principio de trabajo virtual.



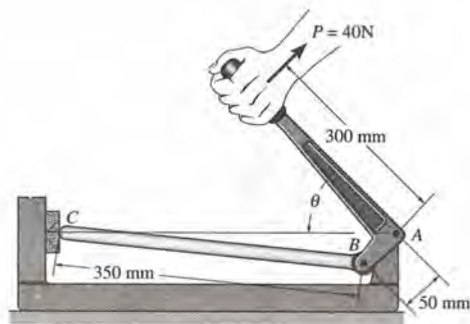
Prob. 11.55



Prob. 11.56

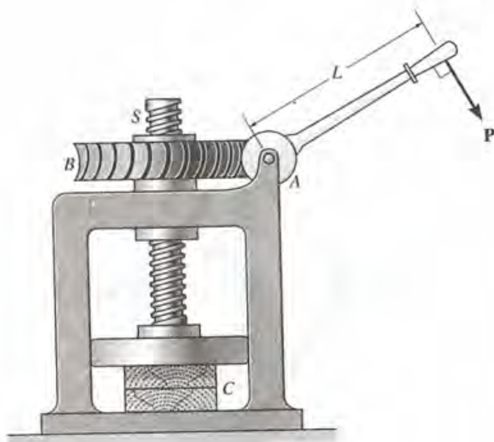
http://librosysolucionarios.net

11.57. Si una fuerza $P = 40$ N se aplica perpendicularmente a la manija de la prensa, determine la fuerza vertical de compresión desarrollada en C; $\theta = 60°$. Use el principio del trabajo virtual.



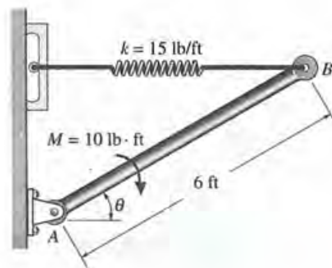
Prob. 11.57

11.58. En la prensa que se muestra, se necesitan n vueltas de la flecha en A para producir una vuelta del engrane B. Determine la compresión desarrollada en C si se aplica una carga **P** a la manija. El paso del tornillo S es p. Use el principio del trabajo virtual.



Prob. 11.58

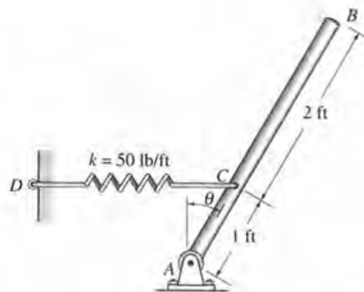
11.59. Determine la fuerza desarrollada en el resorte y requerida para mantener la barra de 10 lb en equilibrio cuando $\theta = 35°$. Use el principio del trabajo virtual.



Prob. 11.59

***11.60.** La barra uniforme AB tiene un peso de 10 lb. Si el resorte DC está sin deformar cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo θ para equilibrio usando el principio del trabajo virtual. El resorte permanece siempre horizontal debido al rodillo guía en D.

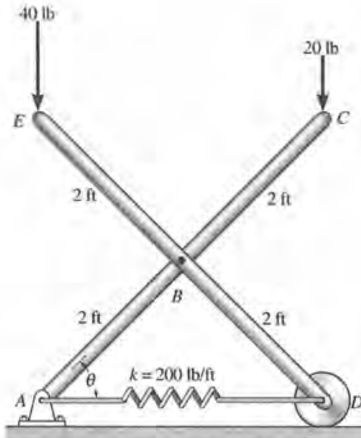
11.61. Resuelva el problema 11.60 usando el principio de la energía potencial. Investigue la estabilidad de la barra cuando está en posición de equilibrio.



Probs. 11.60/11.61

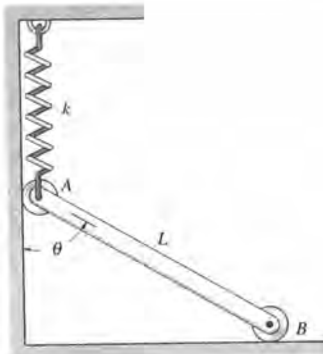
http://librosysolucionarios.net

11.62. Los miembros de 4 ft del mecanismo están articulados en sus puntos medios. Si en C y E actúan fuerzas verticales como se muestra, determine el ángulo θ para equilibrio. El resorte está sin deformar cuando $\theta = 45°$. Desprecie el peso de los miembros. Use el principio del trabajo virtual.



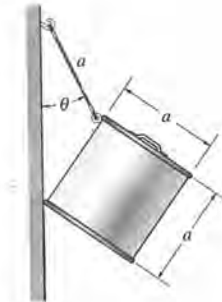
Prob. 11.62

11.63. Si la barra uniforme tiene peso W, determine el ángulo θ para equilibrio. El resorte está indeformado cuando $\theta = 0°$. Desprecie el peso de las ruedas. Use el principio de la energía potencial.



Prob. 11.63

* **11.64.** Una lata uniforme que tiene un peso W, se encuentra colgada mediante la cuerda. Suponiendo que el muro es liso, determine el ángulo θ entre la cuerda y el muro cuando se da el equilibrio. ¿El equilibrio de la lata es estable?



Prob. 11.64

http://librosysolucionarios.net





http://librosysolucionarios.net

A Expresiones matemáticas

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Funciones hiperbólicas

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

Identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\operatorname{sen}(\theta \pm \Phi) = \operatorname{sen} \theta \cos \Phi \pm \cos \theta \operatorname{sen} \Phi$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

$\cos(\theta \pm \Phi) = \cos \theta \cos \Phi \pm \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \Phi$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$

$\cos \theta = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}$, $\operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}$

$\tan \theta = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$

$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \qquad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

Desarrollos en series de potencias

$\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$

$\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots$

$\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$

http://librosysolucionarios.net

Derivadas

$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}(\text{sen}\, u) = \cos u \frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}(\text{senh}\, u) = \cosh u \frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\text{sen}\, u \frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u \frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}(\cosh u) = \text{senh}\, u \frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

Integrales

$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$

$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}}\right] + C,$ $a > 0, \quad b < 0$

$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C$

$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C, a^2 > x^2$

$\int \sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$

$\int x\sqrt{a+bx}\, dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$

$\int x^2\sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right] + C,$ $a > 0$

$\int x\sqrt{a^2-x^2}\, dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$

$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$

$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})\right] + C$

$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} + C$

$\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\, dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} \pm \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2\pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}) + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2\pm a^2} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C, c > 0$

$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\text{sen}^{-1}\left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C, c < 0$

$\int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + C$

$\int x\cos(ax)\, dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\text{sen}(ax) + C$

$\int x^2\cos(ax)\, dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\text{sen}(ax) + C$

$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

$\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$

$\int \text{senh}\, x\, dx = \cosh x + C$

$\int \cosh x\, dx = \text{senh}\, x + C$

http://librosysolucionarios.net

B Análisis numérico y computacional

En ocasiones, la aplicación de las leyes de la mecánica conducirá a un sistema de ecuaciones para el cual es difícil, y a veces imposible, obtener una solución en forma cerrada. Al encontrar esta situación, los ingenieros usarán a menudo un método numérico que la mayoría de las veces puede programarse en una microcomputadora o en una calculadora de bolsillo "programable". Aquí presentaremos, brevemente, un programa de computadora para resolver un sistema de ecuaciones lineales y tres métodos numéricos que pueden usarse para resolver una ecuación trigonométrica o trascendente, evaluar una integral definida y resolver una ecuación diferencial ordinaria. La aplicación de cada método se explicará con un ejemplo y se ofrecerá un programa de computadora escrito en Microsoft BASIC, diseñado para trabajar en casi todas las computadoras personales.* Para conocer mejor el tema de la precisión de los métodos y de los errores inherentes que se pueden desarrollar en ellos, deberá consultarse un texto de análisis numérico.

B.1 Ecuaciones algebraicas lineales

La aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático o las ecuaciones del movimiento requiere que se resuelva un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. El programa de computadora

* Otros tipos similares de programas pueden ser diseñados o comparados para calculadoras de bolsillo programables.

http://librosysolucionarios.net

```
1 PRINT"Linear system of equations": PRINT
2 DIM A(10,11)
3 INPUT"Input number of equations : ",N
4 PRINT
5 PRINT"A coefficients"
6 FOR I = 1 TO N
7 FOR J = 1 TO N
8 PRINT "A(";I;",";J;
9 INPUT")=", A(I,J)
10 NEXT J
11 NEXT I
12 PRINT
13 PRINT"B Coefficients"
14 FOR I = 1 TO N
15 PRINT"B(";I;
16 INPUT")=",A(I,N+1)
17 NEXT I
18 GOSUB 25
19 PRINT
20 PRINT"Unknowns"
21 FOR I = 1 TO N
22 PRINT "X(";I;")=";A(I,N+1)
23 NEXT I
24 END
25 REM Subroutine Guassian
26 FOR M=1 TO N
27 NP=M
28 BG=ABS(A(M,M))
29 FOR I=M TO N
30 IF ABS(A(I,M))<=BG THEN 33
31 BG=ABS (A(I, M))
32 NP=I
33 NEXT I
34 IF NP=M THEN 40
35 FOR I=M TO N+1
36 TE=A(M,I)
37 A(M,I)=A(NP,I)
38 A(NP,I)=TE
39 NEXT I
40 FOR I=M+1 TO N
41 FC=A(I,M)/A(M,M)
42 FOR J = M+1 TO N+1
43 A(I,J)=A(I,J)-FC*A(M,J)
44 NEXT J
45 NEXT I
46 NEXT M
47 A(N,N+1)=A(N,N+1)/A(N,N)
48 FOR I=N-1 TO 1 STEP -1
49 SM=0
50 FOR J=I+1 TO N
51 SM=SM+A(I,J)*A(J,N+1)
52 NEXT J
53 (A(I,N+1(A(I,N+1)-SM)/A(I,I)
54 NEXT I
55 RETURN
```

Fig. B.1

que aparece en la figura B.1 puede usarse con este fin. Se basa en el método de eliminación de Gauss y puede resolver a lo más 10 ecuaciones con 10 incógnitas. Para hacerlo, las ecuaciones se escribirán primero en el formato siguiente:

$$
\begin{aligned}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= B_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= B_2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n &= B_n
\end{aligned}
$$

Los coeficientes "A" y "B" "son llamados" al correr el programa. La información de salida presenta los valores de la incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

Ejemplo B.1

Resuelva las dos ecuaciones

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &= 4 \\
2x_1 - x_2 &= 10
\end{aligned}
$$

SOLUCIÓN

Al empezar a correr el programa, llama el número de ecuaciones (2); luego, los coeficientes A en la sucesión $A_{11} = 3$, $A_{12} = 1$, $A_{21} = 2$, $A_{22} = -1$; y, finalmente, los coeficientes $B_1 = 4$, $B_2 = 10$. La información de salida aparece como

Incógnitas

$X(1) = 2.8$ ***Resp.***

$X(2) = -4.4$ ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

B.2 Regla de Simpson

La regla de Simpson es un método numérico que sirve para determinar el área bajo una curva que se da como gráfica o por su ecuación explícita $y = f(x)$. Asimismo, puede usarse para calcular una integral definida para la función $y = f(x)$. Para hacerlo, es necesario subdividir el área en un número par de bandas o intervalos de ancho h. La curva entre tres ordenadas consecutivas se aproxima por una parábola, y el área total o integral definida se determina de la fórmula

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n] \quad \text{(B.1)}$$

El programa de computadora para esta ecuación se encuentra en la figura B.2. Para usarlo es necesario especificar, en primer lugar, la función (en el renglón 6 del programa). Los límites superior e inferior de la integral y el número de intervalos son llamados al ejecutarse el programa. El valor de la integral se da como información de salida.

```
1 PRINT"Simpson's rule": PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT" 1- Modify right-hand side of the equation given below,
4 PRINT" 2  Type RUN 6": PRINT:EDIT 6
6 DEF FNF (X)=LOG(X)
7 PRINT:INPUT" Enter Lower Limit = ",A
8 INPUT" Enter Upper Limit = ",B
9 INPUT" Enter Number (even) of Intervals = ",N%
10 H=(B-A)/N%: AR=FNF(A):X=A+H
11 FOR J%=2 TO N%
12 K=2*(2-J%+2*INT(J%/2))
13 AR=AR+k*FNF(X)
14 X=X+H: NEXT J%
15 AR=H*(AR+FNF(B)) /3
16 PRINT" Integral = ",AR
17 END
```

Fig. B.2

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo B.2

Evaluar la integral definida

$$\int_2^5 \ln x\, dx$$

SOLUCIÓN

El intervalo $x_0 = 2$ a $x_6 = 5$ se divide en seis partes iguales ($n = 6$) cada una con longitud $h = (5-2)/6 = 0.5$. Se calcula $y = f(x) = \ln x$ en cada punto de subdivisión.

n	x_n	y_n
0	2	0.693
1	2.5	0.916
2	3	1.099
3	3.5	1.253
4	4	1.386
5	4.5	1.504
6	5	1.609

Así, la ecuación B.1 viene a ser

$$\int_2^5 \ln x\, dx \simeq \frac{0.5}{3}[0.693 + 4(0.916 + 1.253 + 1.504)$$
$$+ 2(1.099 + 1.386) + 1.609]$$
$$\simeq 3.66 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Esta respuesta es equivalente a la respuesta exacta a tres cifras significativas. Obviamente, la precisión a un mayor número de cifras significativas puede ser mejorada por elección de un intervalo más corto que h (o aumentando n).

Usando el programa de computadora, específicamos primero la función ln x, renglón 6 en la figura B.2. Durante la ejecución, el programa requiere en información de entrada que se den los límites de integración 2 y 5 y el número de intervalos $n = 6$. La información de salida aparece como

Integral = 3.66082 ***Resp.***

http://librosysolucionarios.net

B.3 El método de la secante

El método de la secante se usa para encontrar las raíces reales de una ecuación trigonométrica o trascendente $f(x) = 0$. El método se llama de la secante porque la fórmula que utiliza es la de la pendiente de la recta secante o la gráfica de $y = f(x)$. Esta pendiente es $[f(x_n) - f(x_n - 1)] / (x_n - x_{n-1})$, y la fórmula del método de la secante es

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right] \tag{B.2}$$

Para su aplicación, es necesario proporcionar dos valores de intento, x_0 y x_1, y de ahí evaluar x_2, a partir de la ecuación B.2 ($n = 1$). Entonces se vuelve a aplicar la ecuación B.2 con x_1 y el valor calculado de x_2, y se obtiene x_3 ($n = 2$), etcétera, hasta el valor $x_{n+1} \approx x_n$. Se ve que esto ocurrirá si x_n se aproxima a la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, pues el término correctivo a la derecha de la ecuación B.2 tiende a cero. En particular, cuanto mayor es la pendiente, tanto menor la corrección de x_n y por tanto más rápidamente se encontrará la solución de la ecuación. Por otro lado, si la pendiente es muy pequeña en la vecindad de la raíz, el método conduce a correcciones considerablemente grandes para x_n y la convergencia a la raíz es lenta y puede incluso haber divergencia. En tales casos se utilizarán otros métodos numéricos.

En la figura B.3 aparece un programa de computadora basado en la ecuación B.2. Debemos primeramente especificar la función en el renglón 7 del programa. Al ejecutarse el programa se introducen dos primeros valores conjeturados, x_0 y x_1, para empezar la aproximación. La información de salida especifica el valor de la raíz. Si no se le puede determinar, se hará el enunciado correspondiente.

```
1 PRINT"Secant method":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT" 1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT" the press RETURN key."
5 PRINT" 2) Type RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(X)=.5*SIN(X)-2*COS (X)+1.3
8 INPUT" Enter point #1 =",X
9 INPUT"Enter point #2 =",X1
10 IF X=X1 THEN 14
11 EP=.00001:TL=2E-20
12 FP=(FNF(X1)-FNF(X)) /(X1-X)
13 IF ABS(FP)>TL THEN 15
14 PRINT"Root can not be found.":END
15 DX=FNF(X1)/FP
16 IF ABS(DX)>EP THEN 19
17 PRINT "Root = ";X1;" Function evaluated at this root = ";FNF(X1)
18 END
19 X=X1:X1-DX
20 GOTO 12
```

Fig. B.3

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo B.3

Determine la raíz de la ecuación

$$f(x) = 0.5 \text{ sen } x - 2 \cos x + 1.30 = 0$$

SOLUCIÓN

Como primeros valores de conjetura tomamos $x_0 = 45°$ y $x_1 = 30°$. Al aplicar la ecuación B.2,

$$x_2 = 30° - (-0.1821)\frac{(30° - 45°)}{(-0.1821 - 0.2393)} = 36.48°$$

Si se usa este valor en la ecuación B.2, junto con $x_1 = 30°$, tenemos

$$x_3 = 36.48° - (0.0108)\frac{36.48° - 30°}{(-0.0108 + 0.1821)} = 36.89°$$

Si se repite el proceso con este valor y $x_2 = 36.48°$, se obtiene

$$x_4 = 36.89° - (0.0005)\left[\frac{36.89° - 36.48°}{(0.0005 + 0.0108)}\right] = 36.87°$$

Así $x = 36.9°$ es apropiado a tres cifras significativas.

Si el problema se resuelve usando el programa de computadora, se especifica primero la función, renglón 7 figura B.3. Durante la ejecución, el primero y el segundo valores conjeturados deben darse en radianes. Si se eligen estos valores como 0.8 rad y 0.5 rad, el resultado aparece como

Raíz = 0.6435022.
Función evaluada en esta raíz = 1.66893E–0.6.

El resultado convertido de radianes a grados es, por tanto,

$$x = 36.9° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

http://librosysolucionarios.net

B.4 El método de Runge – Kutta

El método de Runge–Kutta se usa para resolver una ecuación diferencial ordinaria. Consiste en aplicar un conjunto de fórmulas que se usan para encontrar valores específicos de y para valores correspondientes de incremento h en x. Las fórmulas dadas en forma general son como sigue:

Ecuación de primer orden. Para integrar $\dot{x} = f(t, x)$ paso por paso, use

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad \text{(B.3)}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_{i,} x_i) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_1}{2} \right) \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_2}{2} \right) \\ k_4 &= hf(t_i + h, x_i + k_3) \end{aligned} \qquad \text{(B.4)}$$

Ecuación de segundo orden. Para integrar $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ use

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h\left[\dot{x}_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3) \right] \\ \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4) \end{aligned} \qquad \text{(B.5)}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, x_i, \dot{x}_i) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\dot{x}_i, \dot{x}_i + \frac{k_1}{2} \right) \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\dot{x}_i + \frac{h}{4}k, x_i + \frac{k_2}{2} \right) \\ k_4 &= hf\left(t_i + h, \dot{x}_i + h\dot{x}_i + \frac{h}{2}k_{2,} \dot{x}_i + k_3 \right) \end{aligned} \qquad \text{(B.6)}$$

Para aplicar estas ecuaciones, se empieza con valores iniciales $t_i = t_0$ y $x_i = x_0$. También, $\dot{x}_i = \dot{x}_0$ para la ecuación de segundo orden. Eligiendo un incremento h para t_0, se calculan las cuatro constantes k y sustituyen en la ecuación B.3 ó B.5 para calcular $x_{i+1} = x_1, \dot{x}_{i+1} = x_1$, correspondientes a $t_{i+1} = t_1 = t_0 + h$. Repitiendo este proceso y usando t_1, x_1, $\dot{x}_1$ y h, se calculan valores para x_2, $\dot{x}_2$ y $t_2 = t_1 + h$, etcétera.

http://librosysolucionarios.net

En las figuras B.4 y B.5 aparecen programas de computadora que resuelven ecuaciones diferenciales ordinarias de primero y segundo orden, respectivamente, por este método. Para usar estos programas debemos especificar la función $\dot{x} = f(t, x)$ o $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ en el renglón 7, y durante la ejecución del programa, se introducen los valores iniciales t_0, x_0, $\dot{x}_0$ (para ecuación de segundo orden), el tiempo final t_n, y la magnitud del paso h. La información de salida de los valores de t, x, y $\dot{x}$ para cada incremento de tiempo hasta alcanzar t_n.

```
1 PRINT" Runge-Kutta Method for 1-st order Differential Equation":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT" 1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT" then Press RETURN key"
5 PRINT" 2) Type RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(T,X)=5*T+X
8 CLS:PRINT" Initial Conditions":PRINT
9 INPUT"Input t = ",T
10 INPUT" x = ",X
11 INPUT" Final t = ",T1
12 INPUT"step size = ",H:PRINT
13 PRINT"        t        x "
14 IF T>=T1+H THEN 23
15 PRINT USING"######.#####";T;X
16 K1=H*FNF(T,X)
17 K2=H*FNF(T+.5*H,X+.5*K1)
18 K3=H*FNF(T+.5*H,X+.5K2)
19 K4=H*FNF(T+H,X+K3)
20 T=T+H
21 X=X+(K1+K2+K2+K3+K3+K4) /6
22 GOTO 14
23 END
```

Fig. B.4

```
1 PRINT" Runge-Kutta method for 2-nd order Differential Equation": PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT" 1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT" then Press RETURN key"
5 PRINT" 2) Type RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(T,X,XD)=
8 INPUT"Input t = ",T
9" INPUT x = ",X
10 INPUT" dx/dt = ",XD
11 INPUT"Final t = ",T1
12 INPUT"step size = ",H:PRINT
13 PRINT" t x dx/dt"
14 IF t>=T1+H THEN 24
15 PRINT USING"######.#####";T;X;XD;
16 K1=H*FNF(T,X,XD)
17 K2=H*FNF(T+.5*H,X+.5*H*XD,XD+.5*K1)
18 K3=H*FNF(t+.5*H,X+.5*H*XD+.5*K1), XD+.5*K2)
19 K4=H*FNF(T+H,X+H*XD+.5*H*K2,XD+K3)
20 T=T+H
21 X=X+XD+H*(K1+K2+K3) /6
22 XD=XD+H*XD+H*(K1+K2+K3+K3+K4) /6
23 GOTO 14
24 END
```

Fig. B.5

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo B.4

Resuelva la ecuación diferencial $\dot{x} = 5t + x$. Obtenga los resultados para dos pasos usando incrementos de tiempo de $h = 0.02\,s$. En $t_0 = 0, x_0 = 0$.

SOLUCIÓN

Esta es una ecuación de primer orden, de modo que se aplican las ecuaciones B.3 y B.4. De este modo, para $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $h = 0.02$, tenemos

$$k_1 = 0.02[0 + 0] = 0$$
$$k_2 = 0.02[5(0.1) + 0] = 0.001$$
$$k_3 = 0.02[5(0.01) + 0.0005] = 0.00101$$
$$k_4 = 0.02[5(0.02) + 0.00101] = 0.00202$$
$$x_1 = 0 + \tfrac{1}{6}[0 + 2(0.001] + 2(0.00101) + 0.00202] = 0.00101$$

Usando los valores $t_1 = 0 + 0.02 = 0.02$ y $x_1 = 0.00101$ con $h = 0.02$, el valor para x_2 se calcula ahora a partir de las ecuaciones B.3 y B.4.

$$k_1 = 0.02[5(0.02) + 0.00101] = 0.00202$$
$$k_2 = 0.02[5(0.03) + 0.00202] = 0.00304$$
$$k_3 = 0.02[5(0.03) + 0.00253] = 0.00305$$
$$k_4 = 0.02[5(0.04 + 0.00406] = 0.00408$$
$$x_2 = 0.001 + \tfrac{1}{6}[0.00202 + 2(0.00304) + 2(0.00305) + 0.00408]$$
$$x_2 = 0.00405 \qquad \textit{Resp.}$$

Para resolver este problema usando el programa de computadora en la figura B.4, la función se especifica primero en el renglón 7 y, durante la ejecución del programa, se introducen los datos $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $t_n = 0.04$, y $h = 0.02$. Los resultados aparecen como

t	x	
0.00000	0.00000	
0.02000	0.00101	
0.04000	0.00405	*Resp.*

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

Respuestas

Capítulo 1

1–1. (*a*) 3.46 m, (*b*) 45.6 s, (*c*) 5560 N, (*d*) 4520 kg

1–2. 88.5 km/h, 24.6 m/s

1–3. 1.59 Mg

1–5. (*a*) Gg/m, (*b*) kN/s, (*c*) mm · kg

1–6. (*a*) km/s, (*b*) mm, (*c*) Gs/kg, (*d*) mm · N

1–7. (*a*) 0.431 g, (*b*) 35.3 kN, (*c*) 5.32 m

1–9. (*a*) 8.53 km/kg^2, (*b*) 135 m^2 · kg^3

1–10. 26.9 μm · kg/N

1–11. (*a*) 15.9 mm/s, (*b*) 3.69 Mm · s/kg, (*c*) 1.14 km · kg

1–13. (*a*) 27.5 kN/m^3, (*b*) 0.508 mm/s, (*c*) 1.13 kN · m

1–14. 8.33 Mg/m^3

1–15. (*a*) 2.04 g, (*b*) 15.3 Mg, (*c*) 6.12 Gg

1–17. (*a*) 3.65 Gg, (*b*) 35.8 MN, (*c*) 5.89 MN, (*d*) 3.65 Gg

1–18. 2.71 Mg/m^3

1–19. 1040 lb

Capítulo 2

2–1. 320 lb, 176°

2–2. 474 lb, 75.4°

2–3. 464 N, 78.6°

2–5. 218 N, 66.6°

2–6. $(F_1)_v = 129$ N, $(F_1)_u = 183$ N

2–7. $(F_2)_v = 77.6$ N, $(F_2)_u = 150$ N

2–9. 458 lb, 10.9°

2–10. 43.9°, 561 lb

2–11. $F_A = 1.41$ kN, $F_R = 2.73$ kN

2–13. $F_{AC} = 131$ lb, $F_R = 199$ lb

2–14. 53.5°, 621 lb

2–15. 323 lb, 38.3°

2–17. (*a*) $F_x = 490$ N, $F_v = 669$ N, (*b*) $F_u = 179$ N, $F_y = 490$ N

2–18. 485 N, 24.6°

2–19. $F_{AC} = 366$ N, $F_{BA} = 448$ N

2–21. $F_R = 2F \operatorname{sen} \theta$

2–22. 62.7°

2–23. 240 N, 61.3°

2–25. $F_C = 4.51$ kN, $F_B = 5.96$ kN

2–26. 70° ∡, $F_B = 3.42$ kN, $F_B = 9.40$ kN

2–27. $\mathbf{F}_1 = \{-640\mathbf{i} - 480\mathbf{j}\}$ N, $\mathbf{F}_2 = \{563\mathbf{i} - 325\mathbf{j}\}$ N

2–29. $\mathbf{F}_1 = \{20\mathbf{i} + 34.6\mathbf{j}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{47.0\mathbf{i} - 17.1\mathbf{j}\}$ lb

2–30. 69.2 lb, 14.7° ∡θ

2–31. $\mathbf{F}_1 = \{9.64\mathbf{i} + 11.5\mathbf{j}\}$ kN, $\mathbf{F}_2 = \{-24\mathbf{i} + 10\mathbf{j}\}$ kN, $\mathbf{F}_3 = \{31.2\mathbf{i} - 18\mathbf{j}\}$ kN

2–33. $F_{1x} = 27.4$ lb, $F_{1y} = 75.2$ lb, $F_{2x} = 39.0$ lb, $F_{2y} = 22.5$ lb

2–34. 464 N, 78.6°

2–35. 222 N, 4.26°

2–37. $F_A = 1.41$ kN, $F_R = 2.73$ kN↓

2–38. $F_C = 4.51$ kN, $F_B = 5.96$ kN

2–39. 40 cosec θ lb

2–41. 84.3 lb, 37.2°

2–42. 407 lb, 207°

2–43. 103°, 88.1 lb

2–45. 63.7°, $F_3 = 1.20\ F_1$

2–46. 68.6°, 960 N

2–47. 839 N, 14.8°

2–49. $F_B = 311$ N, $F_A = 439$ N

2–50. 60°, $F_A = 520$ N, $F_B = 300$ N

2–51. 11.3 kN

2–53. $\mathbf{F}_1 = \{30.6\mathbf{i} - 25.7\mathbf{j}\}$ N, $\mathbf{F}_2 = \{-23.0\mathbf{i} + 19.3\mathbf{j} + 52.0\mathbf{k}\}$ N, $\mathbf{F}_R = \{7.66\mathbf{i} - 6.43\mathbf{j} + 52.0\mathbf{k}\}$ N, $F_R = 52.9$ N, $\alpha = 81.7°$, $\beta = 97.0°$, $\gamma = 10.9°$

2–54. $\mathbf{F}_1 = \{-25.0\mathbf{i} + 43.3\mathbf{j}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{-90.0\mathbf{j} + 120\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_3 = \{74.5\mathbf{j} - 43.0\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_R = \{-25.0\mathbf{i} + 27.8\mathbf{j} + 77.0\mathbf{k}\}$ lb, $F_R = 85.6$ lb, $\alpha = 107°$, $\beta = 71.1°$, $\gamma = 25.9°$

http://librosysolucionarios.net

2–55. $\mathbf{F} = \{289\mathbf{i} + 225\mathbf{j} - 261\mathbf{k}\}$ lb

2–57. 581 N, $\alpha = 72.5°$, $\beta = 83.4°$, $\gamma = 18.8°$

2–58. 166 N, $\alpha = 97.5°$, $\beta = 63.7°$, $\gamma = 27.5°$

2–59. $\alpha_1 = 36.9°$, $\beta_2 = 90°$, $\gamma_3 = 53.1°$, $\alpha_R = 69.3°$, $\beta_R = 52.2°$, $\gamma_R = 45°$

2–61. $\alpha = 52.2°$, $\beta = 52.2°$, $\gamma = 120°$

2–62. $\mathbf{F} = \{13.7\mathbf{i} + 37.6\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\}$ N

2–63. 50 N, $\alpha = 74.1°$, $\beta = 41.3°$, $\gamma = 53.1°$

2–65. $\mathbf{F} = \{200\mathbf{i} + 283\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\}$lb

2–66. $F_x = 6$ kN, $F_y = 6$ kN, $F_z = 8.49$ kN

2–67. $F = 2.02$ kN, $F_y = 0.523$ kN

2–69. 180 N, $\alpha_2 = 147°$, $\beta_2 = 119°$, $\gamma_2 = 75.0°$

2–70. $\alpha = 73.4°$, $\beta = 64.6°$, $\gamma = 31.0°$

2–71. $\mathbf{r}_{AB} = \{2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\}$ m, $r_{AB} = 8.83$ m, $\alpha = 76.9°$, $\beta = 142°$, $\gamma = 124°$

2–73. 7.55 m, $\alpha = 105°$, $\beta = 22.0°$, $\gamma = 74.6°$

2–74. $\mathbf{r} = \{4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ m, $r = 5.39$ m, $\alpha = 42.0°$, $\beta = 112°$, $\gamma = 56.1°$

2–75. $\mathbf{r} = \{9.48\mathbf{i} - 1.24\mathbf{j} + 2.30\mathbf{k}\}$ m, $r = 9.83$ m, $\alpha = 15.4°$, $\beta = 97.2°$, $\gamma = 76.5°$

2–77. 6.40 ft

2–78. 19.0 in

2–79. $y = 16.7$ ft, $z = 50.2$ ft

2–81. 284 ft

2–82. $r_{AD} = 1.5$ m, $r_{BD} = 1.5$ m, $r_{CD} = 1.73$ m

2–83. $\mathbf{F} = \{-2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}$ kN, $\alpha = 132°$, $\beta = 70.5°$, $\gamma = 48.2°$

2–85. $\mathbf{F} = \{366\mathbf{i} + 294\mathbf{j} - 172\mathbf{k}\}$ lb, $\alpha = 43.0°$, $\beta = 53.9°$, $\gamma = 110°$

2–87. $\mathbf{F} = \{29.7\mathbf{i} + 35.4\mathbf{j} - 80.0\mathbf{k}\}$lb, $\alpha = 71.3°$, $\beta = 67.5°$, $\gamma = 150°$

2–89. $\mathbf{F}_1 = \{75.5\mathbf{i} - 43.6\mathbf{j} - 122\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{26.8\mathbf{i} + 33.5\mathbf{j} - 90.4\mathbf{k}\}$ lb, $F_R = 236$ lb, $\alpha = 64.3°$, $\beta = 92.5°$, $\gamma = 154°$

2–90. 10.0 ft, $\mathbf{F} = \{-19.1\mathbf{i} - 14.9\mathbf{j} + 43.7\mathbf{k}\}$ lb, $\alpha = 112°$, $\beta = 107°$, $\gamma = 29.0°$

2–91. $\mathbf{F}_1 = \{-3.79\mathbf{i} + 11.4\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{-6.65\mathbf{i} - 11.8\mathbf{j} + 11.8\mathbf{k}\}$ lb, $F_R = 28.1$ lb, $\alpha = 112°$, $\beta = 115°$, $\gamma = 34.2°$

2–93. $\mathbf{F}_C = \{-324\mathbf{i} - 130\mathbf{j} + 195\mathbf{k}\}$ N, $\mathbf{F}_B = \{-324\mathbf{i} + 130\mathbf{j} + 195\mathbf{k}\}$ N, $\mathbf{F}_E = \{-194\mathbf{i} + 291\mathbf{k}\}$ N

2–94. $\mathbf{F}_A = \{-1.46\mathbf{i} + 5.82\mathbf{k}\}$ kN, $\mathbf{F}_C = \{0.857\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 4.85\mathbf{k}\}$ kN, $\mathbf{F}_B = \{0.970\mathbf{i} - 1.68\mathbf{j} + 7.76\mathbf{k}\}$ kN, $F_R = 18.5$ kN, $\alpha = 88.8°$, $\beta = 92.6°$, $\gamma = 2.81°$

2–95. $x = 1.96$ m, $y = 2.34$ m, 704 N

2–98. 85.9°

2–99. $\mathbf{r}_2 = \{0.143\mathbf{i} + 0.214\mathbf{j} - 0.0714\mathbf{k}\}$ m

2–101. $\mathbf{r}_2 = \{2.58\mathbf{i} - 1.61\mathbf{j} - 0.645\mathbf{k}\}$ ft

2–102. 2.67 m

2–103. 3.87 m

2–105. $F_{AB} = 49.0$ N, $F_{per} = 63.2$ N

2–106. $F_1 = 18.3$ lb, $F_{per} = 35.6$ lb

2–107. $F_{AC} = 26.5$ lb, $F_{BA} = 66.4$ lb

2–109. 143°

2–110. 34.2°

2–111. $F_x = 47.8$ lb, $F_{AC} = 45.5$ lb

2–113. $(F_1)_{AO} = 18.5$ N, $(F_2)_{AO} = 21.3$ N

2–114. 5.43 lb

2–115. 100°

2–117. $\mathbf{F}_A = \{285\mathbf{j} - 93.0\mathbf{k}\}$ N, $\mathbf{F}_C = \{159\mathbf{i} + 183\mathbf{j} - 59.7\mathbf{k}\}$ N

2–118. $\mathbf{F}_1 = \{20\mathbf{i} + 34.6\mathbf{j}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{-42.4\mathbf{i} + 42.4\mathbf{j}\}$ lb, $F_R = 80.3$ lb, $\theta = 106°$

2–119. 80.3 lb, 106°

2–121. $x = 7.65$ ft, $y = 4.24$ ft, $z = 3.76$ ft

2–122. $x = 8.67$ ft, $y = 1.89$ ft

2–123. 0.667 kN

2–125. 50.3°, 369 N

2–126. 90°

Capítulo 3

3–1. $F_1 = 259$ N, $F_2 = 366$ N

3–2. 21.8°, 3.23 kN

3–3. 73.9°, 180 lb

3–5. $F_1 = 3.59$ kN, $F_2 = 0.536$ kN

3–6. $F_D = 4.90$ kN, $F_B = 3.46$ kN

3–7. 968 lb

3–9. $F_{AD} = 46.7$ lb, $F_{AC} = 30.5$ lb

3–10. $F_{AB} = F_{AC} = F = 1.32$ klb

3–11. $F_{AC} = 267$ N, $F_{AB} = 98.6$ N

3–13. 106 lb

3–14. 240 lb

3–15. 43.0°

3–17. $x_{AB} = 0.467$ m, $x_{AC} = 0.793$ m, $x_{AD} = 0.490$ m

3–18. 3.40 ft

3–19. $F_{AF} = 589$ N, $F_{AC} = 736$ N, $F_{AB} = 441$ N, $F_{CE} = 589$ N, $F_{CD} = 441$ N

3–21. $T_B = 0.0104$ lb, $W = 0.012$ lb, $\theta = 19.1°$, $T_A = 0.0159$ lb

3–23. $T = 0.5W$ cosec θ

3–25. 53.1 lb

3–26. 9.30 lb

3–27. $F_{BD} = 171$ N, $F_{BC} = 145$ N

3–29. 2.45 m

3–30. $\theta = 90°$, $(F_{AC})_{máx} = 160$ lb, $\theta = 120°$, $(F_{AB})_{máx} = 160$ lb

3–31. $F_1 = 0$, $F_3 = 0$, $F_2 = 200$ lb

3–33. $F_1 = 2.83$ kN, $F_2 = 1.10$ kN, $F_3 = 3.46$ kN

3–34. $F_1 = 400$ lb, $F_2 = 280$ lb, $F_3 = 357$ lb

3–35. $F_1 = 5.10$ kN, $F_2 = 11.8$ kN, $F_3 = 3.92$ kN

3–37. $F_1 = 0$, $F_2 = 311$ lb, $F_3 = 238$ lb

3–38. $F_{AD} = 118$ N, $F_{AB} = 78.5$ N, $F_{AC} = 39.2$ N

3–39. $F_{CD} = 625$ lb, $F_{CB} = F_{CA} = 198$ lb

3–41. $F_{AD} = F_{AC} = 104$ N, $F_{AB} = 220$ N

3–42. $F_{AB} = F_{AC} = 16.6$ kN, $F_{AD} = 55.2$ kN

http://librosysolucionarios.net

3–43. $F_{AD} = 510$ N, $F_{AC} = 130$ N, $F = 1.60$ kN
3–45. $F_{AB} = 0.980$ kN, $F_{AC} = 0.463$ kN, $F_{AD} = 1.55$ kN
3–46. $F_{AB} = 1.21$ kN, $F_{AC} = 0.278$ kN, $F_{AD} = 1.64$ kN
3–47. $T = 1.79(10^{-3})$ lb
3–49. $F_{AB} = 359$ lb, $F_{AC} = F_{AD} = 254$ lb
3–50. $F_{AB} = 469$ lb, $F_{AC} = F_{AD} = 331$ lb
3–51. 88.8 lb
3–53. $F_{DA} = 21.5$ lb, $F_{DB} = 14.0$ lb, $F_{DC} = 17.6$ lb
3–54. 40.2°
3–55. $F_2 = 9.60$ kN, $F_1 = 1.83$ kN
3–57. $F = 0.850(10^{-3})$ N

Capítulo 4

4–5. 3.15 kN · m ↺
4–6. 858 lb · in ↻
4–7. 1.17 klb · in ↻
4–9. 4.47 kN · m ↺
4–10. 14.5 lb · ft ↻
4–11. 39.2°
4–13. 11.2 klb · ft ↻
4–14. 6.16 klb · ft ↺
4–15. 66.1 N
4–17. $M_A = 80 \cos\theta + 320 \operatorname{sen}\theta$
4–18. 1.90 N · m ↺
4–19. $M_P = \{538 \cos\theta + 75 \operatorname{sen}\theta\}$ lb · ft
4–21. $\mathbf{M}_O = \{67.8\mathbf{i} - 17.0\mathbf{j} + 84.8\mathbf{k}\}$ lb · ft
4–22. $\mathbf{M}_P = \{153\mathbf{i} - 29.7\mathbf{j} + 174\mathbf{k}\}$ lb · ft
4–23. $(\mathbf{M}_R)_O = \{-160\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 510\mathbf{k}\}$ N · m
4–25. $\mathbf{M}_A = \{360\mathbf{i} + 240\mathbf{j}\}$ N · m
4–26. $\mathbf{M}_1 = \{-52\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 36\mathbf{k}\}$ N · m,
$\mathbf{M}_2 = \{-34\mathbf{i} + 34\mathbf{j} - 68\mathbf{k}\}$ N · m, 147 N · m, $\alpha = 126°$,
$\beta = 66.7°$, $\gamma = 135°$
4–27. $\mathbf{M}_1 = \{-36\mathbf{i} - 36\mathbf{k}\}$ N · m,
$\mathbf{M}_2 = \{-42\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 68\mathbf{k}\}$ N · m, 131 N · m, $\alpha = 127°$,
$\beta = 96.1°$, $\gamma = 143°$
4–29. $\mathbf{M}_A = \{-16.0\mathbf{i} - 32.1\mathbf{k}\}$ N · m
4–30. $(\mathbf{M}_R)_A = \{36\mathbf{i} - 78\mathbf{j}\}$ lb · in ,
$(\mathbf{M}_R)_B = \{36\mathbf{i} + 192\mathbf{j} + 90\mathbf{k}\}$lb · in ,
$(\mathbf{M}_R)_C = \{-396\mathbf{i} + 192\mathbf{j} - 222\mathbf{k}\}$ lb · in
4–31. 165 lb · ft, $\alpha = 91.3°$, $\beta = 62.5°$, $\gamma = 152°$
4–33. $\mathbf{M}_C = \{-226\mathbf{i} - 226\mathbf{j} - 226\mathbf{k}\}$ lb · ft
4–34. $\mathbf{M}_O = \{-1.77\mathbf{i} - 1.10\mathbf{j}\}$ kN · m
4–35. $\mathbf{M}_A = \{-5.39\mathbf{i} + 13.1\mathbf{j} + 11.4\mathbf{k}\}$ N · m
4–37. $c = 2$ in , $b = 5$ in
4–38. $z = 3$ m, $x = 2$ m
4–39. $y = 2$ m, $x = 3$ m, $d = 3.63$ m
4–41. $z = 3$ m, $y = 1$ m, $d = 1.15$ m
4–42. $\mathbf{M}_{Oa} = \{218\mathbf{j} + 163\mathbf{k}\}$ N · m
4–43. $(\mathbf{M}_R)_{aa} = \{-41.3\mathbf{i} - 44.7\mathbf{j} + 13.8\mathbf{k}\}$ kN · m
4–45. $(\mathbf{M}_R)_{Oa} = \{26.1\mathbf{i} - 15.1\mathbf{j}\}$ lb · ft
4–46. $M_x = -72$ N · m, $M_y = 12$ N · m, $M_z = -52$ N · m
4–47. $\mathbf{M}_{OA} = \{-17.3\mathbf{i} - 13.0\mathbf{j}\}$ N · m
4–49. 62 lb · in
4–50. 44.4 lb · ft
4–51. 3.75 N · m
4–53. $\mathbf{M}_y = \{0.828\mathbf{j}\}$ N · m
4–54. $\mathbf{M}_y = \{87.4\mathbf{j}\}$ N · m
4–55. $\mathbf{M}_z = \{-15.9\mathbf{k}\}$ N · m
4–57. 19.8 lb
4–58. 14.8 N · m
4–59. 20.2 N
4–61. 21.9 kN · m ↺
4–62. 3.12 klb · ft ↺
4–63. 67.5 lb
4–65. 27.7 lb
4–66. 28.9 lb · ft
4–67. 0.909 klb
4–69. 139 lb
4–70. 830 N
4–71. 5.54 ft
4–73. $M_R = 39.6$ lb · ft ↰
4–74. 9.69 kN · m ↻
4–75. $\mathbf{M}_C = \{56\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 57\mathbf{k}\}$ kN · m
4–77. 78.1 N · m, $\alpha = 48.3°$, $\beta = 50.2°$, $\gamma = 67.4°$
4–78. $\mathbf{M}_C = \{-50\mathbf{i} + 60\mathbf{j}\}$ lb · ft, $M_C = 78.1$ lb · ft
4–79. $\mathbf{M}_R = \{-12.1\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 17.3\mathbf{k}\}$ N · m
4–81. $F = 3$ lb, $P = 4$ lb
4–82. 22.6° $\measuredangle\theta$, 204 lb · ft ↻
4–83. 30° $\triangleleft\theta$, 2.46 kN · m ↻
4–85. 1.19 kN, 85.9° $\theta\triangleright$, 21.6 kN · m ↺
4–86. 17.3 N, 60° $\triangleleft\theta$, 42.0 N · m ↺
4–87. 17.3 N, 60° $\triangleleft\theta$, 14.0 N · m ↱
4–89. 52.1 lb, 20.9° $\triangleleft\theta$, 60.9 ft
4–90. 52.1 lb, 20.9° $\triangleleft\theta$, 23.3 ft
4–91. 73.8 lb, 59.0° $\triangleleft\theta$, 5.66 ft
4–93. 60 N
4–94. 29.9 lb, 78.4° $\measuredangle\theta$, 214 lb · in ↺
4–95. 26.4 lb, 85.7° $\measuredangle\theta$, 205 lb · in ↺
4–97. 342 N, 43.0° $\theta\triangleright$, 99.5 N · m ↻
4–98. 464 lb, 45.1° $\triangleleft\theta$, 1595 lb · ft ↻
4–99. 464 lb, 45.1° $\triangleleft\theta$, 832 lb · ft ↻
4–101. 110 lb, 67.5° $\theta\triangleright$, 5.95 ft
4–102. 110 lb, 67.5° $\theta\triangleright$, 705 lb · ft ↰
4–103. 26.6°, 8.94 kN, 4.5 m
4–105. 219 lb, 79.5° $\theta\triangleright$, 1.19 klb · ft ↺
4–106. 219 lb, 79.5° $\theta\triangleright$, 1.39 klb · ft ↻
4–107. 98.5 lb, 24.0° $\measuredangle\theta$, 390 lb · ft ↻
4–109. 98.5 lb, 24.0° $\measuredangle\theta$, 6.0 ft
4–110. 4.5 kN ↓, 2.22 m
4–111. $\mathbf{F} = \{50\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 80\mathbf{k}\}$ N,
$\mathbf{M}_{RO} = \{410\mathbf{i} + 230\mathbf{j} - 170\mathbf{k}\}$ N · m
4–113. $\mathbf{F} = \{8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\}$ kN,
$\mathbf{M}_{RO} = \{-10\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 56\mathbf{k}\}$ kN · m

http://librosysolucionarios.net

4–114. $\mathbf{F} = \{8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\}$ kN, $\mathbf{M}_{RP} = \{-46\mathbf{i} + 66\mathbf{j} - 56\mathbf{k}\}$ kN · m

4–115. $\mathbf{F}_R = \{-80\mathbf{i} - 80\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{M}_{RP} = \{-240\mathbf{i} + 720\mathbf{j} + 960\mathbf{k}\}$ lb · ft

4–117. $F_C = 600$ N, $F_D = 500$ N

4–118. 140 kN ↓, $y = 7.14$ m, $x = 5.71$ m

4–119. 40 lb ↑, 0.5 ft

4–121. $F_R = 495$ N, $M_R = 1.54$ kN · m, $z = 1.16$ m, $y = 2.06$ m

4–122. $F_R = 108$ lb, $M_R = 624$ lb · ft, $x = 8.69$ ft, $y = 0.414$ ft

4–123. $\mathbf{F}_R = \{141\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 159\mathbf{k}\}$ N, $\mathbf{M}_{RO} = \{122\mathbf{i} - 183\mathbf{k}\}$ N · m

4–125. 1.95 klb · ft ↲

4–126. 27 kN, 2.11 m

4–127. 13.25 lb, 0.340 a la derecha

4–129. 13.5 klb, 6.0 ft

4–130. 3.25 klb, 67.2° ⦨, 3.86 ft

4–131. 3.90 klb ↑, 11.3 ft

4–133. 18.0 klb ↓, 11.7 ft

4–134. 162 lb ↓, 6.80 ft

4–135. $b = 9.0$ ft, $a = 7.50$ ft

4–137. 30 kN ↓, 4.10 m

4–138. 667 lb ↓, 1.67 klb · ft

4–139. 107 kN ←, 1.60 m

4–141. 1.87 klb, 3.66 ft

4–142. 195 lb, 60.6° ⦨, 3.21 ft

4–143. 46.9 kN, 7.11 m

4–145. $(M_1)_B = 3.96$ klb · ft ↲, $(M_2)_B = 4.80$ klb · ft ↲, $(M_3)_B = 1.30$ klb · ft ↲, $M_{RB} = 10.1$ klb · ft ↲

4–146. $\mathbf{M}_{BA} = \{-3.39\mathbf{i} + 2.54\mathbf{j} - 2.54\mathbf{k}\}$ N · m

4–147. $\mathbf{M}_{OC} = \{-4.61\mathbf{i} - 3.46\mathbf{j}\}$N · m

4–149. $\mathbf{M}_O = \{-128\mathbf{i} + 128\mathbf{j} - 257\mathbf{k}\}$ N · m

4–150. $\mathbf{M}_B = \{-37.6\mathbf{i} + 90.7\mathbf{j} - 155\mathbf{k}\}$ N · m

4–151. 10.75 klb ↓, 99.5 klb · ft ↲

4–153. $\mathbf{F}_R = \{-40\mathbf{j} - 40\mathbf{k}\}$ N, $(\mathbf{M}_R)_A = \{-12\mathbf{j} + 12\mathbf{k}\}$ N · m

4–154. $\mathbf{F}_R = \{-28.3\mathbf{j} - 68.3\mathbf{k}\}$N, $(\mathbf{M}_R)_A = \{-20.5\mathbf{j} + 8.49\mathbf{k}\}$ N · m

Capítulo 5

5–11. $N_B = 592$ N, $F_A = 92.3$ N

5–13. $T = 830$ N, $A_x = 498$ N, $A_y = 709$ N

5–14. $F_B = 100$ lb, $A_x = 100$ lb, $A_y = 20$ lb

5–15. $N_B = 2.14$ klb, $A_x = 1.29$ klb, $A_y = 1.49$ klb

5–17. $N_A = 23.7$ lb, $N_B = 12.2$ lb, $N_C = 5.77$ lb

5–18. $A_x = 0$, $A_y = 3.83$ kN, $B_y = 11.2$ kN

5–19. $A_x = 0$, $A_y = 200$ N, $B_y = 400$ N

5–21. $A_x = 42$ N, $A_y = 10.5$ N, $B_y = 10.5$ N

5–22. $A_x = 0$, $A_y = 6.75$ kN, $M_A = 46.25$ kN · m

5–23. $F_A = 105$ lb, $B_x = 97.4$ lb, $B_y = 269$ lb

5–25. 1.69 kN, 1.69 kN

5–26. $T_{BC} = 16.4$ kN, $A_x = 13.1$ kN, $A_y = 14.6$ kN

5–27. $F_{BD} = 41.6$ kN, $A_x = 41.6$ kN, $A_y = 8$ kN

5–29. $N_B = 110$ klb, $A_x = 95.3$ klb, $A_y = 5.0$ klb

5–30. $A_x = 4.00$ kN, $A_y = 8.71$ kN, $N_B = 78.2$ kN

5–31. $N_A = N_B = 49.1$ N, $N_C = N_D = 42.5$ N

5–33. (*a*) $N_E = 1.16$ klb, $N_D = 2.19$ klb, (*b*) 4.74 klb

5–34. $N_A = 41.6$ klb, $N_B = 105$ klb

5–35. $T_{BD} = 76.8$ kN, $A_x = 62.9$ kN, $A_y = 65.6$ kN

5–37. $A_x = 33.3$ lb, $B_x = 33.3$ lb, $B_y = 100$ lb

5–38. $F_B = 533$ N, $N_A = 667$ N

5–39. (*a*) 1.64 kN, (*b*) 213 N

5–41. $T = 8.83$ kN, $A_x = 4.41$ kN, $A_y = 9.61$ kN

5–42. $F_{BC} = 3.76$ klb, $A_x = 3.26$ klb, $A_y = 3.12$ klb

5–43. $T_{BC} = 1.83$ kN, $A_x = 1.10$ kN, $A_y = 314$ N

5–46. $A_x = 4.61$ lb, $A_y = B_y = 43.3$ lb

5–47. $F_A = 432$ lb, $F_B = 0$, $F_C = 432$ lb

5–49. $\theta = \cos^{-1}[(L + \sqrt{L^2 + 128r^2})/16r]$

5–50. $w_1 = 3.22$ kN/m, $w_2 = 1.63$ kN/m

5–51. $P = F_A = 0.01$ N

5–53. $T_{BC} = 342$ lb, $F_A = 223$ lb

5–54. 12.8°

5–55. 6.70 lb

5–57. $d = 3a/4$

5–58. $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2}(\cot \psi - \cot \phi)$

5–59. $F_A = (W/2)\sqrt{(4l^2 - 3d^2)/(l^2 - d^2)}$

5–61. 11.2 lb/ft

5–62. 20.4°

5–63. 24.1°

5–65. $F_A = A_z = 125$ lb, $M_A = 206$ lb · ft

5–66. $A_x = -8$ lb, $A_y = 4$ lb, $A_z = 0$, $(M_A)_y = 44$ lb · ft, $(M_A)_z = -32$ lb · ft

5–67. $N_C = 375$ lb, $N_A = N_B = 187.5$ lb

5–69. $F_{DE} = 21.3$ klb, $F_{BC} = F_{AC} = 8.89$ klb

5–70. $F_C = 147$ N, $F_B = 81.8$ N, $F_A = 164$ N

5–71. $A_x = 0$, $A_y = 5$ kN, $A_z = 16.7$ kN, $F_B = 16.7$ kN

5–73. $A_y = 0$, $F = 34.6$ N, $B_z = 129$ N, $A_z = -66.0$ N, $B_x = 95.0$ N, $A_x = 75.0$ N

5–74. $A_x = 25.5$ lb, $A_y = 18.75$ lb, $B_x = 22.6$ lb, $B_y = 18.75$ lb, $B_z = 50$ lb, $C_x = 32.1$ lb

5–75. $P = 75$ lb, $B_z = 75$ lb, $B_x = 112$ lb, $A_y = 0$, $A_x = 37.5$ lb, $A_z = 75$ lb

5–77. $A_y = 168$ lb, $A_z = 368$ lb, $B_x = -358$ lb, $B_y = -168$ lb, $C_x = 358$ lb, $C_z = -168$ lb

5–78. $A_x = -56.6$ lb, $A_z = 28.3$ lb, $B_y = -28.3$ lb, $B_z = 72.4$ lb, $C_y = 28.3$ lb, $C_z = 15.9$ lb

5–79. $T_{CD} = 115$ N, $A_y = 80$ N, $A_z = 0$, $B_x = -30$ N, $B_y = -40$ N, $B_z = 0$

5–81. $A_x = -1933$ N, $A_y = -867$ N, $B_y = 467$ N, $B_z = 667$ N, $C_x = 2433$ N, $C_z = -867$ N

5–82. $F_{BD} = F_{CD} = 70.2$ lb, $A_x = 37.5$ lb, $A_y = 0$, $A_z = 37.5$ lb

5–83. $F_{BC} = 175$ lb, $A_x = 130$ lb, $A_y = -10$ lb, $M_{Ax} = -300$ lb · ft, $M_{Ay} = 0$, $M_{Az} = -720$ lb · ft

5–85. $F_{BC} = 47.5$ lb, $A_x = -12.5$ lb, $A_y = 5.0$ lb, $A_z = 0$, $M_{Ay} = -60$ lb · ft, $M_{Az} = -37.5$ lb · ft

http://librosysolucionarios.net

5–86. $F_{BC} = 209$ lb, $A_y = 80$ lb, $A_z = -130$ lb, $M_{Ax} = -780$ lb · ft, $M_{Ay} = -480$ lb · ft, $M_{Az} = -360$ lb · ft

5–87. $T_{DE} = 721$ lb, $T_{BC} = 2.16$ klb, $A_x = -309$ lb, $A_y = 1.55$ klb, $A_z = -1.21$ klb

5–89. 1.02°

5–90. 2.50 kN/m

5–91. $P = 100$ lb, $B_z = 40$ lb, $B_x = -35.7$ lb, $A_x = 136$ lb, $B_y = 0$, $A_z = 40$ lb

5–93. $w_1 = 62.7$ lb/ft, $w_2 = 91.1$ lb/ft

5–94. $A_x = 6.0$ klb, $A_y = 5.92$ klb, $B_y = 3.58$ klb

5–95. $A_y = 7.36$ klb, $B_x = 0.5$ klb, $B_y = 16.6$ klb

5–97. $T = 1.01$ kN, $F_D = 982$ N

5–98. $F_{BC} = 186$ N, $A_x = 161$ N, $A_y = 457$ N

5–99. $B_y = 1.28$ kN, $A_x = 0$, $A_y = 1.82$ kN

Capítulo 6

6–1. $F_{BC} = 374$ lb (C), $F_{BA} = 143$ lb (T), $F_{CA} = 264$ lb (T)

6–2. $F_{BA} = 1.18$ klb (C), $F_{AC} = 833$ lb (T), $F_{BC} = 373$(C)

6–3. $F_{DE} = 0$, $F_{DC} = 16.5$ klb (C), $F_{AB} = 4.21$ klb (C), $F_{AE} = 4.33$ klb (T), $F_{CE} = 7.81$ klb (T), $F_{CB} = 2.33$ klb (C), $F_{BE} = 3.50$ klb (T)

6–5. $F_{CB} = 3.0$ kN (T), $F_{CD} = 2.60$ kN (C), $F_{DE} = 2.60$ kN (C), $F_{DB} = 2$ kN (T), $F_{BE} = 2$ kN (C), $F_{BA} = 5$ kN (T)

6–6. $F_{CB} = 507$ N (T), $F_{CD} = 439$ N (C), $F_{DE} = 439$ N (C), $F_{DB} = 303$ N (T), $F_{BE} = 826$ N (C), $F_{BA} = 1.36$ kN (T)

6–7. $F_{EF} = 0$, $F_{ED} = 13.1$ kN (C), $F_{DF} = 5.21$ kN (T), $F_{DC} = 4.17$ kN (C), $F_{BC} = 3$ kN (C), $F_{BA} = 8$ kN (C), $F_{CA} = 1.46$ kN (C), $F_{CF} = 3.12$ kN (C), $F_{FA} = 4.17$ kN (T)

6–9. $F_{EC} = 9.01$ kN (C), $F_{ED} = 7.50$ kN (T), $F_{DC} = 5$ kN (C), $F_{DA} = 7.50$ kN (T), $F_{CA} = 4.51$ kN (T), $F_{CB} = 13.5$ kN (C)

6–10. $F_{GC} = F_{FE} = 0$, $F_{CD} = F_{ED} = 0$, $F_{GB} = F_{FA} = 4.24$ kN (C), $F_{AB} = 3.0$ kN (T), $F_{GD} = F_{FD} = 4.24$ kN (C), $F_{CB} = F_{EA} = 4$ kN (C)

6–11. $F_{CD} = 400$ lb (T), $F_{CB} = 346$ lb (C), $F_{BD} = 0$, $F_{BA} = 346$ lb (C), $F_{DA} = 400$ lb (C), $F_{DE} = 800$ lb (T), $F_{AE} = 200$ lb (T)

6–13. $F_{AB} = F_{ED} = 667$ lb (C), $F_{AG} = F_{EF} = 533$ lb (T), $F_{BG} = F_{DF} = 0$, $F_{BC} = F_{DC} = 667$ lb (C), $F_{GC} = F_{FC} = 0$, $F_{GF} = 533$ lb (T)

6–14. $F_{GB} = 0$, $F_{BA} = 4.47$ kN (C), $F_{BC} = 2.0$ kN (C), $F_{GA} = F_{GC} = 5.66$ kN (C)

6–15. $F_{EC} = 1.20\,P$ (T), $F_{ED} = 0$, $F_{AB} = F_{AD} = F = 0.373\,P$ (C), $F_{DC} = 0.373\,P$ (C), $F_{DB} = 0.333\,P$ (T), $F_{BC} = 0.373\,P$ (C)

6–17. $F_{AB} = 10.6$ kN (C), $F_{AH} = 7.50$ kN (T), $F_{EF} = 10.6$ kN (T), $F_{ED} = 7.50$ kN (C), $F_{BC} = 7.50$ kN (C), $F_{BH} = 7.50$ kN (T), $F_{FG} = 7.50$ kN (T), $F_{FD} = 2.50$ kN (C), $F_{HC} = 3.54$ kN (C), $F_{HG} = 10.0$ kN (T), $F_{DG} = 3.54$ kN (T), $F_{DC} = 10.0$ kN (C), $F_{CG} = 2.50$ kN (T)

6–18. $F_{AI} = 4.04$ klb (C), $F_{AB} = 3.75$ klb (T), $F_{EF} = 12.1$ klb (C), $F_{ED} = 7.75$ klb (T), $F_{BI} = 0$, $F_{BC} = 3.75$ klb (T), $F_{DF} = 0$, $F_{DC} = 7.75$ kip (T), $F_{FC} = 4.04$ klb (C), $F_{FG} = 8.08$ klb (C), $F_{HG} = 2.15$ klb (C), $F_{HI} = 0.8$ klb (T), $F_{CI} = 0.269$ klb (T), $F_{CG} = 1.40$ klb (T), $F_{GI} = 5.92$ klb (C)

6–19. $F_{FG} = 10.1$ klb (C), $F_{FE} = 8.53$ klb (T), $F_{AJ} = 7.26$ klb (C), $F_{AB} = 4.53$ klb (T), $F_{GH} = 10.1$ klb (C), $F_{GE} = 3$ klb (C), $F_{IC} = 0$, $F_{JI} = 7.26$ klb (C), $F_{JB} = 2$ klb (C), $F_{EH} = 3.84$ klb (T), $F_{ED} = 6.13$ klb (T), $F_{BI} = 2.15$ klb (T), $F_{BC} = 3.73$ klb (T), $F_{HD} = 4.50$ klb (C), $F_{HI} = 7.23$ klb (C), $F_{DI} = 5.10$ klb (T), $F_{DC} = 3.73$ klb (T)

6–21. $F_{FC} = 1.39$ klb (T), $F_{GF} = 19.0$ klb (C), $F_{CD} = 16.7$ klb (T)

6–22. $F_{HG} = 15$ kN (C), $F_{HC} = 7.07$ kN (T), $F_{GC} = 0$

6–23. $F_{CF} = 10$ kN (C), $F_{GC} = 7.89$ kN (T)

6–25. $F_{GF} = 12.5$ kN (C), $F_{CD} = 6.67$ kN (T), $F_{GC} = 0$

6–26. $F_{DF} = 2.26$ kN (T), $F_{CE} = 4.53$ kN (C), $F_{ED} = 400$ N (C)

6–27. $F_{FE} = 4.50$ klb (C), $F_{CD} = 1.41$ klb (C), $F_{CE} = 2.0$ klb (T)

6–29. $F_{BC} = 3.25$ kN (C), $F_{CH} = 1.92$ kN (T)

6–30. $F_{FE} = 1.0$ klb (T), $F_{BC} = 2.24$ klb (C), $F_{FB} = 0$

6–31. $F_{CD} = 671$ N (C), $F_{KJ} = 800$ N (T), $F_{CJ} = 283$ N (C)

6–33. $F_{BC} = F_{AB} = F_{CD} = F_{DE} = 0$, $F_{IC} = 6.88$ kN (C), $F_{CG} = 11.0$ kN (T)

6–34. $F_{BC} = F_{AB} = F_{CD} = F_{DE} = 0$, $F_{JE} = 10.62$ kN (C), $F_{GF} = 6.38$ kN (T)

6–35. $F_{BC} = 10.4$ kN (C), $F_{HC} = 2.24$ kN (T), $F_{HG} = 9.15$ kN (T)

6–37. $F_{CD} = 2.62$ klb (T), $F_{KJ} = 3.02$ klb (C), $F_{JN} = 0$

6–38. $F_{GF} = 7.83$ kN (C), $F_{GD} = 1.80$ kN (C)

6–39. $F_{DE} = 3.38$ klb (C), $F_{JI} = 3.38$ klb (T), $F_{DO} = 0.944$ klb (C)

6–41. $F_{AB} = 6.46$ kN (T), $F_{AC} = F_{AD} = 1.50$ kN (C), $F_{BC} = F_{BD} = F = 3.70$ kN (C), $F_{BE} = 4.80$ kN (T)

6–42. $F_{BD} = 731$ lb (C), $F_{BC} = 250$ lb (T), $F_{BA} = 167$ lb (T), $F_{AD} = 786$ lb (T), $F_{AC} = 391$ lb (C), $F_{CD} = 0$

6–43. $F_{AC} = F_{BC} = 400$ N (C), $F_{CD} = 566$ N (T), $F_{BD} = 283$ N (T), $F_{AB} = 0$, $F_{AD} = 283$ N (T)

6–45. $F_{BA} = 175$ N (C), $F_{BC} = 79.1$ N (T), $F_{BD} = 25$ N (T), $F_{DA} = 175$ N (C), $F_{DC} = 79.1$ N (T), $F_{CA} = 335$ N (C)

6–46. $F_{FA} = 0$, $F_{FD} = F_{FE} = F = 1.73$ kN (T), $F_{EA} = 9.37$ kN (C), $F_{EB} = 7.79$ kN (T), $F_{ED} = 1.73$ kN (T), $F_{DA} = 9.37$ kN (C), $F_{DC} = 7.79$ kN (T), $F_{AC} = F_{AB} = 5.20$ kN (T), $F_{BC} = 2.60$ kN (C)

6–47. $F_z = 2$ kN, $E_y = 6.93$ kN, $F_y = 3.46$ kN, $A_x = 0$, $A_y = 3.46$ kN, $A_z = 2$ kN, $F_{CD} = 2.31$ kN (T), $F_{CF} = 0$, $F_{CB} = 1.15$ kN (C), $F_{DF} = 4.16$ kN (C), $F_{DB} = 0$, $F_{DE} = 3.46$ kN (T), $F_{BE} = 4.16$ kN (T), $F_{BA} = 3.46$ kN (C), $F_{EA} = 2.31$ kN (C), $F_{EF} = 0$, $F_{FA} = 1.15$ kN (T)

6–49. $F_C = 220$ lb, $F_A = 434$ lb, $\theta = 64.0°$ ∠θ

6–50. $A_x = 300$ N, $A_y = 300$ N, $C_x = 300$ N, $C_y = 300$ N

http://librosysolucionarios.net

6–51. $B_y = -24.0$ lb, $B_x = 74.0$ lb, $A_x = 74.0$ lb, $A_y = 124$ lb, $C_x = 74.0$ lb, $C_y =$ [illegible] lb

6–53. $F_{BC} = 576$ N, $F_{AB} = 360$ N, $D_x = 360$ N, $D_y = 450$ N, $M_D = 450$ N · m

6–54. $F_{BC} = 297$ lb, $D_y = 210$ lb, $D_x = 60$ lb

6–55. $A_y = 2$ kN, $B_x = 0$, $B_y = 12$ kN, $M_B = 32$ kN · m

6–57. $B_y = 1.34$ klb, $A_y = 1.02$ klb, $E_x = 0$, $E_y = 240$ lb, $M_E = 1.20$ klb · ft

6–58. $T_{AB} = 357$ lb, $N_D = 70$ lb, $C_x = C_y = 0$

6–59. $F_{AB} = 8.60$ MN, $F_C = 9.78$ MN

6–61. $C_x = 1600$ lb, $C_y = 800$ lb, $D_x = 800$ lb, $D_y = 800$ lb

6–62. $B_x = 1600$ lb, $B_y = 800$ lb, $D_x = 800$ lb, $D_y = 800$ lb

6–63. 667 N

6–65. $F_{DH} = 10.2$ kN, $E_x = 6.13$ kN, $E_y = 13.1$ kN, $F_{AB} = 4.60$ kN, $C_x = 3.98$ kN, $C_y = 7.21$ kN

6–66. $N = 10$ lb

6–67. 36.0 lb

6–69. 5.45 lb

6–70. $C_y = 285$ lb, $C_x = 326$ lb, $A_x = 176$ lb, $A_y = 135$ lb

6–71. $D_x = 50$ lb, $D_y = 50$ lb, $B_x = 112$ lb, $A_x = 62.5$ lb, $B_y = 117$ lb, $A_y = 167$ lb

6–73. $C_x = 75$ lb, $C_y = 100$ lb

6–74. $D_x = 300$ lb, $D_y = 300$ lb, $E_y = 600$ lb, $B_y = 300$ lb, $E_x = 225$ lb, $B_x = 75$ lb

6–75. $F_{AB} = 1.71$ klb, $F_C = 2.28$ klb

6–77. $B_x = 2.06$ kN, $A_y = 0$, $A_x = 2.06$ kN, $F_C = 2.43$ kN

6–78. $F_A = 258$ lb, $F_B = 142$ lb

6–79. $C_x = 19.2$ lb, $C_y = 25.6$ lb, $B_x = 305$ lb, $B_y = 0$, $A_x = 206$ lb, $A_y = 25.6$ lb

6–81. $W_C = 0.812W$, $N_C = 0.544W$

6–82. $T = 147$ N, $\theta = 14.6°$

6–83. $N_B = 40$ lb, $N_C = 11.6$ lb, $D_x = 11.6$ lb, $D_y = 40$ lb

6–85. 170 lb · in

6–86. $F_{DE} = W \cot \theta$

6–87. 850 N

6–89. $M = [(2PL \operatorname{sen} 2\theta)/(\operatorname{sen}\phi)][\cos(\phi - \theta)]$

6–90. $M = [(4PL \operatorname{sen}^2 \theta)/(\operatorname{sen}\phi)][\cos(\phi - \theta)]$

6–91. $G_x = 333$ lb, $G_y = 250$ lb, $F_x = G_x = 333$ lb, $F_y = G_y = 250$ lb

6–93. (*a*) $\theta = \tan^{-1}(0.5 \cot \phi)$, (*b*) 16.1°

6–94. $F_{AB} = 1.56$ kN, $(M_E)_y = 0$, $E_x = 0$, $E_y = 0$, $(M_E)_x = 0.5$ kN · m

6–95. $A_z = 0$, $A_x = 172$ N, $A_y = 115$ N, $C_x = 47.3$ N, $C_y = 61.9$ N, $C_z = 125$ N, $(M_C)_y = -429$ N · m, $(M_C)_z = 0$

6–97. $F_{DE} = 270$ lb, $B_x = -30$ lb, $B_y = -13.3$ lb, $B_z = 0$

6–98. $F_{DF} = F_{EF} = F_{DE} = 22.2$ lb

6–99. $A_x = 1.5$ kN, $A_z = 0$, $F_{DE} = 5.30$ kN, $A_y = 0$, $C_x = -2.25$ kN, $C_y = 3.0$ kN, $C_z = 2.25$ kN

6–101. $P = [kL/(2 \tan \theta \operatorname{sen} \theta)](2 - \csc \theta)$

6–102. $F_{AD} = 990$ lb (C), $F_{AB} = 700$ lb (T), $F_{DB} = 495$ lb (C), $F_{DC} = 1.48$ klb (C), $F_{CB} = 1.05$ klb (T)

6–103. $F_{HD} = 7.07$ kN (C), $F_{CD} = 50$ kN (T), $F_{GD} = 5$ kN (T)

6–105. $A_y = 250$ N, $B_x = 1.40$ kN, $C_y = 1.70$ kN, $C_x = 500$ N, $A_x = 1.40$ kN

6–106. $F_{AD} = 2.47$ klb (T), $F_{AC} = F_{AB} = F = 1.22$ klb (C)

6–107. $B_y = 449$ lb, $A_x = 92.3$ lb, $A_y = 186$ lb, $M_A = 359$ lb · ft

6–109. $P = 25$ lb, $P = 33.3$ lb, $T = 33.33$ lb, $P = 11.1$ lb

6–110. $F_{BC} = 17.9$ kN (C), $F_{CD} = 8$ kN (T), $F_{BD} = F_{BE} = 0$, $F_{AB} = 17.9$ kN (C), $F_{DE} = 8$ kN (T), $F_{AE} = 8$ kN (T)

Capítulo 7

7–1. $N_C = 0$, $V_C = 1.0$ klb, $M_C = 56$ klb · ft, $N_D = 0$, $V_D = 1.0$ klb, $M_D = 48$ klb · ft

7–2. $N_B = 0$, $V_B = 100$ lb, $M_B = 750$ lb · in , $N_D = 0$, $V_D = 75$ lb, $M_D = 750$ lb · in

7–3. $T_D = 0$, $T_C = 200$ N · m, $T_B = 200$ N · m, $T_A = 100$ N · m

7–5. $N_B = 0$, $V_B = 288$ lb, $M_B = 1.15$ klb · ft

7–6. $N_C = 0$, $V_C = 11.8$ kN, $M_C = 35.4$ kN · m

7–7. $N_D = 750$ N, $V_D = 250$ N, $M_D = 125$ N · m

7–9. $N_C = 0$, $V_C = 12$ kN, $M_C = 24$ kN · m

7–10. $N_C = 80$ lb, $V_C = 0$, $M_C = 480$ lb · in.

7–11. $N_C = 45.0$ klb, $V_C = 0$, $M_C = 9.00$ klb · ft

7–13. $N_C = 0$, $V_C = 2.01$ klb, $M_C = 15.0$ klb · ft, $N_D = 0$, $V_D = 1.11$ klb, $M_D = 3.77$ klb · ft

7–14. $N_C = 20$ kN, $V_C = 70.6$ kN, $M_C = 292$ kN · m

7–15. $N_C = 4$ klb, $V_C = 1.0$ klb, $M_C = 14.0$ klb · ft, $N_D = 4$ klb, $V_D = 1.75$ klb, $M_D = 5.0$ klb · ft

7–17. $V_A = 0$, $N_A = 5$ kN, $M_A = 0.8$ kN · m, $V_B = 0$, $N_B = 7.5$ kN, $M_B = 0.2$ kN · m

7–18. $N_C = 2.49$ klb, $V_C = 2.49$ klb, $M_C = 4.97$ klb · ft, $N_D = 0$, $V_D = 2.49$ klb, $M_D = 16.5$ klb · ft

7–19. $N_D = 220$ N, $V_D = 220$ N; $M_D = 54.9$ N · m, $N_E = 80.4$ N, $V_E = 0$, $M_E = 112$ N · m

7–21. $N_C = 280$ lb, $V_C = 50$ lb, $M_C = 150$ lb · ft

7–22. $N_D = 800$ N, $V_D = 0$, $M_D = 1200$ N · m

7–23. $N_F = 0$, $V_F = 150$ lb, $M_F = 600$ lb · ft, $N_E = 0$, $V_E = 230$ lb, $M_E = 387$ lb · ft

7–25. $V_B = 496$ lb, $N_B = 59.8$ lb, $M_B = 480$ lb · ft, $N_C = 495$ lb, $V_C = 70.7$ lb, $M_C = 1.59$ klb · ft

7–26. $N = P \operatorname{sen} \theta$, $V = P \cos \theta$, $M = Pr \operatorname{sen} \theta$

7–27. 1.69 klb, 10.0 klb · ft

7–29. $(M_C)_x = -900$ lb · ft, $(M_C)_y = -260$ lb · ft, $(M_C)_z = 1000$ lb · ft, $(N_C)_x = -50$ lb, $(V_C)_y = 500$ lb. $(V_C)_z = -170$ lb

7–30. $(M_C)_x = 20$ lb · ft, $(M_C)_y = 72$ lb · ft, $(M_C)_z = -178$ lb · ft, $(V_C)_x = 104$ lb, $(N_C)_y = 0$, $(V_C)_z = 10$ lb

7–31. $(M_D)_x = 49.2$ kN · m, $(M_D)_y = 87.0$ kN · m, $(M_D)_z = 26.2$ kN · m, $(V_D)_x = 116$ kN, $(N_D)_y = -65.6$ kN, $(V_D)_z = 0$

7–33. -300 lb, $\{-300x\}$ lb · ft, 300 lb, $M = \{300x - 900\}$ lb · ft

7–34. 1200 lb, $\{1200x\}$ lb · ft, 400 lb, $M = \{400x + 9600\}$ lb · ft, -400 lb,

http://librosysolucionarios.net

$M = \{28{,}800 - 400x\}$ lb · ft, -1200 lb,
$M = \{57{,}600 - 1200x\}$ lb · ft

7–35. $V = -2M_O/L$, $M = -(2M_O/L)x$, $V = -2M_O/L$,
$M = M_O - (2M_O/L)x$, $V = -2M_O/L$,
$M = 2M_O - (2M_O/L)x$

7–37. 0.75 kN, $\{0.75x\}$ kN · m, $V = \{3.75 - 1.5x\}$ kN,
$M = \{3.75x - 0.75x^2 - 3\}$ kN · m

7–38. $V = \{-2x + 2.5\}$ kN, $M = \{2.5x - x^2\}$ kN · m,
$V = \{-7.5\}$ kN, $M = \{-7.5x + 75\}$ kN · m

7–39. $V = \{250 - 300x\}$ N, $M = \{250x - 150x^2\}$ N · m,
$V = \{550 - 600x\}$ N,
$M = \{-300x^2 + 550x - 150\}$ N · m

7–41. $V = (w/2)(3L - 2x)$, $M = (w/2)(3Lx - x^2 - 2L^2)$

7–42. $V = \{360 - 3.33x^2\}$ lb, $M = \{360x - 1.11x^3\}$ lb · ft

7–43. $V = \{-50x^2 - 650\}$ N, $M = \{-16.7x^3 - 650x\}$ N · m,
$V = \{-300x + 2100\}$ N,
$M = \{-150x^2 + 2100x - 7350\}$ N · m

7–45. $V = \{3000 - 41.7x^2\}$ lb,
$M = \{-13.9x^3 + 3000x - 18000\}$ lb · ft,
$V = \{41.7x^2 - 1000x + 6000\}$ lb,
$M = \{-13.9(12 - x)^3\}$ lb · ft

7–46. $V = \{-0.417x^2\}$ klb, $M = \{-0.139x^3 - 15\}$ klb · ft,
$V = \{-5x + 55\}$ klb,
$M = \{-2.5x^2 + 55x - 285\}$ klb · ft,
$V = \{0.417(22 - x)^2\}$ klb,
$M = \{-0.139(22 - x)^3 - 15\}$ klb · ft

7–47. $V = (\gamma ht/2d)x^2$, $M = -(\gamma ht/6d)x^3$

7–49. $a = L/3$

7–50. $a = L/2$

7–51. $a = 0.414L$

7–53. Véase Prob. 7.34

7–54. Véase Prob. 7.37

7–55. Véase Prob. 7.38

7–57. Véase Prob. 7.43

7–58. Véase Prob. 7.45

7–59. $x = 0$, $V = 8$ klb, $M = 0$; $x = 10$ ft, $V = 0$, $M = 43$ klb · ft

7–61. $x = 0$, $V = -20$ klb, $M = 0$; $x = 15$ ft, $V = -115$ klb,
$M = -1062.5$ klb · ft

7–62. $x = 0$, $V = 8$ klb, $M = 0$; $x = 10$ ft, $V = 0$, $M = 43$ klb · ft

7–63. $x = 0$, $V = -20$ klb, $M = 0$; $x = 15$ ft, $V = -115$ klb,
$M = -1062.5$ klb · ft

7–65. $x = 0$, $V = 0$, $M = 0$; $x = 12$, $V = 0$, $M = 2700$

7–66. $x = 0$, $V = 48$, $M = 0$; $x = 5$, $V = -12$, $M = 60$

7–67. $x = 0$, $V = 1.52$, $M = 0$; $x = 800$, $V = -1.98$,
$M = 0.395$

7–69. $x = 0$, $V = 0$, $M = 0$; $x = 6^+$, $V = 800$, $M = -1200$

7–70. $x = 0$, $V = 0$, $M = 0$; $x = 6^+$, $V = 9$, $M = -36$

7–71. $x = 0$, $V = wL/3$, $M = 0$; $x = L^+$, $V = wL/2$,
$M = -wL^2/6$

7–73. $x = 0$, $V = 1.10$, $M = -10.4$; $x = 12$, $V = 0.4$, $M = 0$

7–74. $x = 0$, $V = 4$, $M = 0$; $x = 10.97$, $V = 0$, $M = 25.2$

7–75. $x = 0$, $V = -0.45$, $M = 0$; $x = 6$, $V = -0.75$,
$M = -3.30$

7–77. 5.65 ft

7–78. $y_B = 8.67$ ft, $y_D = 7.04$ ft

7–79. 658 lb, 6.44 ft

7–81. 84.0 lb

7–82. 2.43 m, $T_{máx} = T_{CD} = 157$ N

7–83. $T_{AB} = 83.0$ lb, $T_{CD} = 88.1$ lb, $T_{BC} = 46.7$ lb, 20.2 ft

7–85. 184 kN

7–86. 1.36 kN/m

7–87. $y = \{0.0385x^2 + 0.577x\}$ m, $T_{max} = 5.20$ kN

7–89. $T_A = 61.7$ klb, $T_B = 36.5$ klb, $T_C = 50.7$ klb

7–90. $h/L = 0.141$

7–91. 82.1 m, $T_{máx} = 3.22$ kN

7–93. 55.6 ft, $h = 10.6$ ft

7–95. 46.3 ft, 75.2 lb

7–97. 292 lb

7–98. 326 ft

7–99. 5.14 ft

7–101. 76.7 lb

7–102. 10.4 ft

7–103. 8.07 m

7–105. $l = 238$ ft, $h = 93.8$ ft

7–106. $x = 0$, $V = 0$, $M = 24$; $x = 3$, $V = -12$, $M = 12$

7–107. $N_C = 0$, $V_C = 108$ lb, $M_C = 433$ lb · ft

7–109. $x = 0$, $V = 52.8$, $M = 0$; $x = 4.36$, $V = 0$, $M = 153$

7–110. $x = 0$, $V = 0$, $M = 0$; $x = 18$, $V = 0$, $M = 0$

7–111. $N_D = 6.08$ kN, $V_D = 2.60$ kN, $M_D = 13.0$ kN · m

7–113. $V_D = M_D = 0$, $N_D = F_{CD} = 86.6$ lb, $N_E = 0$,
$V_E = 28.9$ lb, $M_E = 86.6$ lb · ft

7–114. $x = 0$, $V = 2.5$, $M = 0$; $x = 1.25$, $V = 0$, $M = 1.56$

Capítulo 8

8–1. 344 lb, $\mu_s \geq 0.70$

8–2. $P = 224$ lb

8–3. 76.4 lb $\leq P \leq$ 144 lb

8–5. el carrete no permanecerá en equilibrio

8–6. $\mu = 0.127$

8–7. 6.67 in

8–9. 34.8 lb, 112 lb

8–10. 45°, 1

8–11. $\theta = \tan^{-1}[(1 - \mu^2)/2\mu]$

8–13. $\theta = \tan^{-1} \mu$

8–14. 21.7 lb

8–15. 20 lb

8–17. 6.97 kN, 15.3 kN

8–18. 1.25 kN, 6.89 kN

8–19. 27.0 lb, 0.171

8–21. 2.21 klb · ft

8–22. puede empujar la cómoda hacia la izquierda

8–23. puede jalar la cómoda hacia la derecha

8–25. 377 lb

8–26. 33.8°

8–27. 1.10 ft

8–29. 1.17 kN

8–30. $\mu = 0.415$

8–31. no puede mover el huacal

http://librosysolucionarios.net

8–33. 21.8°, $P = 72.0$ lb, $N_A = 769.4$ lb

8–34. la bicicleta se mueve hacia adelante

8–35. 26.6°

8–37. 318 lb, 360 lb

8–38. 33.4°

8–39. 33.4°

8–41. resbala en B

8–42. 40.2 N

8–43. $\theta = \tan^{-1}[(\mu L/a) - \mu]$

8–45. 46.4°

8–46. 79.3 N

8–47. 0.576 in

8–49. $P = W \operatorname{sen}(\alpha + \theta)$, $\phi = \theta$

8–50. 0.344

8–51. 0.601

8–53. 32.3 klb

8–54. 1.90 kN

8–55. 4.05 klb

8–57. $P' = 4.96$ klb, $P = 8.16$ klb

8–58. las cuñas se autotraban

8–59. 7.32 kN

8–61. 22.6°

8–62. 25.3°

8–63. 4.83 kN

8–65. 29.7 lb · in , 112 lb

8–66. 1.98 kN

8–67. 2.02 N · m

8–69. 1.35 N

8–70. 21.8 kN

8–71. 76.1 lb · ft

8–73. 31.0 N · m

8–74. 5.69 lb · in

8–75. 880 N, 352 N · m

8–77. 4.53 N · m

8–78. 72.7 N

8–79. $N = (T_1/\mu)(e^{\mu\theta} - 1) + N_1$

8–81. $T_A = 1.95$ kN, $T_B = 0.759$ kN

8–82. 1.31 kN, 0.372 kN

8–83. (*a*) 4.60 kN, (*b*) 16.2 kN

8–85. es posible para B jalar a A

8–86. $22.9 \text{ N} \leq P \leq 151 \text{ N}$

8–87. 8.28 ft

8–89. 2.49 kN

8–90. 12.7 lb

8–91. $F_{AB} = F_B = 15.4$ lb, $F_{AC} = F_C = 5.47$ lb

8–93. 77.8 lb

8–94. 300 N

8–95. 63.5°

8–97. 38.2°

8–98. 78.7 lb

8–99. 15.8 lb · ft

8–101. 36.3 lb · ft

8–102. 1.62 klb

8–103. $M = 2\mu PR/3 \cos\theta$

8–105. $M = \frac{1}{2}\mu PR$

8–106. $M = \frac{8}{15}\mu PR$

8–107. 905 lb · in

8-109. 0.0455 N · m, 68.2°

8–110. 826 N

8–111. 814 N

8–113. 0.0407

8–114. 13.8 lb

8–115. 29.0 lb

8–117. 0.129

8–118. 18.9 N

8–119. 1.35 mm

8–121. 486 lb

8–123. 131 N

8–125. 2.25 kN

8–126. 78.8 lb

8–127. 90.9 lb

8–129. 0.277

8–130. 36.6 N

8–131. 12 lb · ft

8–133. 1.88 lb

8–134. 35.0°

8–135. 0.833

8–137. 32.5°

Capítulo 9

9–1. 1.6 m

9–2. $\bar{x} = \dfrac{a \operatorname{sen}\theta}{\theta}$, $\bar{x} = (2\sqrt{2}/\pi)a$, $\bar{x} = ($[illegible]$\pi)a$

9–3. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 1.82$ ft

9–5. 1.15 m

9–6. 0.546 m, $O_x = 0$, $O_y = 7.06$ N, 3.85 N · m

9–7. 0.620 ft, $A_x = 0$, $A_y = 1.16$ lb, 0.720 lb · ft

9–9 $\bar{x} = (2/3)a$, $\bar{y} = (m/3)a$

9–10. $\bar{x} = (2/7)a$, $\bar{y} = (2/5)a$

9–11. $\bar{x} = [(1 + n)/2(2 + n)]a$, $\bar{y} = [(1 + n)/(1 + 2n)]h$

9–13. $\bar{x} = 1.61$ in., $\bar{y} = 1.33$ in.

9–14. $\bar{x} = 1.08$ in , $\bar{y} = 0.541$ in

9–15. $\bar{x} = (5/8)a$, $\bar{y} = (2k/5)a$

9-17. $\bar{x} = (2a \operatorname{sen}\alpha)/3\alpha$, $\bar{y} = 0$

9–18. $\bar{x} = (4/3\pi)a$, $\bar{y} = (4/3\pi)b$

9–19. $\bar{x} = (\pi/2)a$, $\bar{y} = (\pi/8)a$

9–21. $\bar{x} = 0.4$ ft, $\bar{y} = 1.0$ ft

9–22. $\bar{x} = 0.914$ m, $\bar{y} = 0.357$ m

9–23. $\bar{x} = 1.26$ m, $\bar{y} = 0.143$ m

9–25. $(4/5)h$

9–26. 0.833 ft

9–27. 1.33 ft

9–29. 84.7 mm

9–30. 2.5 ft

http://librosysolucionarios.net

9–31. $\bar{z} = \frac{3}{8}a$
9–33. $\bar{z} = \frac{1}{3}a$
9–34. $\bar{z} = \frac{27}{40}a$
9–35. 2 kg, 5 m
9–37. $\bar{x} = 1.29$ ft, $\bar{y} = 2.14$ ft, $\bar{z} = -0.286$ ft
9–38. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 1.63$ in
9–39. $\bar{x} = 124$ mm, $\bar{y} = 0$
9–41. $\bar{x} = 2.85$ in., $\bar{y} = 5.33$ in
9–42. $\bar{x} = 2.43$ m, $\bar{y} = 1.31$ m
9–43. 179 mm
9–45. 1.55 in
9–46. 95 mm
9–47. 87.5 mm
9–49. $-0.262a$
9–50. $\bar{x} = 2.5$ in , $\bar{y} = 4$ in
9–51. $\bar{y} = (b^2c + 3abc + 3a^2c)/3(a + b)(2a + b)$, $\bar{x} = b(b + 3a)/3(2a + b)$
9–53. $\bar{y} = h(2a + b)/3(a + b)$
9–54. $\bar{x} = 1.82$ m, $\bar{y} = 1.28$ m
9–55. 142 mm
9–57. $\bar{x} = 2.11$ in , $\bar{y} = 2.11$ in
9–58. $\bar{x} = 2.73$ in , $\bar{y} = 1.42$ in
9–59. 0.206 m
9–61. 7.18 ft, $B_y = 2633$ lb, $A_y = 667$ lb
9–62. 4.28 ft, $B_y = 620$ lb, $A_y = 830$ lb
9–63. 2.48 ft, 38.9°
9–65. $\bar{z} = 52.5$ mm, $\bar{x} = \bar{y} = 0$
9–66. 2.95 in
9–67. $\bar{y} = 58.1$ mm, $\bar{x} = \bar{z} = 0$
9–69. $\bar{z} = \frac{1}{2}a$
9–70. 323 mm
9–71. $h = (a^3 \pm a^2\sqrt{a^2 - \pi r^2})/\pi r^2$
9–73. 4.71 m³
9–74. 6.77 lb
9–75. $A = 8\pi ac$, $V = 2\pi ca^2$
9–77. $3.56(10^3)$ ft², $22.1(10)^3$ ft³
9–78. 29.3 klb
9–79. 2.26
9–81. 1.04 lb
9–82. 0.377 lb
9–83. $22.7(10^{-3})$ m³
9–85. $71.6(10^{-3})$ m²
9–86. 274 m²
9–87. $A = 3.33$ ft², $\bar{y} = 1.2$ ft, $V = 25.1$ ft³
9–89. $A = 0.941$ m², $\bar{y} = 0.569$ m, $V = 3.36$ m³
9–90. 1.41 MN, 4 m
9–91. 157 kN, 235 kN, 4.22 m
9–93. $A_y = 2.51$ MN, $B_x = 2.20$ MN, $B_y = 859$ kN
9–94. $F_h = 488$ klb, $F_v = 260$ klb
9–95. 4.92 klb, 24.0° $\measuredangle\theta$
9–97. 4.0 klb
9–98. 13.8 klb, 61.4 klb
9–99. 40.0 klb, 8.0 ft
9–101. 2.02 klb
9–102. 133 lb, $\bar{y} = 7.50$ ft, $\bar{x} = 0$
9–103. 42.7 kN, $\bar{y} = 2.40$ m, $\bar{x} = 0$, $C_z = B_z = 12.8$ kN, $A_z = 17.1$ KN
9–105. 14.8 lb/ft²
9–106. $\pi w_0 r$
9–107. $O_x = wr$, $O_y = wr$, $M_O = wr^2$
9–109. $F_{Rx} = (1/2)w_0r$, $F_{Ry} = (\pi/4)w_0r$, $M_{RO} = (1/2)w_0r^2$
9–110. $F_{Rx} = (\pi/4)w_0r$, $F_{Ry} = (1/2)w_0r$, $M_{RO} = (\pi/4)w_0r^2$
9–111. $F = (4ab/\pi^2)p_0$, $\bar{x} = a/2$, $\bar{y} = b/2$
9–113. at $a = 0.5$ ft, $F = 2.94$ lb; at $a = 1$ ft, $F = 16.6$ lb
9–114. 6.93 kN, −0.125 m
9–115. 90.5 mm
9–117. $\bar{x} = \frac{3}{8}b$, $\bar{y} = \frac{3}{5}h$
9–118. $\bar{z} = 0.422$ m, $\bar{x} = \bar{y} = 0$
9–119. $\bar{x} = 1.30$ m, $\bar{y} = 2.30$ m
9–121. $\bar{x} = 112$ mm, $\bar{y} = 112$ mm, $\bar{z} = 136$ mm
9–122. $\bar{x} = 3.30$ in , $\bar{y} = 3.30$ in
9–123. $\bar{x} = -0.262$ in , $\bar{y} = 0.262$ in

Capítulo 10

10–1. 356 in⁴
10–2. $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
10–3. $I_y = \frac{1}{12}hb^3$
10–5. 0.165 in⁴
10–6. $I_x = 2.13$ in⁴, $I_y = 4.57$ in⁴
10–7. $(J_O)_s = 251(10)^3$ mm⁴, $(J_O)_t = 172(10)^3$ mm⁴, 68.4%
10–9. 0.167 in⁴
10–10. 0.3 in⁴
10–11. $I_x = \pi ab^3/4$
10–13. $I_x = \pi r^4/16$
10–14. 8.94 mm
10–15. 0.571 in⁴
10–17. 2.13 ft⁴
10–18. 0.610 ft⁴
10–19. 0.305 m⁴
10–21. 0.628 m⁴
10–22. $15.4(10)^6$ mm⁴
10–23. $3.35(10^3)$ in⁴
10–25. 74.7 mm
10–26. 59.4 mm
10–27. $I_x = b^3d^3/6(b^2 + d^2)$
10–29. $I_x = 141$ in⁴, $I_y = 21.3$ in⁴
10–30. $147(10)^6$ mm⁴
10–31. $\bar{y} = 2$ in , $I_{\bar{x}\bar{x}} = 128$ in⁴
10–33. $I_x = 246$ in⁴, $I_y = 61.5$ in⁴
10–34. $\bar{y} = 1.29$ in , $I_{\bar{x}\bar{x}} = 6.74$ in⁴
10–35. 86 in⁴
10–37. $0.187d^4$
10–38. 81 in⁴
10–39. 91.1 in⁴
10–41. $\bar{y} = 170$ mm, $I_{x'} = 722(10)^6$ mm⁴

http://librosysolucionarios.net

10–42. $91.7(10)^6$ mm^4
10–43. $\bar{y} = 2.20$ in , $I_{x'} = 57.9$ in^4
10–45. $I_{x'} = 45.1(10)^6$ mm^4, $I_{y'} = 7.60(10)^6$ mm^4
10–46. $I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$, $I_{y'} = \frac{1}{36}hb(b^2 - ab + a^2)$
10–47. $I_{x'} = \frac{1}{12}a^3 b \operatorname{sen}^3 \theta$, $I_{y'} = [(ab \operatorname{sen} \theta)/12](b^2 + a^2 \cos^2 \theta)$
10–49. 8 in^4
10–50. $I_{xy} = \frac{3}{16}b^2h^2$
10–51. $I_{xy} = \frac{1}{8}a^4$, $\bar{I}_{x'y'} = -0.0165a^4$
10–53. 0.333 in^4
10–54. 1.33 m^4
10–55. $I_{xy} = nb^2h^2/2(2 + 2n)$
10–57. $I_{xy} = (a^2 c \operatorname{sen}^2 \theta/12)(4a \cos \theta + 3c)$
10–58. $\bar{x} = 85$ mm, $\bar{y} = 35$ mm, $I_{xy} = -7.5(10)^6$ mm^4
10–59. $98.4(10)^6$ mm^4
10–61. $\bar{x} = 44.1$ mm, $\bar{y} = 44.1$ mm, $I_{xy} = -6.26(10)^6$ mm^4
10–62. 0.740 in^4
10–63. -36 in^4
10–65. $135(10)^6$ mm^4
10–66. $I_u = 274$ in^4, $I_v = 572$ in^4, $I_{uv} = -258$ in^4
10–67. $I_u = 101$ in^4, $I_v = 134$ in^4, $I_{uv} = -28.6$ in^4
10–69. $I_u = 15.8$ in^4, $I_v = 25.8$ in^4
10–70. 10.5°, $I_{máx} = 117(10^6)$ mm^4, $I_{mín} = 28.8(10^6)$ mm^4
10–71. $-27.3°$, $I_{máx} = 24.6(10)^6$ mm^4, $I_{mín} = 2.56(10)^6$ mm^4
10-73. $I_{máx} = 194(10)^3$ mm^4, $I_{min} = 55.5(10)^3$ mm^4, 29.9°
10–74. $I_{máx} = 117(10)^6$ mm^4, $I_{mín} = 28.8(10)^6$ mm^4, 10.5°
10–75. $I_{máx} = 24.6(10)^6$ mm^4, $I_{mín} = 2.56(10)^6$ mm^4, 27.3°
10–77. $I_y = \frac{1}{3} ml^2$
10–78. $k_x = a/\sqrt{3}$
10–79. $I_x = \frac{2}{5}mr^2$
10–81. $I_x = \frac{3}{10} mr^2$
10–82. 2.25 slug · ft^2
10–83. 57.7 mm
10–85. $I_x = \frac{93}{70} mb^2$
10–86. $I_x = \frac{2}{5} mb^2$
10–87. 1.58 slug · ft^2
10–89. 1.78 m, 4.45 kg · m^2
10–90. 118 slug · ft^2
10–91. 282 slug · ft^2
10–93. $I_O = \frac{1}{2} ma^2$
10–94. 0.203 m, 0.230 kg · m^2
10–95. 34.2 kg · m^2
10–97. $I_{xy} = \frac{1}{6}a^2b^2$
10–98. 0.667 in^4
10–99. -110 in^4
10–101. $I_{máx} = 0.752$ in^4, $I_{mín} = 0.206$ in^4
10–102. $I_x = \frac{2}{15} bh^3$
10–103. $I_y = \frac{2}{7} b^3h$
10–105. $17.0(10)^6$ mm^4
10–106. 5.64 slug · ft^2

Capítulo 11

11–1. 51.0 N
11–2. 512 N
11–3. 75.1°
11–5. $F = 2P \cot \theta$
11–6. $P = W/2 \cot \theta$
11–7. 24.5 N
11–9. 42.4°
11–10. trabajo virtual, $\theta = 90°$, fuerza del resorte, $\theta = 11.5°$
11–11. 0°, 60°
11–13. 37.8°
11–14. 36.1°
11–15. 24.2°
11–17. 27.4°
11–18. 10.8 lb/ft
11–19. 26.0 N · m
11–21. 90°, 17.0°
11–22. 17.1°
11–23. $P_1 = 11.5$ lb, $P_2 = 10$ lb
11–25. $W_1 = W_2 = WL/2a$
11–26. 90°, 11.5°
11–27. 24.2°
11–29. 10.8 lb/ft
11–30. $x = 0$, $y = 0$
11–31. 0.590 ft y -0.424 ft
11–33. $x = 0$, $y = 0$
11–34. 64.8°
11–35. 0°, 60°
11–37. 90°, $\theta = \operatorname{sen}^{-1} (W/2kl)$
11–38. 0°, $\theta = \cos^{-1}(W/2kL)$, $W = 2kL$
11–39. 90°, 30°
11–41. 90°, $\theta = \operatorname{sen}^{-1} (4W/ka)$
11–42. 36.6°
11–43. 90°, 5.90°
11–45. 8 in
11–46. 0°, 71.5°
11–49. $d = 0.451r$
11–50. 5.20 ft
11-51. $r > \dfrac{b}{2}$, Estable
11–53. 1.35 in
11–54. $x_1 = 6.67$ in , $x_2 = 1.25$ in
11–55. 29.1°
11–57. 427 N
11–58. $F_C = \dfrac{2n\pi l}{p} P$
11–59. 10.0 lb
11–61. 0°, 72.5°
11–62. 16.6°
11–63. 0°, $\theta = \cos^{-1} [1 - (W/2kl)]$

http://librosysolucionarios.net

Ecuaciones fundamentales de la estática

Vector cartesiano

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

Magnitud

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Dirección

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k}$$

$$= \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Producto escalar

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Producto vectorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Vector cartesiano de posición

$$\mathbf{r} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

Vector cartesiano de fuerza

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

Momento de una fuerza

$$M_O = Fd$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Momento de una fuerza alrededor de un eje específico

$$M_a = \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Simplificación de un sistema de fuerzas y pares

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$$
$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma\mathbf{M}_O$$

Equilibrio

Partícula

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0$$

Cuerpo rígido – dos dimensiones

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma M_O = 0$$

Cuerpo rígido – tres dimensiones

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_{x'} = 0,\ \Sigma M_{y'} = 0,\ \Sigma M_{z'} = 0$$

Fricción

Estática (máxima) $F_s = \mu_s N$

Cinética $F_k = \mu_k N$

Centro de gravedad

Partículas o partes discretas

$$\bar{r} = \frac{\Sigma\,\tilde{r}W}{\Sigma W}$$

Cuerpo

$$\bar{r} = \frac{\int \tilde{r}\,dW}{\int dW}$$

Momentos de inercia de área y de masa

$$I = \int r^2\,dA \qquad I = \int r^2\,dm$$

Teorema del eje paralelo

$$I = \bar{I} + Ad^2 \qquad I = \bar{I} + md^2$$

Radio de giro

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Trabajo virtual

$$\delta U = 0$$

http://librosysolucionarios.net

Prefijos SI

Múltiplo	*Forma exponencial*	*Prefijo*	*Símbolo en el SI*
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
Submúltiplo			
0.001	10^{-3}	mili	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

Factores de conversión (FPS) a (SI)

Cantidad	*Unidad de medida (FPS)*	*Igual a*	*Unidad de medida (SI)*
Fuerza	lb		4.4482 N
Masa	slug		14.5838 kg
Longitud	ft		0.3048 m

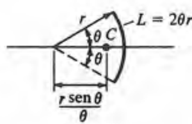
Factores de conversión (FPS)

1 ft = 12 in (pulgadas)
1 mi. (milla) = 5,280 ft
1 klb (kilolibra) = 1,000 lb
1 ton = 2,000 lb

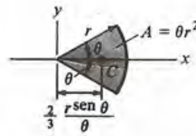
http://librosysolucionarios.net

Propiedades geométricas de elementos de línea y de área

Localización del centroide | **Localización del centroide** | **Momento de inercia de área**

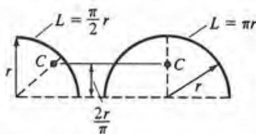


Segmento de arco de circunferencia

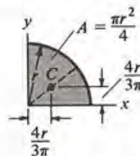


Área de un segmento de círculo

$$I_x = \frac{1}{4} r^4\left(\theta - \frac{1}{2} \text{ sen } 2\theta\right)$$
$$I_y = \frac{1}{4} r^4\left(\theta + \frac{1}{2} \text{ sen } 2\theta\right)$$

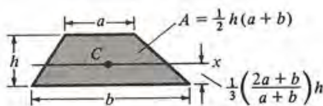


Arcos de un cuarto y una media circunferencia

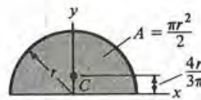


Área de un cuarto de círculo

$$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$$
$$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

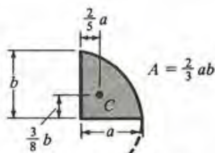


Área trapezoidal

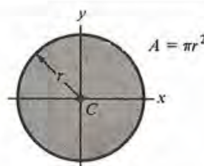


Área semicircular

$$I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$$
$$I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$$

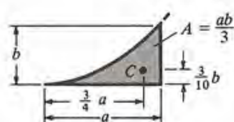


Área semiparabólica

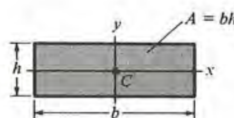


Área de un círculo

$$I_x = \frac{1}{4} \pi r^4$$
$$I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$$

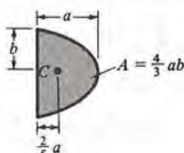


Área exparabólica

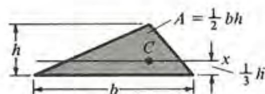


Área rectangular

$$I_x = \frac{1}{12} bh^3$$
$$I_y = \frac{1}{12} hb^3$$



Área parabólica

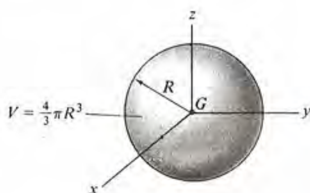


Área triagular

$$I_x = \frac{1}{36} bh^3$$

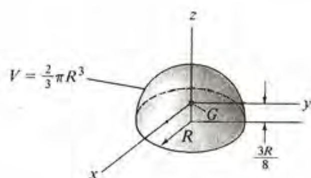
http://librosysolucionarios.net

Centro de gravedad y momento de inercia de masa de sólidos homogéneos



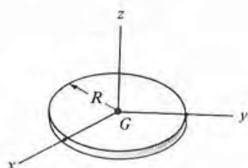
Esfera

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} mR^2$



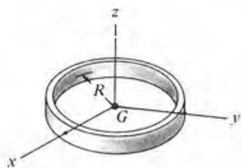
Hemisferio

$I_{xx} = I_{yy} = 0.259mR^2 \quad I_{zz} = \frac{2}{5} mR^2$



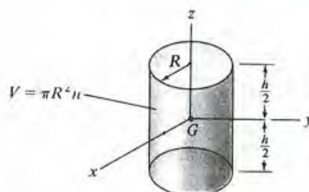
Disco circular delgado

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} mR^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$



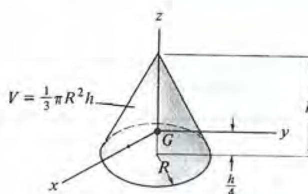
Anillo delgado

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} mR^2 \quad I_{zz} = mR^2$



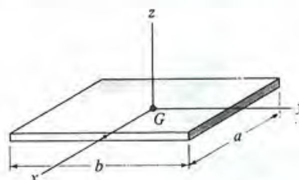
Cilindro

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m(3R^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$



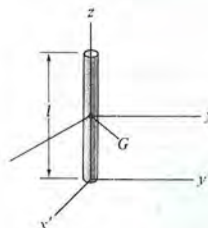
Cono

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80} m(4R^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{3}{10} mR^2$



Placa delgada

$I_{xx} = \frac{1}{12} mb^2 \quad I_{yy} = \frac{1}{12} ma^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$



Varilla delgada

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} ml^2 \quad I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{3} ml^2 \quad I_{zz} = 0$

http://librosysolucionarios.net

Índice

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

Esta obra se terminó de imprimir en abril del 2006
en los talleres de Overprint, S. A. de C. V.
Agustín Yáñez 1253, Col. Sector Popular
C.P. 09060, México, D.F.

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

OTRAS OBRAS DE INTERES

Hibbeler	MECANICA PARA INGENIEROS: DINAMICA, 6a. ed.
Hibbeler	MECANICA DE MATERIALES
Resnick	FISICA, 4a. ed. (VOL.1 y 2)
Benson	FISICA UNIVERSITARIA (VOL.1 y 2)
Orthwein	DISEÑO DE COMPONENTES DE MAQUINAS
Bentley	SISTEMAS DE MEDICION, Principios y Aplicaciones
Cowan	DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO
Luzadder	INTRODUCCION AL DIBUJO DE INGENIERIA
Leon	ALGEBRA LINEAL CON APLICACIONES
Boyce	CALCULO
Marcus	ECUACIONES DIFERENCIALES







COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.

http://librosysolucionarios.net